Edward W. Piotrowski
ep@alpha.uwb.edu.pl

Paradoks równowagi cen, a optymalna asekuracja kapitału

(RePEc:sla:eakjkl:102PL 1-II-1997)

Cel działalności gospodarczej to permanentna maksymalizacja zysku, a nie maksymalizacja średniego dochodu. Autor jest przekonany, że dla osiągnięcia tego zamiaru należy analizować wartości oczekiwane logarytmów prognozowanych cen. Prawidłowa asekuracja może uczynić bezpiecznymi wiele ryzykownych przedsięwzięć.

1 Czy równowaga cen jest wewnętrznie sprzecznym pojęciem?

Rozważmy dwa walory (np. pieniężne: funt i dolar), o możliwie zbliżonej atrakcyjności (by prawdopodobieństwa różnych zachowań tych kursów były dla obydwu symetryczne), i nazwijmy ceną dolara w chwili t bieżący kurs $\lceil \$\backslash\pounds\rfloor_t$ wymiany funtów na dolary, a ceną funta bieżący kurs $\lceil\pounds\backslash\$\rfloor_t = (\lceil\$\backslash\pounds\rfloor_t)^{-1}$ wymiany dolarów na funty. Załóżmy, że rejestrujemy ewolucję kursu mierząc $\ln(\lceil\$\backslash\pounds\rfloor_t)$ i odnotowując wyniki, gdy zmiana tego logarytmu przekroczy $\pm\delta > 0$. Niech p będzie prawdopodobieństwem otrzymania wyniku pomiaru $+\delta$, a q prawdopodobieństwem otrzymania wyniku $-\delta$. Wartość oczekiwana ceny dolara po jednym pomiarze wyniesie

$$\lceil\$\backslash\pounds\rfloor_{t+1} = \left(p\, e^{+\delta} + q\, e^{-\delta} \right) \lceil\$\backslash\pounds\rfloor_t$$

Paradoks równowagi cen: *Aby przeciętna cena dolara pozostawała stała, koniecznym jest warunek $p < q$, który implikuje wzrastanie przeciętnej ceny funta, lecz wzrost taki jest sprzeczny z założeniem o symetrii spodziewanych zachowań walut.*

Paradoks ten pojawia się m.in. w konstrukcji modelu Blacka-Scholesa dla cen opcji (dryf esperancji logarytmu cen akcji w kierunku coraz mniejszych wartości).

Zdaniem autora, jedynym sposobem przezwyciężenia opisanego paradoksu jest rezygnacja z założenia o równowadze cen, oraz przyjęcie warunku $p = q = \frac{1}{2}$. Powoduje to jednak bardzo istotną, lecz wysoce niepożądaną właściwość: prognozowane ceny obydwu walut rosną w czasie (każda wydaje się lepsza); powyższy efekt przekonuje o iluzoryczności rachunków wyznaczających oczekiwane ceny. Przyczyna tego tkwi w wyjątkowości rynku (relatywność opisujących go jednostek metrycznych, jakimi są ceny, a także ich zmienność w czasie nie ma odpowiednika w naukach ścisłych innych niż ekonomia), oraz we właściwościach ceny (jest wielkością ograniczoną z dołu).

Sposób rozwiązania paradoksu prowadzi do rachunków, w których szacowane są nie średnie wartości cen, lecz średnie wartości ich logarytmów, co tworzy narzędzie do interesującego w swoich konsekwencjach modyfikowania wielu formuł i prognoz w ekonomii.

2 Geneza średnich logarytmów cen.

Pierwszym problemem prowadzącym do rezygnacji z szacowania średniej ceny był *paradoks petersburski* Mikołaja Bernoulliego. Zaproponowane rozwiązanie polegało na wprowadzeniu pojęcia majątku moralnego (Daniel Bernoulli), które zbędnie uczyniło wyniki obliczeń wysoce subiektywnymi (Laplace uwzględniał w swoich założeniach cały kapitał gracza, bez względu jak małych stawek dotyczyła gra – zob. *Probability Theory: The Logic of Science*, E.T.Jaynes, 1993). Cecha subiektywizmu w przyjętych założeniach zaciążyła nad dalszym rozwojem badań problemu, których ukoronowaniem stała się teoria użyteczności von Neumana i Morgensterna. Niechęć do tej teorii dobitnie obrazuje ignorancja wielu czołowych statystyków (. . . pojęcie to pozostało jedynie historyczną ciekawostką-- w *Lady Lack. The Theory of Probability*, Warren Weaver, 1963; dziewiętnaście lat po ukazaniu się pierwszego wydania *Theory of Games and Economic Behavior*).

Autor postuluje konsekwentne stosowanie rachunków, czy opisów modeli bądź zjawisk ekonomicznych w konwencji logarytmów z cen, z jednoczesnym pozostawieniem do dyspozycji amatorom psychologii samego pojęcia funkcji użyteczności (zmodernizowanej wersji majątku moralnego). Postępowanie takie zdaje się mieć racjonalnie uzasadnioną przewagę nad tradycyjnymi ekonomicznymi rachunkami, pozwala także głębiej analizować podstawowe zjawiska rynkowe (zob. np. związek algorytmów gry giełdowej z modelem Isinga w *O logarytmie*, *Penetrator-Wiadomości Gospodarcze*, 12/1995).

