Geometria rynku

(RePEc:sla:eakjkl:106PL 20-VIII-1999)

Edward W. Piotrowski
ep@alpha.uwb.edu.pl
Instytut Fizyki Teoretycznej, Uniwersytet w Białymstoku,
Lipowa 41, 15-424 Białystok

1 Portfele i ceny

Rutynową czynnością ekonomistów jest badanie proporcji. W przypadku odnotowywanych zestawów cen, czy wielkości składników majątku, proporcje stanowią podstawową wartość informacyjną. Absolutne miary tracą na swoim znaczeniu, gdy udział we własności staje się dostępny w ułamkowych częściach całości majątku, a powszechna skłonność posiadaczy kapitału do dywersyfikacji ryzyka czyni taką formę własności dominującą. Poniższe opracowanie stara się zwrócić uwagę czytelnika na właściwe miary zjawisk rynkowych, gdy przedmiotem analiz są odpowiednie proporcje występujące pomiędzy różnymi cenami, czy składnikami majątku.

Rynek to miejsce, gdzie dokonuje się nieskrępowana wymiana pieniędzy, towarów, czy usług. Załóżmy, że owe przedmioty zainteresowania kupców tworzą $(N+1)$-wymiarową przestrzeń wektorową G nad ciałem liczb rzeczywistych.

Definicja 1 *Elementy przestrzeni G nazywamy* koszykami.

Wybierzmy w G bazę $\{\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1, \ldots, \mathfrak{g}_N\}$.

Definicja 2 *Element bazy $\mathfrak{g}_k \in G$ nazywamy k-tym* dobrem *rynkowym.*

Dobra pełnią wyróżnioną rolę względem pozostałych koszyków – dzięki nim można sprawnie księgować operacje rynkowe, prowadzić rachunkowość, czy analizować procesy gospodarcze.

Dla dowolnego koszyka $p \in G$ mamy zatem jednoznaczny rozkład na tworzące go dobra

$$p = \sum_{k=0}^{N} p_k \mathfrak{g}_k$$

Liczbę $p_k \in \mathbb{R}$ nazywamy k-tą współrzędną koszyka.

Definicja 3 Portfel *to klasa równoważności koszyków na zbiorze koszyków niepustych (tj. na zbiorze $G \setminus \{0\}$). Dwa koszyki p' i p'' są równoważne, jeżeli istnieje takie $\lambda \in \mathbb{R}$, że $p' = \lambda\ p''$, to znaczy*

$$\sum_{k=0}^{N} p'_k \mathfrak{g}_k = \sum_{k=0}^{N} \lambda\ p''_k \mathfrak{g}_k$$

czyli

$$(p'_0, \ldots, p'_N) = (\lambda p''_0, \ldots, \lambda p''_N)$$

Jeżeli dla ustalonego k zachodzi $p_k \neq 0$, to zawsze można tak dobrać λ, aby w skład koszyka reprezentującego portfel wchodziła jednostka dobra $\mathfrak{g}_k$. Współrzędne portfela p są wtedy równe

$$(p_0, \ldots, p_{k-1}, 1, p_{k+1}, \ldots, p_N)$$

Elementy powyższego ciągu będą w dalszym tekście nazywane współrzędnymi niejednorodnymi portfela p względem k-tego dobra.

Przypadek $p_k = 0$ interpretujemy jako portfel nie podlegający wycenie w jednostkach $\mathfrak{g}_k$, czyli portfel niewłaściwy dla k-tego dobra. Z powyższych rozważań wynika, że współrzędne koszyka dla takiego portfela, względem każdego innego dobra, mają 0 na k-tym miejscu, czyli są następujące

$$(p_0, \ldots, p_{k-1}, 0, p_{k+1}, \ldots, p_N) \quad .$$

Podsumowując, dowolny spośród koszyków zawierających niezerową ilość któregokolwiek z dóbr $\mathfrak{g}_k$ (tzn. koszyk spełniający warunek $p_k \neq 1$) można przeskalować mnożąc jego składniki przez pewien współczynnik λ. W ten sposób otrzymamy współrzędne niejednorodne portfela do którego należy koszyk. Współrzędne takie opisują proporcje poszczególnych dóbr, wchodzących w skład dowolnego koszyka spośród koszyków należących do jednego portfela, względem dobra $\mathfrak{g}_k$.

Definicja 4 Kurs *rynkowy U względem l-tego dobra to dowolne odwzorowanie liniowe $U(\mathfrak{g}_l,\ \cdot\ ) : G \to \mathbb{R}$.*

Odwzorowanie U przyporządkowuje każdemu koszykowi p jego aktualną wartość, wyrażoną w jednostkach dobra $\mathfrak{g}_l$:

$$(Up)_l = U(\mathfrak{g}_l, p) = \sum_{k=0}^{N} U(\mathfrak{g}_l, \mathfrak{g}_k) p_k \tag{1}$$

gdzie $U(\mathfrak{g}_l, \mathfrak{g}_k)$ jest **ceną** jednostki k-tego dobra wyrażoną w jednostkach l-tego dobra. Wartością funkcji U jest zatem l-ta współrzędna koszyka, składającego się jedynie z tak określonej ilości dobra $\mathfrak{g}_l$.

Ponieważ od cen rynkowych wymagamy aby

$$U(\mathfrak{g}_k, U(\mathfrak{g}_l, p)\mathfrak{g}_l)\mathfrak{g}_k = U(\mathfrak{g}_k, p)\mathfrak{g}_k$$

dla dowolnych p oraz $\mathfrak{g}_k$ i $\mathfrak{g}_l$ będących dobrami wzajemnie wymienialnymi (czyli $U(\mathfrak{g}_k, \mathfrak{g}_l) \neq 0$ i $U(\mathfrak{g}_k, \mathfrak{g}_l) \neq \pm\infty$), więc podstawiając $p = \mathfrak{g}_j$ otrzymamy

$$U(\mathfrak{g}_k, \mathfrak{g}_l)U(\mathfrak{g}_l, \mathfrak{g}_j) = U(\mathfrak{g}_k, \mathfrak{g}_j) \tag{2}$$

dla dowolnych k, l, j. Tak więc względne wartości kursowe dóbr posiadają własność przechodniości. Podstawiając w (2) $k = l = j$ otrzymamy dwie możliwości

$$U(\mathfrak{g}_k, \mathfrak{g}_k) = 1 \quad \text{albo} \quad U(\mathfrak{g}_k, \mathfrak{g}_k) = 0$$

Przypadek $U(\mathfrak{g}_k, \mathfrak{g}_k) = 1$ implikuje własność odwzorowania rzutowego dla U, czyli

$$U((Up)_k \mathfrak{g}_k)_k = (Up)_k$$

Natomiast przypadek $U(\mathfrak{g}_k, \mathfrak{g}_k) = 0$ oznacza, że k-te dobro nie funkcjonuje na rynku (można nim jedynie kogoś obdarować).

