NATĘŻENIE ZYSKU – MODEL RACJONALNEGO KUPCA

(RePEc:sla:eakjkl:107PL 1-X-1998)

EDWARD W. PIOTROWSKI

Psychoanalyse ist die Krankheit,
für deren Therapie sie sich hält.
Karl Kraus

1. Uwagi wstępne

Podstawowym celem świadomej działalności gospodarczej jest optymalizacja zysku w określonym przedziale czasowym. Najczęściej przedział ów jest tak dobierany, by obejmował sobą pewien charakterystyczny cykl gospodarowania (np. rok, czas wykonania kontraktu, okres ubezpieczenia). Prognozowanie przedsięwzięcia na szerszych odcinkach czasowych jest możliwe dzięki ekstrapolacji cyklu na całą oś czasową.

Problem rachunkowego opisu jest szczególnie trudny, gdy czas trwania kolejnych cykli jest zmienną losową (oznaczaną dalej przez τ). Zysk na cyklu, czyli funkcja od τ, będąc zmienną losową, przestaje bezpośrednio mierzyć jakość gospodarowania. W celu badania zjawisk różniących się czasem trwania, warto zdefiniować, podobnie jak w teorii kolejek (zob. [1]), *natężenie zysku*, będące odpowiednią miarą tej kategorii ekonomicznej.

Definicja zysku będzie posiadać pożądane własności jedynie wówczas, gdy przyjęta w definicji funkcja spełni warunek addytywności, zob. [2]. Dlatego mierzenie zysku *przedziałową stopą procentową* [3] wydaje się metodą prowadzącą do spójnych rezultatów.

2. Natężenie zysku – definicje

Niech chwila t będzie początkiem trwania cyklu o długości τ. Oznaczmy wartość przedsięwzięcia na początku i na końcu cyklu odpowiednio przez v_t i $v_{t+\tau}$. Wtedy przedziałowa stopa procentowa jest zdefiniowana następująco:

$$r_{t,t+\tau} := \ln\left(\frac{v_{t+\tau}}{v_t}\right) \ .$$

Oznaczmy wartość oczekiwaną dowolnej zmiennej losowej ξ w jednym cyklu przez $\langle\xi\rangle$.

Gdy $\langle r_{t,t+\tau}\rangle$ i $\langle\tau\rangle$ mają skończone wartości, definiujemy natężenie zysku ρ na jednym cyklu jako iloraz

$$\rho_t := \frac{\langle r_{t,t+\tau}\rangle}{\langle\tau\rangle} \quad . \tag{1}$$

Oczekiwany przedziałowy zysk, na dowolnym odcinku czasu (np. $[0,T]$), wynosi

$$\rho_{0,T} := \int_0^T \rho_t dt \quad . \tag{2}$$

Wcześniej zdefiniowane natężenie zysku ρ_t okazuje się być analogonem chwilowej stopy procentowej (patrz [3]), występującej w zagadnieniach opisywanych deterministycznie, czyli takich, w których charakterystyczne odcinki czasu nie są zmiennymi losowymi. Warto by więc i tamtą chwilową stopę konsekwentnie nazywać natężeniem zysku.

Związki pomiędzy powszechnie stosowanymi miernikami zysku a natężeniem zysku można, poprzez przedziałową stopę procentową, odtworzyć bez trudu przy pomocy formuł podanych w cytowanym artykule [3].

Proponowana definicja natężenia zysku jest wygodnym punktem startowym do analizowania niżej opisanego modelu działania kupca, z którego wynikające wnioski są same w sobie intrygujące, a przy tym niepozbawione praktycznego uzasadnienia.

3. Model racjonalnego kupca (RDM)

Załóżmy możliwie najprostszą sytuację rynkową, w której analizujemy rynek jedynie dwóch towarów, z których jeden nazwiemy dobrem (i oznaczymy symbolem $\mathfrak{G}$), a drugi walutą (\$). Modelowany cykl składa się z racjonalnego (w sensie wyjaśnionym niżej) zakupu dobra $\mathfrak{G}$ i w pełni przypadkowej jego sprzedaży (czyli zamiany na \$).

