MACIERZOWA STOPA ZWROTU

(RePEc:sla:eakjkl:109PL 1-XII-1998)

EDWARD W. PIOTROWSKI

Doszliśmy do rozwiązania, ale nie było ono
wzięte pod uwagę przez kartel, który wolał
eksperymentować, ruszając ceny w górę
i w dół. Kosztowało go to milion
i nie dało wyniku.
Hugo Steinhaus, [1]

1. Wstęp.

Celem inwestycji kapitałowych jest maksymalizacja zysku. Zamiaru tego nie sposób osiągnąć przeznaczając cały kapitał na najbardziej rentowne przedsięwzięcia – takie sytuacje się nie zdarzają. Przyszła rentowność inwestycji rynkowej jest wielkością niepewną, dlatego inwestor tworzy złożone koszyki, zawierające lokaty kapitałowe o możliwie odmiennym charakterze, działaniem swoim dywersyfikując ryzyko przedsięwzięcia. Opis ewolucji takiego wielowymiarowego kapitału staje się pożądany dla charakterystyki ilościowych zależności dotyczących procesów inwestycyjnych, szczególnie tych, które wymykają się pojęciom tradycyjnej matematyki finansowej [2]. W zależności od punktu widzenia, w każdym koszyku kapitałowym możemy, prócz ilościowych zmian poszczególnych składników, dostrzec przepływy między jego komponentami, zob. niżej przykład 2. Przepływy kapitału mogą być rejestrowane nawet wtedy, gdy nie zapada żadna decyzja o operacjach kapitałowych. Sytuacje takie, wymagające opisu macierzowego, stawiają nas przed koniecznością uogólnienia rachunku stóp procentowych w sposób pozwalający jednolicie traktować stopy wzrostu i stopy przepływu kapitału. Autor pragnie przedstawić konsystentną i możliwie różnorodną postać formalizmu wyposażonego w kontekst finansowy. Rachunek ten, od dawna z powodzeniem stosowany w innych dyscyplinach, wydaje się być stosownym narzędziem, prowadzącym do poszerzenia całej dziedziny matematyki finansowej na koszyki dóbr dowolnego typu. Może algebra liniowa, będąca językiem sformułowań wielu modeli ekonomicznych, zostanie zaakceptowana w roli rachunku przydatnego w konstrukcji elementarnych wskaźników rentowności przedsięwzięć inwestycyjnych.

2. Liniowe jednorodne procesy kapitałowe.

Przykład 1. Rozważmy kapitał bankiera składający się z dwóch komponent: k_1 – kwoty pożyczonej klientowi i k_2 – pozostałych aktywów. Niech argument l, będący liczbą całkowitą $l \in \mathbb{Z}$, numeruje np. upływające lata (choć nic nie stoi na przeszkodzie, by były to dowolne interwały czasowe, niekoniecznie tej samej długości). Proces zmiany kapitału bankiera, dotyczący każdej z kwot k_1 i k_2, przedstawia się następująco.

ad $k_1(l)$**:** Zgodnie ze stopą oprocentowania $\alpha_1(l)$, na jaką bankier udzielił kredytu, wzrost składnika $k_1(l)$ wynosi $\alpha_1(l)k_1(l)$. Poza tym kwota niezwróconej części kredytu $k_1(l)$ maleje o wielkość raty spłaty $\beta(l)k_1(l)$, której wysokość określa stopa $\beta(l)$.

ad $k_2(l)$**:** Kapitał $k_2(l)$ powiększa się o kwotę $\beta(l)k_1(l)$ spłaty kredytu. Dodatkowo, będąc ulokowany np. w płynnych papierach wartościowych o rocznej stopie zwrotu $\alpha_2(l)$, wzrasta on o kwotę $\alpha_2(l)k_2(l)$.

Składniki kapitału bankiera tworzą koszyk $\mathbf{k}(l) := (k_1(l), k_2(l))$. Jest on elementem dwuwymiarowej rzeczywistej przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}^2$. Układ równań opisujących ewolucję takiego koszyka ma postać:

$$\begin{array}{rcl} k_1(l+1) & = & (1+\alpha_1(l)-\beta(l))\,k_1(l) \\ k_2(l+1) & = & \beta(l)\,k_1(l) \quad + \quad (1+\alpha_2(l))\,k_2(l) \end{array} \tag{2.1}$$

Ujemne wartości składowych koszyka $k_i(l)$, $i = 1, 2$, interpretujemy jako zobowiązania bankiera.