Wstawiając w (2) $k = j$ dostajemy dla $U(\mathfrak{g}_k, \mathfrak{g}_k) = 1$

$$U(\mathfrak{g}_k, \mathfrak{g}_l) = \big(U(\mathfrak{g}_l, \mathfrak{g}_k)\big)^{-1}$$

Przeprowadzone rozważania pozwalają nam na wprowadzenie macierzy kursu rynkowego. Jest to macierz o rozmiarach $(N+1)\times(N+1)$, której (i, j)-ty element dany jest wzorem $U_{ij} := U(\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j)$. Najprostsza metoda wyznaczenia tej macierzy prowadzi poprzez wskazanie pieniądza. **Pieniądzem** będziemy nazywać arbitralnie wyróżnione dobro, istniejące na rynku. Przyjmijmy, bez utraty ogólności, że dobrem tym jest $\mathfrak{g}_0$. W tym momencie ograniczamy się do rozważenia tych spośród portfeli, które dopuszczają współrzędne jednorodne względem pieniądza. Portfele takie będziemy nazywać **portfelami właściwymi** (lub, bardziej precyzyjnie, portfelami właściwymi względem $\mathfrak{g}_0$). Macierz U_{ij} jest w pełni określona przez znajomość N liczb $u_k := U(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_k)$ dla $k = 1, \ldots, N$. Zauważmy, że $U_{00} = 1$. Własność przechodniości (2) pozwala nam wyznaczyć wszystkie elementy macierzy (U_{ij})

$$U_{ij} = u_i^{-1} u_j \tag{3}$$

Cecha ta tłumaczy potrzebę funkcjonowania pieniądza na rynku, który w sposób naturalny gwarantuje spełnienie przechodniości dla cen względnych, czyli proporcji pomiędzy wymienianymi na rynku towarami.

Rozumowanie powyższe jest poprawne, gdy wszystkie u_i są różne od zera, tzn. gdy wszystkie dobra są wymienialne na pieniądz. W przypadku dobra $\mathfrak{g}_l$ niewymienialnego na $\mathfrak{g}_0$, gdy przestaje obowiązywać prawo przechodniości, zachodzi $U_{0l} = U_{l0} = 0$.

Wzór (1) zależy od liczb u_k w następujący sposób

$$(Up)_l = \sum_{k=0}^{N} u_k p_k u_l^{-1} \tag{4}$$

Dla $u_l = 0$ wzór (3) pozostanie nadal poprawny, jeżeli przyjąć że $u_l^{-1} := 0$.

Reasumując, dla $U_{00} \neq 0$ możemy stwierdzić, że kurs rynkowy jest jednoznacznie określony poprzez zadanie ciągu współrzędnych (tzw. współrzędne niejednorodne kursu U względem pieniądza $\mathfrak{g}_0$)

$$U = (1, u_1, \dots, u_N)$$

Zdarza się, że zachodzi potrzeba wyrażenia cen u_k w jednostkach proporcjonalnych do $\mathfrak{g}_0$, np. gdy $\mathfrak{g}_0$ jest akcją i następuje jej split, po denominacji pieniądza, przy przeliczaniu wartości długu pieniężnego na jego ekwiwalent w postaci konkretnego dobra $\mathfrak{g}_k$ itp. Przeskalowanie ma znaczenie dla U jedynie formalne, jednak z tej przyczyny warto U utożsamiać z dowolnym ciągiem współrzędnych

$$U = (\lambda, \lambda u_1, \dots, \lambda u_N)$$

gdzie $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ jest dowolną stałą. Takie współrzędne nazywamy współrzędnymi jednorodnymi kursu. Można dostrzec pełną analogię między współrzędnymi jednorodnymi kursu, a współrzędnymi koszyka należącego do portfela.

Przypadek $U_{00} = 0$ interpretujemy jako rynek, na którym nie funkcjonuje pieniądz $\mathfrak{g}_0$. Odpowiednie współrzędne kursu będą wtedy równe

$$U = (0, \cdots)$$

gdzie ostatnich N liczb zostaje określonych w sposób analogiczny jak powyżej, lecz już z innym dobrem $\mathfrak{g}_l$ w roli pieniądza.

Definicja 5 *Kurs, którego k-ta współrzędna jest 0, nazywamy* kursem niewłaściwym *dla pieniądza $\mathfrak{g}_k$.*

Uwzględnienie sytuacji niewłaściwych dla danego dobra podyktowane jest potrzebą objęcia dwóch grup procesów obserwowanych z pozycji kursu. Do pierwszej grupy należą n.p. bankructwa spowodowane sytuacją, gdy niechciane dobro przestaje istnieć jako walor rynkowy (nie będąc już nawet zobowiązaniem), nieodwracalnie tracąc wartość. Ceny pozostałych dóbr, wyrażone w proporcji do wartości zniszczeń, „uciekają“ do $\pm\infty$ (odpowiada to $u^{-1} = 0$), a rynek ze swym kursem „przenosi się“ do podprzestrzeni niewłaściwej dla zniszczeń. Określenie *zniszczenia* zostało tu użyte dla nazwania dóbr, które przestały być przedmiotami obrotu rynkowego, bowiem najczęściej sytuacja taka dotyczy zdekapitalizowanych narzędzi, lub przeterminowanych produktów.

Jednak nade wszystko istotna jest druga grupa procesów obejmująca przedsięwzięcia gospodarcze, w wyniku których dobro sumarycznie nic nie warte (gdy zobowiązania równe są aktywom) prowadzi do powstania wartości dodanej, czyli w efekcie do portfela o wartości różnej od zera.

Wariant wszystkich $U_{kk} = 0$ wykluczamy, bowiem byłby to kurs rynku trywialnego, traktującego wszystkie dobra jako niewymienialne.

Definicja 6 Zbilansowanie *portfela p na kursie U to sytuacja, w której istnieje dobro $\mathfrak{g}_k$, w którego jednostkach wartość portfela p, według kursu U, jest równa* 0.

$$(Up)_k = \sum_{l=0}^{N} U(\mathfrak{g}_k, \mathfrak{g}_l)p_l = \sum_{l=0}^{N} u_l p_l u_k^{-1} = 0$$

Gdy dobrem tym jest pieniądz, powyższe równanie przyjmuje postać:

$$\sum_{k=0}^{N} u_k p_k = 0 \tag{5}$$

Równanie to wyraża własność zbilansowanego przy kursie U portfela p, który składa się z takich dóbr p_k, że koszyk złożony z kolejnych dóbr w następujących ilościach $-p_1,\ldots,-p_N$ wart jest, według cen U, jedną jednostkę pieniężną $\mathfrak{g}_0$ (bowiem $p_0 = u_0 = 1$). Przy ustalonym kursie, sparametryzowane współrzędnymi niejednorodnymi, zbilansowane portfele są porównywalne, tzn. zawarty w każdym portfelu właściwym zestaw odpowiednich dóbr wart jest w powyższym sensie jednostkę pieniężną, zaś analogiczny zestaw dóbr $\mathfrak{g}_1,\ldots,\mathfrak{g}_N$ wchodzących w skład każdego portfela niewłaściwego nic nie jest wart dlatego, że dla portfeli niewłaściwych mamy $p_0 = 0$.