Przyjmijmy, że wielkości $V_{\mathfrak{G}}$ i $V_{\$}$ oznaczają pewne ustalone porcje dobra i waluty. Jeżeli na rynku w chwili t dochodzi do wymiany towarów w proporcji $V_{\$} : V_{\mathfrak{G}}$, to liczbę

$$p_t := \ln(V_{\$}) - \ln(V_{\mathfrak{G}})$$

będziemy nazywać logarytmicznym kursem towaru $\mathfrak{G}$. Gdy kupiec w chwili t_1 nabędzie porcję dobra $\mathfrak{G}$ po kursie p_{t_1}, które w późniejszej chwili t_2 sprzeda po kursie p_{t_2}, to jego przedziałowa stopa zysku w takim cyklu wyniesie

$$r_{t_1,t_2} = p_{t_2} - p_{t_1} \quad .$$

W modelu RDM (*rational dealer model*) racjonalność zakupu polega na przyjęciu przez kupującego ustalonej ceny rezygnacji $-a$, patrz [4], czyli takiego logarytmicznego kursu $-a$ na dobro $\mathfrak{G}$, powyżej którego kupiec zaniecha nabycia dobra $\mathfrak{G}$. Kursy można wyznaczyć na podstawie znajomości spektrum cen na $\mathfrak{G}$, spektrum zastanego przez kupca na klasycznym rynku, bądź ustalonego w wyniku kolejnych licytacji angielskich, czy przetargów Vickrey'a, zob. [7]. Przypadkową sprzedaż można postrzegać jako transakcję zbycia dobra $\mathfrak{G}$ przez kupca, w sytuacji, gdy jego cena rezygnacji z $\mathfrak{G}$ jest równa $-\infty$ (bo zawsze wygrywa z pozostałymi uczestnikami przetargu).

Załóżmy, że formułowany model opisuje sytuację stacjonarną, to znaczy, że rozkład prawdopodobieństwa dla zmiennej losowej p_t, opisującej kurs dobra $\mathfrak{G}$, nie zależy od czasu. Dla czytelności opisu przyjmujemy, że rozkład ten jest rozkładem normalnym:

$$\eta(p,\sigma) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(p-\langle p\rangle)^2}{2\sigma^2}} \quad .$$

Uzasadnienie założenia takiej symetrii rozkładu dla logarytmicznej stopy zysku można znaleźć w pracy [5].

Nie tracąc nic z ogólności założeń, wystarczy wyznaczać logarytmiczny kurs wymiany z dokładnością do dowolnej stałej, gdyż znaczenie posiadają dopiero zyski, które zawsze są różnicami kursów. Sytuacja przypomina posługiwanie się potencjałem w fizyce klasycznej, gdy mierzalne są jedynie różnice potencjału. Zatem przyjmijmy, że przeciętna wartość kursu $\langle p\rangle$ jest równa 0.

Ograniczmy dalszą analizę do operacji na takim rynku wymiany towarów $\mathfrak{G}$ i $\$$, na którym rozważany kupiec działa wśród liczby podmiotów na tyle dużej, że jego indywidualne decyzje nie wpływają na notowania kursu.

Niech symbol $[zdanie]$, patrz konwencja Iversona w [6], będzie funkcją równą 1 w przypadku gdy $zdanie$ jest prawdziwe, a 0 gdy tak nie jest.

Średni czas przypadkowej transakcji (zakupu, bądź sprzedaży, co zależy jedynie od punktu widzenia) oznaczymy przez θ. Wielkość ta jest w modelu stała (jako konsekwencja stacjonarności) i większa od zera ($\theta = 0$ implikuje irracjonalne paradoksy w postaci np. nieskończonych zysków w skończonym przedziale czasowym).

Dla rachunkowej wygody oznaczmy przez x prawdopodobieństwo niedojścia racjonalnego zakupu do skutku, czyli

$$x := \langle [p > -a] \rangle_\sigma \quad ,$$

gdzie σ parametryzuje rozkład prawdopodobieństwa.