Uwaga. Inne niż liniowe względem pozostałego długu raty spłaty, czy formalnie tożsame im należności (np. koszty obsługi kredytu, podatki itp.) daje się przedstawić w postaci spłaty liniowej po odpowiednim zmodyfikowaniu czynnika $\beta(l)$, bowiem może on ulegać zmianom wraz z upływem czasu l. W szczególności różne zobowiązania kredytobiorcy względem bankiera mogą zostać ujęte za pomocą wyrażenia będącego w zmiennej proporcji do wysokości niespłaconego kredytu, co czyni bardzo szerokim zakres stosowalności takiego opisu. Dopisane do prawych stron równań wyrażenia niejednorodne mogą zostać wyeliminowane poprzez pomnożenie ich przez utworzoną w tym celu nową składową koszyka k_3, z definicji niezależną od czasu l.

Procent, a przykład 1. Opisany w przykładzie 1 proces ewolucji kapitałowej można przedstawić tak, by wszelkie zmiany składowych koszyka wyrażone były jedynie jako zmiany procentowe tychże składowych, czyli jako autonomiczne wzrosty poszczególnych składników. Dla przejrzystości sytuacji załóżmy chwilowo, że w trakcie procesu wszystkie stopy $\alpha_1(l) = \alpha_1$, $\alpha_2(l) = \alpha_2$ i $\beta(l) = \beta$ z upływem czasu nie ulegają zmianom oraz, że stopy wzrostów są różne, $\alpha_1 \neq \alpha_2$. Koszyk kapitałowy, jako element przestrzeni wektorowej, może być opisywany jako kombinacja liniowa innych koszyków [3]. W przestrzeni wektorowej koszyków wybierzmy więc nową bazę tak, aby ten sam kapitał bankiera wyrażał się teraz następującymi składnikami.

$k'_1(l)$: Jest to, jak w poprzedniej bazie, kwota pożyczona klientowi, czyli
$$k'_1(l) = k_1(l)$$

$k'_2(l)$: Kwota ta jest sumą kwot koszyka składającego się po części z kwoty pożyczonej klientowi oraz po części z pozostałych aktywów bankiera, przy czym na każde β części pożyczki przypada $\alpha_2 - \alpha_1 + \beta$ części pozostałych aktywów bankiera, czyli
$$k'_2(l) = \beta\, k_1(l) + (\alpha_2 - \alpha_1 + \beta)\, k_2(l)$$

W nowym układzie współrzędnych równania (2.1) opisujące zmiany koszyka separują się, przybierając następującą postać
$$\begin{aligned} k'_1(l+1) &= (1 + \alpha_1 - \beta)\, k'_1(l) \\ k'_2(l+1) &= (1 + \alpha_2)\, k'_2(l) \end{aligned}$$

Nie obserwujemy już żadnych przepływów, a składniki koszyka rosną teraz zgodnie ze stopami procentowymi $\alpha_1 - \beta$ (dla pierwszej składowej) i α_2 (dla drugiej). Formalizm matematyki finansowej nie powinien zależeć od specyfiki wyboru bazy opisu koszyków kapitałowych. Niżej przedstawione definicje stóp macierzowych wydają się jedynym podejściem rachunkowym spełniającym ten postulat.

Uogólnienie przykładu 1. Procesy kapitałowe, których dotyczy przykład 1, opisują jednorodne układy różnicowych równań liniowych, w notacji macierzowej posiadające postać:

$$\mathbf{k}(l+1) - \mathbf{k}(l) = \underline{\mathbf{R}}(l)\, \mathbf{k}(l) \quad \text{czyli} \quad \mathbf{k}(l+1) = (\mathbf{I} + \underline{\mathbf{R}}(l))\, \mathbf{k}(l) \tag{2.2}$$

gdzie $\mathbf{k}(l) \in \mathbb{R}^M$, zaś $\underline{\mathbf{R}}(l)$ oraz $\mathbf{I}$ są macierzami rzeczywistymi o wymiarach $M{\times}M$ ($\mathbf{I}$ jest macierzą jednostkową). Zgodnie z przyjętym standardem, zob. np. [4], przestrzeń $\mathbb{R}^M$ wszystkich możliwych koszyków nazywać będziemy *przestrzenią fazową*, a jednorodny liniowy układ równań różniczkowych, bądź różnicowych, pierwszego rzędu (np. w postaci (2.2)) *równaniem ruchu koszyka.*

W przedstawionym przykładzie $M = 2$, a macierz $\underline{\mathbf{R}}(l)$ jest następująca:

$$\underline{\mathbf{R}}(l) = \begin{pmatrix} \alpha_1(l) - \beta(l) & 0 \\ \beta(l) & \alpha_2(l) \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