Zmiana pieniądza, w którym wyliczamy wartość portfela p, polega na pomnożeniu równania bilansu przez stałą

$$\sum_{l=0}^{N} u_l p_l \mathfrak{g}_0 \longrightarrow \sum_{l=0}^{N} u_l p_l u_k^{-1} \mathfrak{g}_k$$

dlatego własność zbilansowania portfela $(Up)_k = 0$ nie zależy od wyboru dobra $\mathfrak{g}_k$, względem którego kurs wyliczamy, a tym samym od wyboru pieniądza. Zbilansowanie p na U możemy oznaczać pomijając indeks wskazujący dobro $\mathfrak{g}_k$, czyli $Up = 0$.

Dla dowolnych dóbr, jako jednostek, w których są wyrażane wielkości kursów i portfeli, własność ta jest konsekwencją wykazanej poniżej ogólniejszej własności (11). Oznacza ona, że bilans jest niezmiennikiem rzutowym.

Z tych samych powodów, dla ustalonego portfela p, różne kursy rynkowe, na których się bilansuje, są równie atrakcyjne.

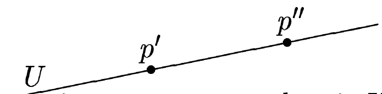
2 Rynek, a geometria rzutowa

Geometra z łatwością zauważy, że przestrzeń wszystkich możliwych portfeli tworzy dobrze znaną rzeczywistą przestrzeń rzutową $\mathbb{RP}^N$. Przystępny opis geometrii rzutowej można znaleźć w książkach [CR98, Hal06], a wiele technicznych szczegółów np. w podręcznikach [VY46, Bor76, Ber77, BK53]. Portfele p są w tej geometrii punktami, a kursy U są obiektami dwoistymi do nich, czyli $(N-1)$-wymiarowymi hiperpłaszczyznami (w najbardziej rozpowszechnionym przez rysowników przypadku $N=2$ są to proste – polskim żeglarzom kurs powinien kojarzyć się z kierunkiem, czyli prostą). Zbilansowanie portfela p na kursie U jest niczym innym, jak własnością należenia punktu do hiperpłaszczyzny (w $\mathbb{RP}^2$ leżenia na prostej). Ten fundamentalny związek pomiędzy portfelem a kursem nie powinien być obcy ekonomistom, przywykłym do koncepcji podwójnego księgowania (bilans prowadzi do wyniku 0) i doceniającym od pięciuset lat jej zasadność. Jeden ze współtwórców podwójnej księgowości, Fra Luca Pacioli, był jednocześnie dla Leonarda da Vinci mistrzem, zaznajamiającym go z tajnikami perspektywy zbieżnej (czyli dzisiejszej geometrii rzutowej), zob. [Ber97]. To nie artyści Renesansu wymyślili odmienny sposób oglądania przedmiotów, nauczyli ich tego renesansowi księgowi. Powyższe domniemanie, dla wielu kontrowersyjne, tłumaczy niemożność wcześniejszego odkrycia perspektywy, której przyczyną był brak jakichkolwiek metod algebraicznych, potrzebnych do wyliczania proporcji, por. [Par88]. Dlatego całkiem prawdopodobną jest hipoteza, że już

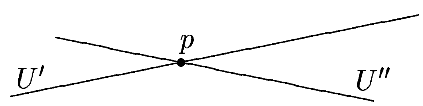
Luca Pacioli mógł postrzegać rynek w sposób bardzo podobny do prezentowanego w niniejszej pracy. W czasie ostatnich stuleci rysownik przeobraził się w inżyniera, projektującego precyzyjne rysunki techniczne, zawierające zdumiewająco wiele ilościowych informacji. Może już wkrótce, w dziedzinie inżynierii finansowej, będzie można dostrzec podobnie rozwijające się umiejętności.

Podsumujmy rynkowe określenia podstawowych pojęć geometrii rzutowej $\mathbb{RP}^N$, zestawiając je w tabeli.

	rynek	*geometria rzutowa*
p	*portfel*	*punkt*
U	*kurs*	*hiperpłaszczyzna*
$Up = 0$	*kurs bilansuje portfel*	*hiperpłaszczyzna zawiera punkt*

Konfiguracja 

obrazuje dwa różne portfele p' i p'', bilansujące się na tym samym kursie U, zaś zamieszczona poniżej konfiguracja przedstawia jeden portfel p bilansujący się na dwóch różnych kursach U' i U''. Rysunki te są do siebie dwoiste. Zajmującym byłoby odszukiwanie dwoistych odpowiedników dla bardziej skomplikowanych konfiguracji. Regułami rachunkowymi i interpretacjami sytuacji rynkowych, związanych z takimi parami, rządzą w istocie te same prawa. Aby je dostrzec, należy zagadnienia finansowe przeformułować na język geometrii rzutowej.



Wyróżnioną rolę pieniądza (czyli dobra którym określamy wartość pozostałych dóbr) może pełnić nie tylko któreś z pozostałych dóbr $\mathfrak{g}_k$, lecz także dowolny niezbilansowany koszyk. Zmiana jednostki pieniężnej jest w $\mathbb{RP}^N$ transformacją rzutową. Opis prawidłowości rynkowych nie powinien zależeć od wyboru jednostek pomiarowych. Te spostrzeżenie wymusza przestrzeganie następującej zasady.

Zasada symetrii rynku 1 *Wnioski z każdego logicznie spójnego modelu dotyczącego rynku są niezmiennikami względem przekształceń rzutowych.*

Twierdzenia Desargues'a, Pappusa, czy Pascala okazują się prawami opisującymi losy naszych pieniędzy, czy zatem powinniśmy je traktować jako intelektualne igraszki, dalekie od problemów gospodarczej rzeczywistości?

3 Przekształcenia rzutowe przestrzeni współrzędnych portfela

Na początku pierwszego paragrafu wybraliśmy w przestrzeni G pewną bazę. Zbadajmy jakie konsekwencje pociąga za sobą jej zmiana. Ustalmy dwie bazy, pierwszą z nich oznaczmy $\mathfrak{g}^{(1)} = \{\mathfrak{g}_0^{(1)}, \ldots, \mathfrak{g}_N^{(1)}\}$, drugą $\mathfrak{g}^{(2)} = \{\mathfrak{g}_0^{(2)}, \ldots, \mathfrak{g}_N^{(2)}\}$. Współczynniki A_{ij}, które są współrzędnymi dobra $\mathfrak{g}_i^{(2)}$

$$\mathfrak{g}_i^{(2)} = \sum_j A_{ij} \mathfrak{g}_j^{(1)}$$

w bazie $\mathfrak{g}^{(1)}$, tworzą macierz przejścia A z bazy $\mathfrak{g}^{(1)}$ do bazy $\mathfrak{g}^{(2)}$. Ze względu na zasadność przejścia odwrotnego, od bazy $\mathfrak{g}^{(2)}$ do bazy $\mathfrak{g}^{(1)}$, macierz A posiada własność odwracalności, czyli $\det A \neq 0$.