Oczekiwany czas racjonalnego zakupu $\mathfrak{G}$ będzie wtedy równy

$$\theta \cdot \Big((1-x) + 2x(1-x) + 3x^2(1-x) + 4x^3(1-x) + \cdots \Big) \quad ,$$

więc iloraz oczekiwanego czasu pełnego cyklu kupna–sprzedaży, do średniego czasu przypadkowej transakcji, wyniesie

$$\frac{\langle\tau\rangle_\sigma}{\theta} = 1 + (1-x)\sum_{k=1}^{\infty} k\cdot x^{k-1} = 1 + (1-x)\frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{\infty} x^k \tag{3}$$

$$= 1 + (1-x)\,\frac{d}{dx}\,\frac{1}{1-x} = 1 + \frac{1}{1-x}\ . \tag{4}$$

Dlatego czas trwania cyklu wyraża się wzorem:

$$\langle\tau\rangle_\sigma = (1 \ + \ \langle[p \le -a]\rangle_\sigma^{-1})\cdot\theta\ . \tag{5}$$

Przedziałowa stopa zysku na całym cyklu będzie równa

$$r_{t,t+\tau} \ = \ -p_{\rightarrow\mathfrak{G}} \ + \ p_{\mathfrak{G}\rightarrow}\ , \tag{6}$$

gdzie zmienna losowa $p_{\rightarrow\mathfrak{G}}$, oznaczająca kurs $\mathfrak{G}$ w trakcie zakupu, ma rozkład normalny ucięty do dziedziny $(-\infty, -a]$, to znaczy posiada gęstość prawdopodobieństwa w postaci

$$\frac{[p\le -a]}{\langle[p\le -a]\rangle_\sigma}\cdot\eta(p,\sigma)\ , \tag{7}$$

a $p_{\mathfrak{G}\rightarrow}$, czyli kurs $\mathfrak{G}$ obowiązujący w momencie sprzedaży, ma rozkład normalny, bo sprzedaż jest, z woli kupca, całkowicie przypadkowa.

Wstawiając (7) do uśrednionego (6), a następnie (5) i uśrednione (6) do (1), otrzymamy poniższe wyrażenie dla natężenia zysku na pełnym cyklu:

$$\rho_t \ = \ \frac{-\langle p\cdot[p\le -a]\rangle_\sigma}{1+\langle[p\le -a]\rangle_\sigma}\cdot\theta^{-1}\ . \tag{8}$$

Oczekiwany zysk na charakterystycznym interwale czasowym, jakim jest przeciętny okres trwania transakcji kupna-sprzedaży, wynosi

$$\rho(a,\sigma) := \rho_{0,\theta} = \frac{-\int\limits_{-\infty}^{-a} p\cdot\eta(p,\sigma)dp}{1+\int\limits_{-\infty}^{-a}\eta(p,\sigma)dp}\ , \tag{9}$$

co wynika ze wstawienia wyrażenia (8) na ρ_t do definicji (2). Wyprowadzona formuła (9) na oczekiwany zysk spełnia własność skalowania:

$$\rho(\sigma a,\sigma) = \sigma\cdot\rho(a)\ ,$$

gdzie $\rho(a) := \rho(a,1)$, więc wystarczy analizę kontynuować dla standaryzowanego rozkładu normalnego, by przez przeskalowanie otrzymać wyniki we wszystkich przypadkach z $\sigma \neq 1$.

Najlepszy algorytm działania dla kupca (maksymalizujący oczekiwany zysk) otrzymamy (w przypadku standardowego rozkładu normalnego) dla $a = 0,27603$.

Co ciekawe, największy średni zysk wynosi także $0,27603$. Okazuje się, że ta zbieżność jest nieprzypadkowa i dotyczy dowolnego typu rozkładów charakteryzujących zachowanie logarytmicznego kursu. Poniżej wykazane zostanie, dlaczego własność owa zachodzi, więc dla dalszych rozważań przyjmijmy, że $\eta(p)$ jest jakimkolwiek rozkładem gęstości, ciągłym na całej dziedzinie.

4. Unikalna własność kupieckiego zysku

Oznaczmy punkt stały odwzorowania $f(x)$ przez $x^\star$, czyli $x^\star$ jest takim argumentem funkcji $f(x)$, że zachodzi $f(x^\star) = x^\star$.

Uzyskane w ramach modelu RDM wyrażenie na oczekiwaną wartość zysku spełnia następującą własność:

Twierdzenie. *Maksimum funkcji $\rho(a)$ znajduje się w jej punkcie stałym,*

$$\max_a \rho(a) = a^\star \quad .$$

Punkt stały funkcji $\rho(a)$ istnieje, ma wartość dodatnią i jest tylko jeden. Własności te są spełnione dla dowolnego typu rozkładu gęstości kursu.