Jeżeli przyjmiemy, że śledzimy ewolucję koszyka od chwili p, to ustalając warunek początkowy $\mathbf{k}(p)$ otrzymujemy następujące rozwiązanie równania ruchu (2.2):

$$\mathbf{k}(r) = \left(\mathcal{T} \prod_{s=p}^{r-1} (\mathbf{I} + \underline{\mathbf{R}}(s)) \right) \mathbf{k}(p) \tag{2.4}$$

Operator $\mathcal{T}$ (zob. [5]) we wzorze (2.4) chronologicznie porządkuje wszystkie macierze po jego prawej stronie (tak, aby te z argumentami późniejszymi znajdowały się na lewo macierzy o argumentach wcześniejszych), czyli

$$\mathcal{T} \prod_{s=p}^{p+n} \mathbf{A}(s) = \mathbf{A}(p+n)\, \mathbf{A}(p+(n-1)) \, \ldots \, \mathbf{A}(p+1)\, \mathbf{A}(p)$$

dla dowolnego ciągu macierzy $\mathbf{A}(s)$.

Macierz $\mathcal{T} \prod_{s=p}^{r-1} (\mathbf{I} + \underline{\mathbf{R}}(s))$, bardziej szczegółowo niż iloraz $\frac{\sum_{i=1}^{M} k_i(r)}{\sum_{i=1}^{M} k_i(p)}$, informuje o zmianie kapitału koszyka. Nawiązując, tu i w dalszym tekście, do nazewnictwa dla wariantu $M = 1$ opisanego w [6], macierz $\underline{\mathbf{R}}(l)$ z równania ruchu (2.2) określimy mianem *macierzowej kredytowej stopy zwrotu*, bądź *macierzowej stopy dolnej*. Przymiotnik *„dolna"* odnosi się do sposobu wyznaczania przyrostów wektora $\mathbf{k}(l)$. Zmiany te ujmowane są jako wartość odwzorowania liniowego na wektorze koszyka $\mathbf{k}(l)$ w chwili l poprzedzającej tą zmianę. Możliwość stosowania standardowego rachunku stóp procentowych w przypadku przykładu 1 zależała od sposobu opisu koszyka (wyboru bazy). Dlatego naturalnym rozwiązaniem jest traktowanie stopy wzrostu jako obiektu złożonego $\underline{\mathbf{R}}(s)$, przy zmianie układu odniesienia stosownie transformującego się według znanych prawideł. Z uwagi na procesy kapitałowe przebiegające w wielowymiarowej przestrzeni fazowej określenie „stopa kredytowa" wydaje się autorowi mniej dezinformujące niż określenie „stopa procentowa".

Rozważmy procesy, dla których macierz $\mathbf{I} + \underline{\mathbf{R}}(l)$ jest nieosobliwa. Wtedy, wprowadzając pojęcie *macierzowej dyskontowej stopy zwrotu*, bądź *macierzowej stopy górn*ej $\overline{\mathbf{R}}(l)$, równanie ruchu (2.2) można przeformułować do następującej postaci:

$$\mathbf{k}(l+1) - \mathbf{k}(l) = \overline{\mathbf{R}}(l)\,\mathbf{k}(l+1) \tag{2.5}$$

Porównując wzory (2.2) i (2.5) otrzymamy związek pomiędzy obydwoma typami wprowadzonych stóp macierzowych:

$$(\mathbf{I} + \underline{\mathbf{R}}(l))\,(\mathbf{I} - \overline{\mathbf{R}}(l)) \;= (\mathbf{I} - \overline{\mathbf{R}}(l))\,(\mathbf{I} + \underline{\mathbf{R}}(l)) \;= \mathbf{I} \tag{2.6}$$

Rozwiązując powyższe równanie ze względu na np. $\underline{\mathbf{R}}(l)$, otrzymamy następujący wzór:

$$\underline{\mathbf{R}}(l) = \overline{\mathbf{R}}(l) + \overline{\mathbf{R}}^2(l) + \overline{\mathbf{R}}^3(l) + \ldots \tag{2.7}$$