Wymagamy, by zmiana bazy nie miała wpływu na materialną zawartość koszyka, czyli

$$p = \sum p_k^{(1)} \mathfrak{g}_k^{(1)} = \sum p_k^{(2)} \mathfrak{g}_k^{(2)}$$

dla wszystkich koszyków p. Warunek ten pociąga za sobą następujący wzór na transformację współrzędnych dowolnego koszyka, przy zamianie bazy.

$$p_i^{(2)} = \sum_j p_j^{(1)} A_{ji}^{-1} \tag{6}$$

gdzie A^{-1} oznacza macierz odwrotną do macierzy A.

Własność (2) kursu powoduje, że $U(\mathfrak{g}_i^{(1)}, p)\ U(p, \mathfrak{g}_i^{(1)}) = 1$ dla dowolnego niezbilansowanego portfela p, zatem dla $p = \mathfrak{g}_j^{(2)}$ otrzymamy

$$U(\mathfrak{g}_j^{(2)}, \mathfrak{g}_i^{(1)}) = \Big(\sum_k A_{jk} U(\mathfrak{g}_i^{(1)}, \mathfrak{g}_k^{(1)})\Big)^{-1}$$

Z ostatniej równości wynika, że

$$U(\mathfrak{g}_j^{(2)}, \mathfrak{g}_l^{(2)}) = \sum_i A_{li} U(\mathfrak{g}_j^{(2)}, \mathfrak{g}_i^{(1)}) = \sum_i \frac{A_{li}}{\sum_k A_{jk} \big(u_i^{(1)}\big)^{-1} u_k^{(1)}} = \frac{\sum_i A_{li} u_i^{(1)}}{\sum_k A_{jk} u_k^{(1)}}$$

Powyższa zależność określa związek cen dóbr bazowych w bazie $\mathfrak{g}^{(2)}$ z cenami dóbr bazowych w bazie $\mathfrak{g}^{(1)}$.

$$u_l^{(2)} = U(\mathfrak{g}_0^{(2)}, \mathfrak{g}_l^{(2)}) = \frac{\sum_i A_{li} u_i^{(1)}}{\sum_k A_{0k} u_k^{(1)}}$$

co we współrzędnych jednorodnych równoważne jest następującej zależności.

$$u_l^{(2)} = \sum_j A_{lj} u_j^{(1)} \tag{7}$$

Pomiędzy różnymi bazami odniesienia kursy rynkowe transformują się tak, jak dobra bazowe, a portfele odwrotnie do nich.

4 Współrzędne kursu

Potraktujmy ciąg $(u_0, \ldots, u_N)$ jako współrzędne Plückera, zob. [Bor76], hiperpłaszczyzny określonej równaniem (5). Portfele p, spełniające równanie (5), można sparametryzować ciągiem liczb f_k

$$p(f) = \overset{\bullet}{\sum_k} f_k u_k^{-1} \mathfrak{g}_k + \overset{\circ}{\sum_l} f_l \mathfrak{g}_l \tag{8}$$

gdzie sumowanie z symbolem $\bullet$ przebiega po indeksach k, dla których $u_k \neq 0$, a sumowanie z symbolem $\circ$ po pozostałych l, dla których $u_l = 0$.

W geometrii hiperpłaszczyzna $p(f)$ nazywana jest **złączem** punktów $u_k^{-1}\mathfrak{g}_k$ dla $u_k \neq 0$ i punktów $\mathfrak{g}_l$ dla $u_l = 0$, zob. [Bor76].

Ponieważ portfel, leżący w parametryzowanej hiperpłaszczyźnie, bilansuje się, więc

$$Up(f) = (Up(f))_0 = \overset{\bullet}{\sum_k} f_k u_k^{-1} u_k = \overset{\bullet}{\sum_k} f_k = 0$$

czyli punkty hiperpłaszczyzny kursu można opisać liczbami f_k przy pomocy parametryzacji (8), przy czym współrzędne f_k spełniają warunek

$$\overset{\bullet}{\sum_k} f_k = 0 \tag{9}$$

gdzie wszystkie f_k nie mogą jednocześnie być równe 0 ($p(f)$ nie byłby wtedy portfelem).

Dowolny zbilansowany portfel, należący do złącza $p(f)$, przedstawiony jak wyżej, przy pomocy współrzędnych jednorodnych f_k, bądź niejednorodnych f_γ, nazwiemy **portfelem współzmienniczym** z kursem U. Znaczenie portfeli współzmienniczych polega na tym, że jedynie na nich potrafimy w sposób poprawny mierzyć zyski, w sposób opisany niżej.

We współrzędnych niejednorodnych, w których $f_0 = -1$, pozostałe współrzędne f_γ, dla $\gamma \neq 0$ spełniają warunek $\sum_\gamma^\bullet f_\gamma = 1$, dlatego portfel współzmienniczy jest **rozkładem jedynki**. Gdy ograniczymy się do części hiperpłaszczyzny, gdzie dla wszystkich f_k, dla których $u_k \neq 0$, zachodzi $f_k \geq 0$, $p(f)$ jest **złączem wypukłym**. W przypadku portfeli i kursów niewłaściwych dla dobra $\mathfrak{g}_0$, portfele współzmiennicze można tworzyć zgodnie z powyższą definicją, odrzucając dobro $\mathfrak{g}_0$ i wybierając jako pieniądz inne stosowne dobro ze zbioru dóbr bazowych $\mathfrak{g}$.

W dalszym tekście bieżącego paragrafu założymy, że kurs jest właściwy dla wszystkich dóbr (czyli każde u_k jest różne od 0). Dla punktów niewłaściwych można przeprowadzić analogiczne rozważania w odpowiednich przestrzeniach rzutowych o mniejszym wymiarze.

Wielkość $f_i u_i^{-1}$ będąc współrzędną portfela, transformuje się przy zmianie bazy zgodnie z regułą (6), czyli

$$f_i^{(2)} = u_i^{(2)} \sum_j f_j^{(1)} \big(u_j^{(1)}\big)^{-1} A_{ji}^{-1}$$

więc

$$f_i^{(2)} = \sum_{jk} f_j^{(1)} \big(u_j^{(1)}\big)^{-1} A_{ji}^{-1} A_{ik} u_k^{(1)} \tag{10}$$

zatem

$$\sum_i f_i^{(2)} = \sum_{jk} f_j^{(1)} \big(u_j^{(1)}\big)^{-1} I_{jk} u_k^{(1)} = \sum_i f_i^{(1)} \tag{11}$$

gdzie I jest macierzą jednostkową.
W szczególności własność rozkładu jedynki $\sum f_k = 0$ nie zależy od wyboru bazy, czyli jest niezmiennikiem rzutowym.