Dowód. Warunek na punkt stały:

$$\frac{-\int\limits_{-\infty}^{-a} p \cdot \eta(p) dp}{1 + \int\limits_{-\infty}^{-a} \eta(p) dp} = a$$

można przekształcić do postaci

$$a \cdot \left(1 + \int_{-\infty}^{-a} \eta(p) dp\right) = -\int_{-\infty}^{-a} (p + a) \cdot \eta(p) dp \; + \int_{-\infty}^{-a} a \cdot \eta(p) dp \quad . \tag{10}$$

Wartość a równa jest więc pierwszemu wyrażeniu prawej strony (10), czyli (po zamianie zmiennej całkowania) wynosi

$$a = -\int_{-\infty}^{0} p \cdot \eta(p - a) dp \quad . \tag{11}$$

Pochodna prawej strony (11) (czyli pierwszego wyrażenia prawej strony (10)) po a równa jest

$$-\int_{-\infty}^{-a} \eta(p)dp \ \ ,$$

więc prawa strona (11) jest ciągłą, nierosnącą funkcją a, dla $a\!=\!0$ większą od zera, w granicy $a\!\to\!\infty$ równą zeru.
Dlatego warunek (11) ma jedno rozwiązanie, które jest dodatnie.

Wystarczy jeszcze zauważyć, że warunek znikania pierwszej pochodnej funkcji $\rho(a)$:

$$a\cdot\eta(a)\cdot\left(1+\int_{-\infty}^{-a}\eta(p)dp\right)\ +\ \eta(a)\cdot\int_{-\infty}^{-a}p\cdot\eta(p)dp\ =\ 0 \tag{12}$$

jest jednocześnie warunkiem na jej punkt stały. Ten ekstremalny punkt jest globalnym maksimum, bo spełnia równania (11) i (12). Ewentualne rozwiązania równania (12), w postaci $\eta=0$ (gdy $a\neq a^\star$), są lokalizacjami miejsc przegięcia funkcji $\rho(a)$ (bo na całej dziedzinie $\eta\geq 0$, więc w otoczeniu punktu, gdzie $\eta(a)=0$, pochodna funkcji $\rho(a)$ nie zmienia znaku), czyli możemy je zignorować.

Słuszność przedstawionego dowodu nie zależy od postaci rozkładu gęstości kursu, gdyż korzysta się jedynie z nieujemności i unormowania gęstości prawdopodobieństwa. Założenie o gaussowskim kształcie rozkładu jest zbędnym ograniczeniem. $\square$

Warto zaznaczyć, że warunek (11) przejrzyście obrazuje, czym jest największy możliwy zysk do osiągnięcia.

Znikanie pochodnej funkcji $\rho(a)$ w jej punkcie stałym jest gwarancją stabilności funkcji w otoczeniu tego punktu, zob. [8]. Należałoby jeszcze zbadać granice obszaru przyciągania. Okazuje się, że punkt stały przyciąga na całej dziedzinie $\rho(a)$. Dowód tego wyniku, który polega na wykazaniu, że funkcja $\rho(a)$ jest ograniczona pewnym odwzorowaniem zwężającym, zostanie przedstawiony w odrębnym opracowaniu.

Rozkłady prawdopodobieństw dla kursu kupna i kursu sprzedaży mogą mieć różną postać (gdy odpowiednie transakcje odbywają się na odmiennych rynkach), konieczny jest jedynie warunek, by logarytmiczny kurs kupna dobra $\mathfrak{G}$ formalnie skorygować o stałą tak, żeby 0 kursu pokrywało się z wartością oczekiwaną logarytmicznego kursu sprzedaży $\mathfrak{G}$.

5. ZAKOŃCZENIE

Gdyby przeanalizować model analogiczny do RDM, lecz taki, w którym strategia, przyjęta przez kupca w trakcie kupna, byłaby zamieniona z jego

strategią sprzedaży i *vice versa*, to z „przestawionego" modelu wynikałyby wnioski symetryczne do rezultatów przedstawionych w bieżącej pracy.
Formuła (9), opisująca oczekiwany zysk, uległaby modyfikacji do postaci

$$\rho(b) = \frac{\int\limits_b^\infty p \cdot \eta(p) dp}{1 + \int\limits_b^\infty \eta(p) dp} \; ,$$

gdzie b oznacza kurs, poniżej którego kupiec zawsze rezygnuje ze sprzedaży dobra $\mathfrak{G}$.
Taka zmiana nie wnosi nic istotnie nowego ponad cechy symetryczne do modelu RDM, może z wyjątkiem „kosmetycznego" uproszczenia wzoru, podającego metodę generowania funkcji posiadających maksimum w punkcie stałym.