Łatwo teraz dostrzec, że (dla ustalonego argumentu l) stopy macierzowe są przemienne, tzn. $\underline{\mathbf{R}}(l)\overline{\mathbf{R}}(l) = \overline{\mathbf{R}}(l)\underline{\mathbf{R}}(l)$. Zależność (2.7) pomiędzy stopami jest często interpretowana jako uwzględnienie stopy dyskontowej w przyroście kapitału poprzez dodawanie wszystkich odsetek od odsetek (ciąg geometryczny) w konwencji kapitalizacji z góry, zob. np. [2]. Odpowiedni do (2.7) wzór na $\overline{\mathbf{R}}(l)$ będzie podobny, różniąc się jedynie znakami „$-$" przy parzystych potęgach stóp z lewej strony równości (2.7), bowiem

$$-\overline{\mathbf{R}}(l) = (-\underline{\mathbf{R}}(l)) + (-\underline{\mathbf{R}}(l))^2 + (-\underline{\mathbf{R}}(l))^3 + \ldots$$

Gdy dokonamy formalnej zmiany kierunku upływu czasu, stopy kredytowa i dyskontowa, zmieniając znaki, zamienią się rolami, co w konsekwencji skutkuje symetriami zachodzącymi pomiędzy formułami zawierającymi te macierze. Aby każdy z już wypisanych wzorów posiadał, w powyższym sensie, swój odpowiednik, należy jeszcze wypisać stosownie przetransformowaną formułę (2.4), przedstawiającą rozwiązanie równania ruchu. Po wielokrotnym wykorzystaniu tożsamości (2.6) rozwiązanie to przybiera następującą postać

$$\mathbf{k}(p) = \left(\mathcal{T}' \prod_{s=p}^{r-1} (\mathbf{I} - \overline{\mathbf{R}}(s)) \right) \mathbf{k}(r) \tag{2.8}$$

gdzie $\mathcal{T}'$ jest operatorem uporządkowania antychronologicznego, ustawiającym stopy macierzowe $\overline{\mathbf{R}}(s)$ w odwrotnej kolejności niż operator $\mathcal{T}$.

W rozwiązaniach (2.4) i (2.8) operatory $\mathcal{T}$ i $\mathcal{T}'$ można pominąć, gdy stopy macierzowe dotyczące różnych chwil są przemienne. Jest tak dla $M = 1$, bądź dla dowolnego M, jeżeli stopy macierzowe są funkcją stałą argumentu czasowego.

3. Interpretacja macierzowej stopy zwrotu.

Porównując dowolną postać macierzy $\underline{\mathbf{R}}(l) = (\underline{R}_{ij}(l))$ z jej postacią (2.3), występującą w przykładzie 1, dochodzimy do wniosku, że pozadiagonalne elementy macierzy, czyli liczby $\underline{R}_{ij}(l)$ dla $i \neq j$, określają, jaka część kapitału j-tej składowej koszyka wpływa do składowej i-tej koszyka.

Znaczenie elementów diagonalnych $\underline{R}_{ii}(l)$ jest odmienne. Stopa wzrostu i-tej składowej koszyka jest równa $\alpha_i(l) = \underline{\mathbf{R}}_{ii}(l) - \sum_{j\neq i} \underline{R}_{ji}(l)$, czyli stanowi wartość elementu diagonalnego, skorygowaną o wszystkie wypływy kapitału, dotyczące składowej $k_i(l)$ koszyka.

Należy podkreślić, że wpływy i wzrosty z jednej strony, oraz wypływy i spadki z drugiej, nie muszą oznaczać odpowiednio zysków oraz strat dotyczących składowej koszyka, dla której wyznaczają zmiany. Sytuacja zależy od znaku wartości kapitału, do którego zmiany są proporcjonalne. Gdy kapitał jest długiem, to zmiany oznaczają proces o charakterze zgoła przeciwnym – utrata części zobowiązań jest korzystna dla dłużnika.

Powyższa interpretacja opiera się na dekompozycji stopy macierzowej $\underline{\mathbf{R}} = \underline{\mathbf{C}} + \underline{\mathbf{D}}$, gdzie w macierzy $\underline{\mathbf{C}}$ suma wyrazów każdej kolumny równa jest zeru (dlatego możemy ją nazywać macierzą przepływów), a macierz $\underline{\mathbf{D}}$ jest macierzą diagonalną (macierz wzrostów). Jedynie przy ustalonej bazie przestrzeni fazowej taka dekompozycja zadana jest w sposób jednoznaczny. Rozszerzenie pojęć matematyki finansowej na macierze staje się konieczne, gdy nie sposób sprowadzić (*via* przekształcenie podobieństwa) opisu zmian kapitałowych do sytuacji, w której macierz przepływów $\underline{\mathbf{C}}$ jest zerowa.

Przykład 2.