Jeżeli rozważyć zmianę kursu jako transformację *alias*, czyli polegającą nie na przejściu do nowej hiperpłaszczyzny kursowej, lecz na zmianie układu współrzędnych opisujących kurs, to taką zmianę opisuje macierz diagonalna o elementach $A_{ii} = u_i''(u_i')^{-1}$, co wynika ze wzoru (7). W tej sytuacji wzór (10) upraszcza się do postaci

$$f_i'' = \big(u_i'\big)^{-1} A_{ii}^{-1} A_{ii} u_i' f_i' = f_i'$$

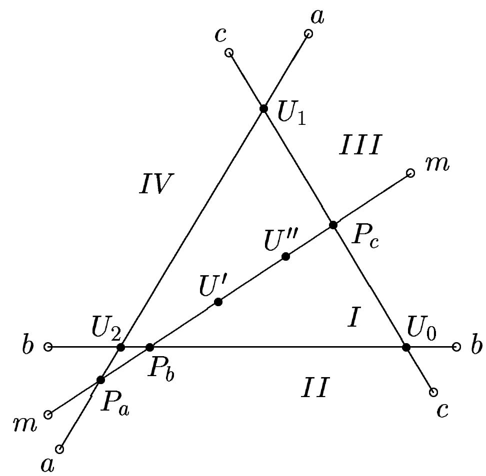
Diagonalna transformacja współrzędnych, jaką jest zmiana kursu, zachowuje wartości współrzędnych f_k. Dopiero ta własność portfela współzmienniczego (a nie tylko zbilansowanie na dowolnym kursie) umożliwia wyznaczenie zysku (bądź straty) wynikającego ze zmiany kursu.

5 Dwustosunek. Odległość dwóch kursów

Nieznanym obszarem zagadnień wartym zbadania są problemy rynkowe dotyczące kursów i portfeli, rozważane w kontekście wszystkich dotyczących ich przekształceń rzutowych. Niczym wolna od jakichkolwiek jednostek geometria rynku, badana w duchu von Staudta, zyska stosowne zainteresowanie, warto skupić uwagę na przestrzeniach o mniejszej symetrii, budując w ramach geometrii rzutowej metryczne modele rynku.

Niezmiennikiem odwzorowań rzutowych jest dwustosunek czterech punktów leżących na prostej [VY46, BK53]. Z uwagi na niezmienniczość, wielkość ta powinna spełniać kluczową rolę w opisie rynku. Wszystkie popularne indeksy rynkowe (giełdowe) odnoszą swoje wartości do konkretnych dóbr (najczęściej waluty). W momentach krytycznych taki relatywizm może zakłócać identyfikację wielu charakterystycznych sytuacji rynkowych.

Zbadajmy, co mierzy dwustosunek odnoszący się do zmiennych w swej naturze kursów rynkowych. Dwa różne kursy U' i U'' wyznaczają prostą rzutową. Na prostej należy wskazać jeszcze dwa charakterystyczne punkty, by móc wyliczyć dwustosunek czwórki punktów. Wydaje się być naturalnym posłużenie się w tym celu hiperpłaszczyznami kursów niewłaściwych dla poszczególnych dóbr bazowych $\mathfrak{g}_k$. Rozcinają one zbiór kursów właściwych dla dóbr bazowych $(\mathfrak{g}_k)$ w $\mathbb{RP}^N$ na 2^N sympleksów N wymiarowych. W analogiczny sposób rozpadają się hiperpłaszczyzny kursów niewłaściwych, rekurencja ta dotyczy wszystkich wyodrębnionych hiperprzestrzeni niewłaściwych, o wymiarze mniejszym od N. Załóżmy, że dwa rozważane kursy wyznaczające prostą należą do tego samego sympleksu – tylko kursy o tej własności będą znajdować się w skończonej odległości. Dla wszystkich k współrzędne u'_k i u''_k kursów należących do jednego sympleksu są jednocześnie dodatnie, bądź jednocześnie ujemne. Każda hiperpłaszczyzna kursów niewłaściwych dla dobra $\mathfrak{g}_k$ przecina naszą prostą. Punktów przecięć jest $N + 1$, ale tylko dwa z nich, oznaczone P_b i P_c, leżą w bezpośrednim sąsiedztwie punktów U' i U'' i tylko one należą do brzegu sympleksu zawierającego U' i U''. Z przedstawionych powodów punkty P_b i P_c najlepiej nadają się do wyznaczenia dwustosunku. Sytuację dla $N = 2$ ilustruje poniższy rysunek, przedstawiający przestrzeń $\mathbb{RP}^2$. Trzy, poza centralnie położonym, sympleksy (w $\mathbb{RP}^2$ są to trójkąty) można posklejać, łącząc na rysunku odpowiednie punkty skrajne (w nieskończoności). Utożsamienie to zostało zaznaczone w punktach a, b, c i m, oznaczonych niewypełnionymi kółeczkami. Sympleksy kursów właściwych dla dóbr bazowych $\mathfrak{g}$ oznaczono liczbami rzymskimi I, II, III i IV. Punkty U_0, U_1 i U_2 mają współrzędne jednorodne odpowiednio $(\lambda, 0, 0)$, $(0, \lambda, 0)$ i $(0, 0, \lambda)$. Litery a, b i c mogą także symbolizować hiperpłaszczyzny kursów niewłaściwych dla dóbr odpowiednio: $\mathfrak{g}_0$, $\mathfrak{g}_1$ i $\mathfrak{g}_2$, a m może oznaczać prostą wyznaczoną przez kursy U' i U''.



Prosta ta przecina hiperpłaszczyzny a, b i c w punktach P_a P_b i P_c, lecz punkt P_a nie znajduje się w bezpośrednim sąsiedztwie punktów U' i U''. Oznaczmy szukany dwustosunek przez $[P_b, U', U'', P_c]$, wtedy odległość kursów $d(U', U'')$ będzie równa

$$d(U', U'') = \ln([P_b, U', U'', P_c]) = \ln \frac{|U'P_c||U''P_b|}{|U'P_b||U''P_c|} \tag{12}$$

gdzie $|P_1P_2|$ oznacza euklidesową odległość punktów P_1 i P_2, a ln jest standardowym oznaczeniem dla logarytmu naturalnego. W ogólności, zamiast liczby Eulera e możemy przyjąć dla funkcji logarytmicznej dowolną podstawę. Zmodyfikowane do innej podstawy logarytmu odległości będą się różnić od wyjściowych jedynie stałą multiplikatywną, jednakową dla dowolnej pary kursów U' i U''.