Sugerowana technika analizy statystycznej znajduje zastosowanie w szerokiej klasie problemów optymalizacji ubezpieczeń, fragmentowi tych zagadnień poświęcona jest pozostała część rozważań.

3 Optymalizacja ubezpieczeń.

3.1 Sformułowanie zagadnienia.

Rozważmy klasyczny problem ubezpieczenia kapitałowego, które przebiega według następującego schematu:

$$1 + \alpha \quad \xrightarrow{\omega} \quad e^{z(\omega)} + f(\omega)$$

gdzie: z i $f = f(z)$ są zmiennymi losowymi określonymi na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Lewa strona schematu symbolizuje kapitał zaangażowany w ubezpieczenie, w tym α reprezentuje wysokość składki ubezpieczenia przypadającej na jednostkę asekurowanego kapitału. W wyniku zdarzenia ω jednostka kapitału osiąga cenę $e^{z(\omega)}$, a ubezpieczający koryguje ją o kwotę $f(\omega)$.

Przyjmujemy, że $\alpha \geq 0$ (nie rozważamy kredytów), oraz że zysk ubezpieczającego nie jest zmienną losową, a $f(\omega) \geq 0$ – ten typ ubezpieczenia określmy jako <u>*niekłopotliwy*</u>.

Nazwijmy zmienną losową $z(\omega)$ logarytmiczną stopą zysku z kapitału nieubezpieczonego. Oznaczając przez ζ średnią logarytmiczną stopę zysku z ubezpieczonego przedsięwzięcia, otrzymamy:

$$\zeta(f, \gamma) = -\ln(1 + \alpha) + \int_{\omega} \ln\bigl(e^{z(\omega)} + f(\omega)\bigr) P_{d\omega}$$

Dodatkowo zachodzi związek $\alpha = e^{\gamma} \int_{\omega} f(\omega) P_{d\omega}$, gdzie γ oznacza logarytmiczną stopę zysku ubezpieczającego.

Interesująco przedstawia się zagadnienie największych korzyści ubezpieczonego, które jest centralnym problemem ubezpieczającego (?!), bowiem pozwala zmaksymalizować ζ nie zubożając zarazem klienta. Szukamy więc funkcji $f^{\star}(\omega)$ spełniającej warunek:

$$\zeta(f^{\star}, \gamma) = \max_{f} \; \zeta(f, \gamma)$$

oraz najwyższej dopuszczalnej stopy $\gamma^{\star}$, czyli stopy dla której $\zeta(f^{\star}, \gamma^{\star}) = 0$.

3.2 Rozwiązanie.

Asekuracja jest interesująca tylko w obszarze $\zeta(f^\star, 0) > 0$, co określa dziedzinę potencjalnie recjonalnych przedsięwzięć warunkiem $\int_\omega e^{z(\omega)} P_{d\omega} > 1$.

Sposób ubezpieczenia prowadzący do maksymalnej stopy $\zeta(f^\star, \gamma)$ jest następujący:

$$f^\star(\omega) = \max(0, e^{-\gamma}(1 + \alpha^\star) - e^{z(\omega)})$$

gdzie $\alpha^\star = \alpha(f^\star)$. Mimo, że powyższa formuła ma charakter rekurencyjny, nie stanowi ona żadnego problemu obliczeniowego przy ustalaniu stawek $f^\star(\omega)$ w konkretnym przypadku przestrzeni probabilistycznej.

Maksymalna sensowna stopa zysku dana jest wzorem:

$$\gamma^\star = \Big(\int_{f^\star(\omega)\neq 0} P_{d\omega}\Big)^{-1} \int_{f^\star(\omega)=0} \big(z(\omega) - \ln(1 + \alpha^\star)\big) P_{d\omega}$$

3.3 Zagadnienia pokrewne.

Pozostaje do odrębnego przedstawienia cała sfera ubezpieczeń, w których ubezpieczony nie jest nastawiony na zysk (np. emerytury). Interesujące są wtedy analogiczne do przedstawionych formuły minimalizujące średnią logarytmiczną stopę strat ubezpieczonego przy ustalonej stopie zysku γ (efekt, podobnie jak wyżej, jest korzystny dla każdej ze stron ubezpieczenia).

Temat *kłopotliwych* ubezpieczeń pozostaje problemem trudnym, gdyż formalnie dopuszcza zależność $\gamma = \gamma(\omega)$. Można się jednak pokusić o jego rozwiązanie w wersji dotyczącej zagadnień typu *self-insurance*.

Wzory na $f^\star$ określają, w przypadku asekuracji papierów wartościowych, optymalny, jeszcze niepraktykowany typ opcji. W proponowanym rachunku występuje pełna symetria między opcjami kupna, a sprzedaży. Zakup funtów za dolary jest tym samym co sprzedaż dolarów za funty.

Powyższe sformułowanie pozwala rozróżniać sytuacje nierozważnego hazardu ($\zeta(f^\star, 0) < 0$) od działań ryzykownych, które, gdy właściwie asekurowane, generują rozwój gospodarczy ($\zeta(f^\star, 0) > 0$).