(i) Zawężmy proces z przykładu 1 do przypadków, gdy $\beta(l) \equiv 0$, współczynniki α_i nie zależą od czasu l, a drugi z nich jest dwa razy większy od pierwszego. Wtedy dolna stopa macierzowa jest równa

$$\underline{\mathbf{R}} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 2\alpha \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

Wyznaczona na podstawie tożsamości (2.6) odpowiednia górna stopa macierzowa wynosi

$$\overline{\mathbf{R}} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{1+\alpha} & 0 \\ 0 & \frac{2\alpha}{1+2\alpha} \end{pmatrix}$$

Proces składa się jedynie z macierzy wzrostów, bowiem macierz przepływów jest zerowa. Zyski można analizować w oparciu o autonomiczną ewolucję w ramach jednowymiarowych podprzestrzeni przestrzeni fazowej, stosując do opisu klasyczne pojęcia stóp procentowych.

(ii) Podobnie jak w paragrafie 2, na ten sam proces możemy spojrzeć z odmiennego punktu widzenia, opisując go we współrzędnych nowej bazy przestrzeni koszyków. Niech baza odniesienia składa się ze zobowiązań klienta, oraz ze wszystkich aktywów kapitałowych bankiera. Wtedy równanie (2.1) przybierze postać:

$$\begin{aligned} \widetilde{k}_1(l+1) &= (1+\alpha)\,\widetilde{k}_1(l) \\ \widetilde{k}_2(l+1) &= -\alpha\,\widetilde{k}_1(l) + (1+2\alpha)\,\widetilde{k}_2(l) \end{aligned} \tag{3.2}$$

Macierz przepływów, określona równaniem ruchu (3.2), jest teraz niezerowa i wynosi

$$\underline{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix}$$

zaś macierz wzrostów wynosi

$$\underline{\mathbf{D}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2\alpha \end{pmatrix}$$

Dług klienta $\widetilde{k}_1(l)$ zmienia się tak samo jak w poprzednim oglądzie sytuacji, choć nie na skutek autonomicznego wzrostu, lecz jedynie dzięki wypływowi kapitału bankiera. Cały kapitał bankiera wzrasta według stopy takiej samej, jaka dotyczyła lokaty $k_2(l)$.

(iii) Wyznaczona w nowej bazie na podstawie wzoru (2.6) górna stopa macierzowa dla równania ruchu (3.2) ma postać

$$\overline{\mathbf{R}} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{1+\alpha} & 0 \\ -\frac{\alpha}{(1+\alpha)(1+2\alpha)} & \frac{2\alpha}{1+2\alpha} \end{pmatrix}$$

i składa się z następujących macierzy przepływów i wzrostów

$$\overline{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{(1+\alpha)(1+2\alpha)} & 0 \\ -\frac{\alpha}{(1+\alpha)(1+2\alpha)} & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \overline{\mathbf{D}} = \begin{pmatrix} \frac{2\alpha^2}{(1+\alpha)(1+2\alpha)} & 0 \\ 0 & \frac{2\alpha}{1+2\alpha} \end{pmatrix}$$

Zaprezentowane różne sposoby (i), (ii), (iii) spojrzenia na ten sam proces kapitałowy są jednakowo poprawne i sensowne. Porównując konwencję kredytową w wariancie (ii) z konwencją dyskontową (iii) dostrzegamy istotną różnicę pomiędzy macierzami $\underline{\mathbf{D}}$ i $\overline{\mathbf{D}}$ – raz wzrost pierwszej składowej koszyka jest jedynie efektem przepływów, w drugim przypadku składowa ta ma częściowa autonomię swojego wzrostu.

Wskazana interpretacyjna różnica może być przyczyną wielu finansowych nadużyć, podobnie jak ma to miejsce w przypadkach nieoprocentowania zaległych odsetek w zastosowaniach kapitalizacji prostej. Ową jakościową asymetrię w opisie przepływów autor proponuje nazwać **paradoksem stóp różnicowych**, analizę tego zagadnienia odkładając do odrębnego opracowania.

Norma dowolnej macierzy $\underline{\mathbf{R}}(l)$, czyli

$$\|\underline{\mathbf{R}}(l)\| := \sup_{\mathbf{k}\in\mathbb{R}^M\setminus\{0\}} \frac{\|\underline{\mathbf{R}}(l)\mathbf{k}\|}{\|\mathbf{k}\|} \ , \tag{3.3}$$

gdzie $\|\mathbf{k}\|$ jest długością wektora $\mathbf{k}$ (analizę własności metrycznych przestrzeni koszyków autor zamieści w odrębnym opracowaniu , zob.[7]), przedstawia najwyższą stopę zmiany kapitału, jaką daje inwestycja wybrana optymalnie spośród wszystkich przedsięwzięć bankiera, przy czym wektor(y) $\mathbf{k}_0$, na którym powyższy iloraz osiąga *supremum*, wyznacza(ją) ów ekstremalny wzrost. Gdy kapitał $\mathbf{k}_0$ jest dobrem pożądanym, norma wyznacza największy sukces inwestora, jeśli zaś są to długi – mierzy najcięższą stratę.