Współrzędne punktów na prostej m mają postać $\lambda(u''_k - u'_k) + u'_k$ gdzie dla λ równego 0 i 1 otrzymamy odpowiednio punkty U' i U''. Punkt prostej m należy do podprzestrzeni kursów niewłaściwych, gdy przynajmniej jedna współrzędna kursu jest zerem: $\prod_k \Big(\lambda(u''_k - u'_k) + u'_k\Big) = 0$. Punkt P_b otrzymamy dla λ takiego, przy którym zeruje się k-ta współrzędna i jednocześnie liczba $-\frac{1}{\lambda}$ jest największa z możliwych. Punkt P_c, analogicznie, dla λ takiego, przy którym zeruje się l-ta współrzędna i jednocześnie liczba $\frac{1}{1-\lambda}$ jest najmniejsza. Oznacza to, że punkt P_b jest wyznaczony przez parametr

$$\frac{1}{\lambda_{P_b}} = 1 - \max_k\left(\frac{u''_k}{u'_k}\right) \quad ,$$

a punkt P_c przez parametr

$$\frac{1}{\lambda_{P_c}} = 1 - \min_k\left(\frac{u''_k}{u'_k}\right) \quad .$$

Potrzebne do obliczenia dwustosunku odległości euklidesowe są równe:

$$|U'P_c| = \lambda_{P_c} \quad , \quad |U''P_c| = \lambda_{P_c} - 1 \quad ,$$

$$|U'P_b| = -\lambda_{P_b} \quad , \quad |U''P_b| = 1 - \lambda_{P_b} \quad ,$$

Oznaczając $r_k(U', U'') := \ln\left(\frac{u''_k}{u'_k}\right)$ i spostrzegając że, ze względu na monotoniczność funkcji logarytmicznej, można przestawić ją z operacją max, bądź min, wzór (12) na odległość U' i U'' można przekształcić do następującej postaci

$$\begin{aligned} d(U', U'') &= \ln\Big(\max_k\big(\frac{u''_k}{u'_k}\big)\Big) - \ln\Big(\min_k\big(\frac{u''_k}{u'_k}\big)\Big) = \\ &= \max_k\big(r_k(U', U'')\big) - \min_k\big(r_k(U', U'')\big) = \\ &= \max_k\big(r_k(U', U'')\big) + \max_k\big(r_k(U'', U')\big) \end{aligned} \tag{13}$$

Funkcja $r_k(U', U'')$ jest znaną w finansach przedziałową stopą procentową [KP99] wzrostu wartości dobra $\mathfrak{g}_k$, wyznaczonego względem dobra $\mathfrak{g}_0$.

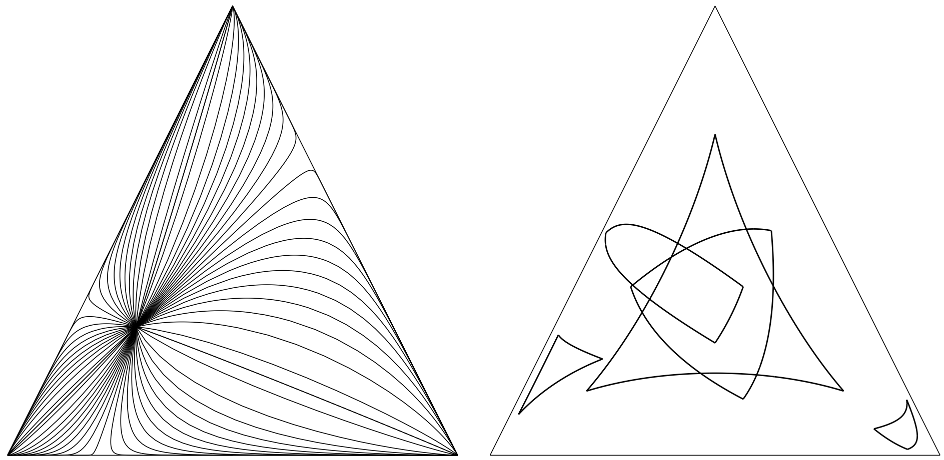
Metryka $d(U', U'')$ ma przejrzystą interpretację – jest to rozpiętość stóp zysków, wynikających ze zmiany kursu. Przesuwający się w $\mathbb{R}P^N$, wraz z upływem czasu punkt (czyli kurs rynkowy) wyznacza w tej przestrzeni krzywą–trajektorię. Długość wycinka tej trajektorii jest stopą zysku ze zrównoważonego koszyka jasnowidza, posiadającego wszystkie aktywa kapitałowe ulokowane zawsze w tym dobrze, które najbardziej zwyżkuje na wartości, a pasywa przeciwnie – w dobrze najszybciej taniejącym. Zysk jasnowidza wyznaczony jest w odniesieniu do koszyka skrajnego pechowca, będącego podmiotem rynkowym, mającym swoje aktywa w dobrze, w którym jasnowidz lokuje pasywa i *vice versa*. Koszyki jasnowidza i pechowca należą do tego samego portfela w $\mathbb{R}P^N$. Uwzględnienie kosztów operacyjnych związanych z przepływem kapitału prowadzi do zastosowania popularnego w fizyce statystycznej modelu Isinga, zob. [Pio95]. Odległość kursów jest energią łańcucha spinowego występującego w tym modelu. Opis metryk, odpowiadających dowolnym graczom działającym na rynku, pozbawionym nierealistycznej wiedzy jasnowidza, osiąga się w sposób dla fizyka standardowy – przez wyznaczenie energii spinów w niezerowych temperaturach. Pojawiająca się tu temperatura (a raczej wielkość termodynamicznie z nią sprzężona, czyli entropia) określa stopień dezinformacji odnośnie rynku, jaki cechuje wyznaczającego odległości pomiędzy notowaniami kursu. Pełna niewiedza (nieskończona temperatura) prowadzi do degeneracji metryki, to jest sytuacji, gdy odległość dowolnych dwóch punktów, należących do wnętrza sympleksu, maleje do zera. Podobnie jak w fizyce, temperatura rynkowa nigdy nie przyjmuje wartości ujemnych. Dla rynku jest to konsekwencją rzutowych własności kursu (jasnowidz i pechowiec są ujęci jednym portfelem). „Temperaturowy“ sposób określania odległości pomiędzy różnymi kursami bierze pod uwagę, prócz współrzędnych doznających najbardziej skrajnych zmian, także przyczynki od wolniej zmieniających się cen względnych. Oznacza to wzięcie pod uwagę następnych przecięć wyznaczonej przez parę kursów prostej z hiperpłaszczyznami kursów niewłaściwych. Szerszy opis rodziny zależnych od temperatury metryk rynkowych jest przygotowywany przez autora.

Powracając do metryki dwustosunku warto zauważyć, że dla rynku dwóch dóbr ($N{=}2$) odległość kursów, wyznaczona za pomocą formuły (13), jest równa przedziałowej stopie procentowej wzrostu kursu wymiany dobra zyskującego na atrakcyjności, względem dobra, dla którego proporcja wymiany rynkowej staje się mniej korzystna. Taką odległość kursów od dawna mierzą finansiści, czego dowodem jest popularność obrazowania notowań za pomocą wykresów logarytmicznych.