Zastanawiające jest, że optymalne zachowanie kupca, działającego w ramach modelu, polega na wyznaczeniu ceny rezygnacji o tyle niższej od średniego kursu $\mathfrak{G}$, by różniła się dokładnie o jego przeciętny zysk, przypadający na średni okres trwania transakcji kupna–sprzedaży. Jeśli mu się to uda, wtedy niczego nie powinien już w swojej działalności poprawiać, bowiem osiągnął stan najkorzystniejszy z możliwych, niezagrożony destabilizacją, więc wymagający jedynie drobnych korekt.

Najlepszą strategią okazuje się być prosta i naturalna zasada, polegająca na samouzgadniającym się korygowaniu ceny rezygnacji. Istnienie takiego rodzaju mechanizmu jest pożądanym zjawiskiem na dynamicznych rynkach,
gdzie rozkłady gęstości kursów podlegają nieustannym zmianom. W modelach ze skończonymi cenami rezygnacji zarówno dla transakcji kupna jak i sprzedaży powyższa prosta recepta przestaje być optymalną (wyniki badań takich sytuacji autor zaprezentuje w odrębnym artykule).
Czy jest to wskazówką, aby unikać owych dwustronnych technik handlowania?
A może jedynym tego typu spójnym logicznie modelem jest RDM w wersji z przypadkowym zakupem, bowiem nasuwa się podejrzenie, że rozkład gąstości kursu można poprawnie zdefiniować tylko relatywnie, względem mającej potem nastąpić sprzedaży. Określenia *sprzedaż* i *kupno* też są jedynie konwencją, gdyż sprzedając $\mathfrak{G}$ nabywamy \$. Nowe wyniki mogą rozwiać pojawiające się wątpliwości.

Idee poszukiwania optymalnych rozwiązań i punktów stałych, to fundamenty współczesnego paradygmatu ekonomiki matematycznej. Splatają się one w takich klasycznych wynikach, jak uogólnione twierdzenie Brouwera

[9], czy procedura iteracyjna Browna–Robinson [10]. Przedstawiony model działania kupca RDM także łaczy w sobie obydwie koncepcje.

BIBLIOGRAFIA

[1] R. Billingsley, *Prawdopodobieństwo i miara*, PWN, Warszawa, 1987.
[2] E.W. Piotrowski, Penetrator–Wiadomości Gospodarcze 12(1995)34-36.
[3] A. Karpio, E.W. Piotrowski, *Chwilowa stopa procentowa*, Przegląd Statystyczny, w druku.
[4] E.W. Piotrowski, *Podział kapitału, czyli o cenie rezygnacji i sile pieniądza*, Optimum, w druku.
[5] E.W. Piotrowski, *Instrumenty pochodne*, 233-236, Universitas, Kraków, 1997.
[6] R.L. Graham, D.E. Knuth, O. Patashnik, *Matematyka konkretna*, PWN, Warszawa, 1996.
[7] *A Survey of Auctions*, Agorics Inc., 1996, http://www.agorics.com/new.html/ .
[8] H.G. Schuster, *Chaos deterministyczny*, PWN, Warszawa, 1995.
[9] S. Kakutani, Duke Mathematical Journal 8(1941)457-458.
[10] J. Robinson, Annals of Mathematics 54(1951)296-301.

Streszczenie: Autor proponuje definicję stopy zysku stosowaną dla przedsięwzięć, których czas wykonania jest zmienną losową. Przedstawione twierdzenie o punkcie stałym dla algorytmu zachowania kupca pozwala maksymalizować zyski niezależnie od spektrum cen rynkowych.

INSTYTUT FIZYKI, UNIWERSYTET W BIAŁYMSTOKU, LIPOWA 41, 15–424 BIAŁYSTOK
E-mail address: ep@alpha.uwb.edu.pl