Interpretacja stopy $\overline{\mathbf{R}}$ jest analogiczna jak macierzy $\underline{\mathbf{R}}$, z tą różnicą, że stopa $\overline{\mathbf{R}}$ zamiast (jak $\underline{\mathbf{R}}$) określać zmiany kapitałowe względem poprzedniego okresu rozliczeniowego, dotyczy zbliżającej się chwili rozliczenia. Konwencję kredytu zastępuje konwencja dyskonta. Przy zmianie kierunku czasu znaki „+” i „−” przy stopach macierzowych w tożsamości (2.6) powinny być zmienione na przeciwne, chyba że wprowadzimy zasadę, w której dodatnie stopy wyrażają ubywanie kapitału, a przepływy pomiędzy składowymi koszyka odbywają się w kierunku przeciwnym. Dowolność konwencji przestaje obowiązywać dla procesów nieodwracalnych czyli wtedy, gdy macierze $\underline{\mathbf{R}}(l)$ lub $\overline{\mathbf{R}}(l)$ stają się osobliwe.

4. Formalizm ciągłego opisu kredytowania.

By rachunek kapitałowy był czytelny oraz użyteczny dla praktyków, formalne rozwiązanie równania ruchu w postaci wzoru (2.4) modelujemy numerycznie, bądź przedstawiamy je w *postaci zwartej* (zob. np. [8]), nazywając ją ścisłym rozwiązaniem równania (2.2). W tym drugim przypadku dla osiągnięcia celu można posłużyć się różnymi znanymi technikami matematycznymi. Jedną z nich jest przejście graniczne prowadzące od opisu modeli przy pomocy liniowych równań różnicowych, do modelowania zmian kapitału za pomocą równań różniczkowych. By przedstawić ową metodę załóżmy, że rozważamy skale czasowe takie, że względem nich okres czasu, po upływie którego obliczamy zmiany składowych koszyka, jest zaniedbywalnie mały i wynosi $\tau = t_{l+1} - t_l$. Po przeskalowaniu dziedziny czasowej koszyka, równanie ruchu (2.2) możemy przepisać w postaci:

$$\frac{\mathbf{k}(t_l+\tau) - \mathbf{k}(t_l)}{\tau} = \frac{\underline{\mathbf{R}}(l)}{\tau}\,\mathbf{k}(t_l)$$

Przejście graniczne $\tau \to 0$ prowadzi do następującego układu równań różniczkowych:

$$\frac{d\,\mathbf{k}(t)}{dt} = \mathbf{R}(t)\,\mathbf{k}(t) \tag{4.1}$$

gdzie $\mathbf{R}(t) := \lim_{\tau\to 0} \frac{\underline{\mathbf{R}}(l)}{\tau}\Big|_{t=t_l}$ (dolne i górne stopy macierzowe zależą od długości okresu rozliczeniowego $\tau = t_{l+1} - t_l$, więc licznik ilorazu o granicy $\mathbf{R}(t)$ jest funkcją zmiennej τ). Macierz $\mathbf{R}(t)$ nazwiemy *różniczkową stopą macierzową* (w pracy [6], w przypadku jednowymiarowym, nosi ona nazwę *stopy chwilowej*).

Mimo konieczności wykonywania fizycznych operacji rozliczeń, wyznaczony macierzą $\mathbf{R}(t)$ opis odbywających się na ciągłej dziedzinie czasowej wzrostów i przepływów między składnikami koszyka jest konwencją realistyczną. Jej wdrożenie w dziedzinę praktycznej działalności podmiotów rynku kapitałowego może napotykać jedynie przeszkody o charakterze psychologicznym. Komentarz do zagadnienia rozliczeń znajduje się w następnym paragrafie.