Dla wygody załóżmy, że odległość dwóch punktów należących do różnych sympleksów ma sens, lecz jest nieskończona. Brzeg sympleksu, w którym odległości pomiędzy kursami są skończone, w literaturze nazywany jest *absolutem*, opisana wyżej metryczna geometria kursów należy do tzw. geometrii Hilberta [Ber77, BK53].

Geodezyjnymi nazywamy linie, wzdłuż których pomiar odległości pomiędzy ustalonymi punktami, przy pomocy metryki $d(U',U'')$, daje najmniejszą wartość. Znajomość ich kształtów pozwala analizować własności metryczne przestrzeni.

Lewy rysunek przedstawia pęk linii geodezyjnych, w $\mathbb{RP}^2$ z metryką $d(U',U'')$, wychodzących z punktu o współrzędnych $(1,2,4)$. Na prawym rysunku umieszczono kilka linii geodezyjnych, zgrupowanych w trójkąty. Pobieżne obserwacje prowadzą do hipotezy że, w zależności od usytuowania trójkąta, odstępstwo od geometrii Euklidesa, wyznaczone defektem sumy kątów trójkąta względem euklidesowych 180°, jest dodatnie, bądź ujemne.



Wymaga to jednak przeprowadzenia stosownych rachunków.

Zmiany kursów dają się modelować za pomocą ruchów Browna (tzn. ruchów całkowicie chaotycznych, nie wyróżniających żadnego kierunku przestrzennego i niezależnych od kształtu przebytej już drogi) w przestrzeni $\mathbb{RP}^N$, zaopatrzonej w metrykę $d(U', U'')$. Abstrahowanie od struktury metrycznej przestrzeni kursów (czy portfeli) *de facto* uniemożliwia prowadzenie konsystentnego opisu ewolucji parametrów rynkowych i prowadzi do wyników zależnych od zawsze subiektywnego wyboru jednostkowych dóbr bazowych $\{\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1, \ldots, \mathfrak{g}_N\}$.

Ze względu na techniczne zaawansowanie i rozległość zagadnienia dyfuzji na rozmaitościach nieriemannowskich, autor planuje odnieść się do sygnalizowanych problemów w poświęconym tylko temu zagadnieniu opracowaniu.

Do zdefiniowania odległości między kursami można wykorzystać metrykę, charakteryzującą geometrię Barbiliana (np. w klasie metryk hiperbolicznych analogonem modelu Kleina, należącego do rodziny geometrii Hilberta, jest w geometriach Barbiliana model Poincarégo), zob. [Kel81]. Ten temat także zostanie przedstawiony w odrębnym tekście.

Powyższe rozważania dotyczące odległości kursów przenoszą się na opis metrycznych własności portfeli, dzięki obowiązującej w geometrii rzutowej zasadzie dwoistości [VY46].

Autor przygotowuje opracowanie dotyczące metrycznych własności portfeli, dla których absolutem są hiperpłaszczyzny dwóch wyróżnionych kursów. W przypadku $N=1$ model taki jest równoważny dwuwymiarowemu wariantowi szczególnej teorii względności, zob. rozdz.3 §25 w [Pau21]. Grupa symetrii przestrzeni wektorowej dóbr, zachowująca strukturę metryczną przestrzeni portfeli, jest wtedy dobrze znaną fizykom–relatywistom grupą Lorenza. Ze względu na rozległość sygnalizowanego tematu dalsze intrygujące koneksje pomiędzy fizyką, a geometrią rzutową rynku, oraz wyjaśnienie ekonomiczne wniosków wypływających z przyjętego modelu rynku będą ujęte w nowym opracowaniu.

Każda konstrukcja metryki $d(U', U'')$ pozwoli mierzyć jedynie zmiany zachodzące na rynku, bez odniesienia się do wyceny wartości konkretnego portfela. Przejdźmy więc do zagadnienia pomiaru wpływu zmian kursowych na osiągane zyski.

6 Stopa zysku z portfela

We wnętrzu jednego z sympleksów zmianę kursu można postrzegać nie jak transformację *alias*, lecz jak transformację *alibi*, gdy nie zmieniamy współrzędnych, a portfel współzmienniczy odnajdujemy w innym miejscu, na nowej hiperpłaszczyźnie kursu. Transformacja *alibi* w opisach ekonomicznych jest konwencją dominującą – powszechnie dostrzegamy zmiany kursów walut, czy zaskakujące ruchy cenowe pewnych towarów, czy usług. Stronimy zwykle od dualnego (i równoważnego!) spojrzenia ujmującego dobra w konwencji *alias*, gdy mimo pozornego braku zmian ilości składników w opisywanym przez nas koszyku (bowiem jego dysponent nie wykonał żadnego przegrupowania kapitałowego) proporcje pomiędzy komponentami koszyka się zmieniają, bo jednostki dóbr są już inne np. z przyczyny uwzględnienia dyskonta, inflacji, zmian cenowych, czy innych czynników. Dlatego poniższy rachunek prowadzony jest w konwencji *alibi*.

Rozważmy jeden z portfeli należących do $p(f)$, z ustalonymi parametrami f_k dla współrzędnych $p_k = f_k u_k^{-1}$, przy dwóch różnych kursach U i $U + dU$. Gdyby wagi p_k portfela współzmienniczego pozostawić niezmienione to, zgodnie ze wzorem (4), wartość portfela na kursie $U + dU$, w jednostkach $\mathfrak{g}_0$, wyniosłaby

$$\sum_k f_k u_k^{-1}(u_k + du_k) \tag{14}$$

Powstałą różnicę między ilością pieniądza w portfelu, a wartością pozostałych składników, należy zniwelować (wykonując stosowne transakcje rynkowe) tak, aby mógł się on na powrót stać zbilansowanym przy kursie $U+dU$. Zysk z portfela, w postaci (14), przy infinitezymalnie małej zmianie kursu

dU, wynosi

$$\sum_k f_k u_k^{-1}(u_k + du_k) = \sum_k f_k d(\ln|u_k|)$$

co wynika z warunku (9) i faktu, że różniczka logarytmu wartości bezwzględnej równa jest $d(\ln|u|) = u^{-1}du$.

Całkowity zysk na portfelu $p(f)|_{f=const.}$, pomiędzy kursem początkowym U', a końcowym U'', obydwoma należącymi do tego samego sympleksu, będzie sumą (całką) wszystkich infinitezymalnych zysków, osiągniętych przy przejściu od U' do U''.

$$\int_{U'}^{U''} \sum_k f_k d(\ln|u_k|) = \sum_k f_k \big(\ln|u_k''| - \ln|u_k'|\big) = \sum_k f_k \ln \frac{u_k''}{u_k'}$$

Powyższa wielkość, choć mierzy zmianę wartości portfela względem $\mathfrak{g}_0$, nie zależy od wyboru pieniądza. Jeżeli na dobra, względem których mierzyć zysk, wybierzemy (zamiast $\mathfrak{g}_0$) dowolne portfele: p' (nie bilansujący się na U') i p'' (nie bilansujący się na U''), zysk na zmianie kursu wyniesie

$$r_f(U', U'') := \sum_k f_k \ln \frac{U''(p'', \mathfrak{g}_k)}{U'(p', \mathfrak{g}_k)} = \sum_k f_k r_k(U', U'') \qquad (15)$$

Funkcja $r_f(U', U'')$ posiada własność addytywności

$$r_f(U', U) + r_f(U, U'') = r_f(U', U'')$$

oraz równie ważną własność niezależności od wyboru portfeli p' i p'', w relacji do których zysk jest określany, bowiem

$$\begin{aligned}\sum_k f_k \ln \frac{U''(p'', \mathfrak{g}_k)}{U'(p', \mathfrak{g}_k)} &= \sum_k f_k \Big(\ln \frac{U''(p'', q'')}{U'(p', q')} + \ln \frac{U''(q'', \mathfrak{g}_k)}{U'(q', \mathfrak{g}_k)}\Big) = \\ &= \sum_k f_k \ln \frac{U''(q'', \mathfrak{g}_k)}{U'(q', \mathfrak{g}_k)}\end{aligned}$$

co zachodzi na skutek zbilansowania portfela współzmienniczego.
Zdaniem autora, wynik ten obrazuje podstawową zaletę stosowania podwójnej księgowości. Ostatnią własność jest własnością *jednorodności* zerowego stopnia funkcji zysku względem współrzędnych kursu:

$$r_f(\lambda U, U') = r_f(U, U')$$

dla $\lambda \neq 0$. Z tej przyczyny, po prawej stronie definicji (15) brak jest argumentów p' i p'', wskazujących na niezbilansowane portfele, względem których zysk jest mierzony – są one dowolne.

Funkcja $r_f(U, U')$ jest przedziałową stopą procentową zbilansowanego portfela, zapisaną w postaci niezmienniczej. Ponieważ współrzędne f_k są współrzędnymi jednorodnymi, określonymi z dokładnością do stałego mnożnika, porównywanie zysku z różnych portfeli współzmienniczych (zależnego od tej stałej) powinno się odbywać w tym samym niejednorodnym układzie współrzędnych.

7 Dynamika rynku

Z upływem czasu rynek ciągle koryguje swój kurs (kursy), a ewolucja tych zmian jest głównym przedmiotem zainteresowania ekonomistów. Na zmieniające się kursy można spojrzeć jak na ciągły potok, polegający na „przechodzeniu" w czasie rynku z jednej hiperpłaszczyzny (kursu) w $\mathbb{R}\mathrm{P}^N$ na drugą, bądź dwoiście, jak na ciągłą krzywą w $\mathbb{R}\mathrm{P}^N$, Warto znaleźć stosowny portfel, który obrazowałby ową dwoistość, posiadając jednocześnie użyteczną interpretację finansową.

W literaturze spotykamy portfele, które nie zawsze się bilansują, bowiem raz ustalonego składu dóbr nie koryguje się już potem z upływem czasu (więc można je zbilansować najczęściej tylko w jednej chwili czasu). Na skutek ewolucji kursów proporcje wartości składników portfela często się zmieniają, a określanie wartości takiego syntetycznego dobra jest bardzo subiektywne, bowiem zależy od wyboru miernika tej wartości (czyli pieniądza). Ten sam kapitał mierzony jedną walutą może być coraz droższy, a drugą coraz tańszy. Zdarza się, że ów mechanizm prowadzi do kłopotliwych paradoksów, gdy logicznie spójna prognoza przewiduje wzrost kursu waluty A względem waluty B i jednocześnie wzrost kursu waluty B względem waluty A, patrz [Pio97].

Zaprezentowane ujęcie opisu rynku koncentruje się na specyficznym rodzaju portfeli, których badanie jest pozbawione wspomnianych irracjonalnych paradoksów, umożliwiając przy tym opracowywanie różnych rodzajów zagadnień [Pio97]. Pozwala na to współzmienniczość wielkości dóbr portfela wraz ze zmianą kursu rynkowego, co nie wyróżnia żadnych szczególnych kursów, np. w chwilach tworzenia, modyfikacji, czy sprzedaży całego portfela. Wszystko to dzięki temu, że portfel współzmienniczy bilansuje się na dowolnym kursie rynkowym. Przy tym, jako obiekt dwoisty do bieżącego kursu, znakomicie (bo wiernie) obrazuje zmieniającą się sytuację rynkową.

Znając bieżący kurs rynkowy U, konstruujemy *portfel współzmienniczy z kursem* (należący do hiperpłaszczyzny kursu) $p(f, t)$, zgodny z parametryzacją (8),

$$p(f,t) := \sum_k f_k u_k(t)^{-1}\mathfrak{g}_k \quad ,$$

gdzie dla arbitralnie określonej chwili t_0 wyznaczamy współrzędne f_k korzystając z zależności $f_k = u_k(t_0)p_k(f,t_0)$.

Potok hiperpłaszczyzn w $\mathbb{R}\mathrm{P}^N$, będący zbiorem trajektorii ewolucji czasowej portfeli współzmienniczych, opisuje wszystkie ilościowe konsekwencje zmian kursów.

Podczas zmiany kursu w czasie przedziałową stopę zysku z portfela współzmienniczego określa formuła (15).

Bibliografia

[Ber77] M. Berger, *Géométrie*, CEDIC, Paris, 1977.

[Ber97] P. L. Bernstein, *Przeciw bogom. Niezwykłe dzieje ryzyka*, WIG-Press, Warszawa, 1997.

[BK53] H. Busemann and P. J. Kelly, *Projective Geometry and Projective Metrics*, Academic Press, New York, 1953.

[Bor76] K. Borsuk, *Geometria analityczna wielowymiarowa*, PWN, Warszawa, 1976.

[CR98] R. Courant and H. Robins, *Co to jest matematyka?*, Prószyński i S-ka, Warszawa, 1998.

[Hal06] G. B. Halsted, *Synthetic Projective Geometry*, John Wiley & Sons, New York, 1906.

[Kel81] P. Kelly, *Non-Euclidean Hyperbolic Plane*, Springer-Verlag, New York, 1981.

[KP99] A. Karpio and E. W. Piotrowski, *Chwilowa stopa procentowa*, Przegląd Statystyczny **46** (1999), 67–78.

[Par88] K. H. Parshall, *The Art of Algebra from Al-Khwarizmi to Viéte: A Study in the Natural Selection of Ideas*, History of Science **72** (1988), 129–164.

[Pau21] W. Pauli, *Relativitätstheorie*, Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, V19 (Leipzig), B.G.Teuber, 1921.

[Pio95] E. W. Piotrowski, *O logarytmie*, Penetrator – Wiadomości Gospodarcze **12** (1995), 34–36.

[Pio97] E. W. Piotrowski, *Paradoks równowagi cen, a optymalna asekuracja kapitału*, Instrumenty pochodne (Kraków), Universitas, 1997.

[VY46] O. Veblen and J. W. Young, *Projective Geometry*, Blaisdell, New York, 1946.