Formalne rozwiązanie równania ruchu (4.1) ma postać:

$$\mathbf{k}(t) = \left(\mathcal{T}\, e^{\int_{t_0}^{t} \mathbf{R}(t')dt'}\right)\mathbf{k}(t_0) \tag{4.2}$$

Chronologicznie uporządkowana funkcja wykładnicza jest nieskończonym szeregiem, zwanym niekiedy *matrycantem* [9] macierzowej stopy różniczkowej

$$\mathcal{T}\, e^{\int_{t_0}^{t} \mathbf{R}(t')dt'} = \mathbf{I} + \int_{t_0}^{t} \mathbf{R}(t_1)dt_1 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{R}(t_1)\int_{t_0}^{t_1} \mathbf{R}(t_2)dt_2 dt_1 + \dots$$

Jeżeli różniczkowa stopa macierzowa nie zmienia się z upływem czasu ($\mathbf{R}(t) \equiv \mathbf{R}_0$), wtedy formalne rozwiązanie równania ruchu (4.2) upraszcza się, bowiem operator uporządkowania chronologicznego $\mathcal{T}$ staje się zbędny. Wyrażenie z prawej strony równości (4.2), które opisuje ewolucję czasową koszyka, przekształca się do standardowej macierzowej funkcji wykładniczej:

$$\mathcal{T}\, e^{\int_{t_0}^{t} \mathbf{R}_0 dt'} = e^{(t-t_0)\mathbf{R}_0}$$

5. Równoważność modeli różnicowych i różniczkowych.

Zachowanie jednolitego opisu procesu ewolucji koszyka, opisu niezależnego od wyboru między ciągłym a dyskretnym modelem czasu, jest możliwe. Wystarczy przyjąć, że dziedzina zmiennej ciągłej t dzieli się na (niekoniecznie jednakowej długości!) odcinki o końcach w punktach t_l. Wtedy, uzgadniając rozwiązania równań ruchu (2.4) i (4.2) przez wykonanie podstawienia $l \to t_l$, otrzymamy następującą zależność stóp macierzowych:

(5.1)
$$\mathbf{I} + \underline{\mathbf{R}}(t_l) = \mathcal{T}\, e^{\int_{t_l}^{t_{l+1}} \mathbf{R}(t')dt'} \quad , \quad \text{czyli} \quad \mathbf{I} - \overline{\mathbf{R}}(t_l) = \mathcal{T}'\, e^{-\int_{t_l}^{t_{l+1}} \mathbf{R}(t')dt'}$$

Klasyczny, jednowymiarowy odpowiednik tych zależności, gdzie (ze względu na przemienność stóp) operatory $\mathcal{T}$ i $\mathcal{T}'$ są zbędne, można znaleźć w pracy [6]. Jeżeli zadbamy o spełnienie związku (5.1), to wszystkie konwencje opisu procesu kapitałowego (kredytowa, dyskontowa, bądź różniczkowa) stają się jednakowo uprawnione, więc o wyborze jednej z nich powinna decydować skuteczność w znajdowaniu ścisłego rozwiązania konkretnego równania ruchu, gdyż stopień komplikacji elementów stóp macierzowych (jako funkcji argumentu czasowego), dla tego samego modelu, może być bardzo różny w zależności od typu stopy.

W przypadku formalizmu różniczkowego ujednolicenie konwencji likwiduje problemy techniczne dotyczące rozliczeń. Ciągłe przepływy między składnikami koszyka odbywają się jedynie na poziomie rachunkowym. Korekta stanu faktycznego koszyka do wymogów określonych macierzową stopą różniczkową może odbywać się dowolnie rzadko, w arbitralnie wybranych chwilach t_{l+1}, poprzez wyznaczenie stosownej macierzowej stopy dolnej $\underline{\mathbf{R}}(l)$, bądź górnej $\overline{\mathbf{R}}(l)$, na odcinku czasowym $[t_l, t_{l+1}]$ pomiędzy ostatnim z minionych rozliczeń i rozliczeniem aktualnym. Z tego punktu widzenia macierzowe stopy różnicowe są pewnym rodzajem zapisu rozwiązania równania różniczkowego dla chwili t_{l+1}, z warunkiem początkowym wziętym w chwili t_l, opartym na tradycjach finansowych rozliczeń odsetkowych. Macierze $\mathbf{I} + \underline{\mathbf{R}}(l)$ oraz $\mathbf{I} + \overline{\mathbf{R}}(l)$ są odwrotnymi względem siebie wersjami *rezolwenty* [5] równania różniczkowego (4.1) na odcinku $[t_l, t_{l+1}]$

$$\mathbf{k}(t_{l+1}) = (\mathbf{I} + \underline{\mathbf{R}}(l))\,\mathbf{k}(t_l) \quad , \quad \mathbf{k}(t_l) = (\mathbf{I} - \overline{\mathbf{R}}(l))\,\mathbf{k}(t_{l+1})$$

odpowiednio w ujęciu zgodnym i przeciwnym do kierunku upływu czasu (powyżej autor ponownie wypisał równania (2.2) i (2.5)).

Dokonajmy uzmiennienia stałych t_l występujących w formułach (5.1). Załóżmy także, że górne i dolne stopy macierzowe są funkcjami różniczkowalnymi względem argumentu czasowego $t = t_l$. Obliczając pochodne tożsamości (5.1), uzyskamy macierzową stopę różniczkową wyrażoną poprzez stopy kredytowe, bądź dyskontowe:

$$-\mathbf{R}(t) = (\mathbf{I} - \overline{\mathbf{R}}(t))\,\frac{d\,\underline{\mathbf{R}}(t)}{dt} = \frac{d\,\overline{\mathbf{R}}(t)}{dt}\,(\mathbf{I} + \underline{\mathbf{R}}(t)) \tag{5.2}$$

Dla różniczkowalnych stóp różnicowych odpowiednie rozwiązanie różniczkowego równania procesu kapitałowego jest ciągłe, czyli zachodzą równości $\lim_{(t_{l+1}-t_l)\to 0}\underline{\mathbf{R}}(l) = \lim_{(t_{l+1}-t_l)\to 0}\overline{\mathbf{R}}(l) = 0$. Na podstawie zależności (5.2) otrzymamy więc następującą równość granic

$$\mathbf{R}(t) := \lim_{(t_{l+1}-t_l)\to 0}\frac{\underline{\mathbf{R}}(l)}{t_{l+1}-t_l} = \lim_{(t_{l+1}-t_l)\to 0}\frac{\overline{\mathbf{R}}(l)}{t_{l+1}-t_l}$$

Nawiązując do tematu paragrafu 3 można stwierdzić, że interpretacja elementów stopy różniczkowej $\mathbf{R}(t)$ jest taka sama jak elementów $\underline{\mathbf{R}}(l)$ czy $\overline{\mathbf{R}}(l)$, bowiem dla stóp kredytowej i dyskontowej macierz $\mathbf{R}(t)$ stanowi wspólny przypadek graniczny. Poza tym można powiązać różniczkową stopę macierzową ze średnią geometryczną pochodnych macierzowych stóp górnej i dolnej, gdyż z równości (5.2) otrzymujemy następującą zależność

$$\mathbf{R}^2(t) = \frac{d\,\overline{\mathbf{R}}(t)}{dt}\,\frac{d\,\underline{\mathbf{R}}(t)}{dt}$$

Związki (5.2) są pomocne np. w sytuacjach, gdy dla pewnego różnicowego procesu kapitałowego chcemy odnaleźć równoważny jemu proces różniczkowy. Ponieważ różne funkcje mogą mieć w punktach t_l jednakowe wartości, takich odpowiedników różniczkowych dla jednego procesu różnicowego jest wiele. Warto jeszcze zauważyć, że, w przypadku macierzowych stóp różnicowych niezależnych od skali czasowej, tożsamość (5.2) implikuje niezmienniczość procesu, tzn. $\mathbf{R}(t) \equiv 0$.

6. Urojone stopy wzrostu.

Niżej prezentowany przykład układu równań jest najpopularniejszym modelem fizyki, którego opisy znajdujemy w każdym podręczniku mechaniki teoretycznej, więc w tak szczególnym przypadku wydaje się zbędnym powoływanie się na konkretne źródło pisane. Ten typ równań, noszący nazwę *oscylatora harmonicznego*, należy rozważyć głównie z uwagi na jego kanoniczny charakter dotyczący opisu ruchu okresowego. Koszyki posiadające oscylujące komponenty stanowią szeroką klasę liniowych procesów finansowych (zob. paragraf 7). Część ich kapitału staje się na przemian raz zadłużeniem, raz dobrem pożądanym, mogą więc stanowić podłoże dla zgubnego (bądź zbawiennego) w skutkach mechanizmu pompowania kapitału, zob. np. motto tego opracowania.

Przykład 3. Oscylator harmoniczny. Zmodyfikujmy nieco przykład 1, jednocześnie upraszczając go tak, aby różniczkowa stopa macierzowa miała postać:

$$\mathbf{R}(t)=\begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -b & -b \\ b & b \end{pmatrix} \tag{6.1}$$

Mimo pewnej sztuczności tego przykładu łatwo jest wyobrazić sobie powiązane umowy bankowe prowadzące do takich przepływów kapitału w koszyku oraz, dopasowane do nich, autonomiczne przyrosty każdej składowej koszyka.

Dla głębszej analizy procesów warto posłużyć się rozszerzeniem zespolonym $\mathbb{C}^M$ (tu $\mathbb{C}^2$) przestrzeni fazowej $\mathbb{R}^M$ (tu $\mathbb{R}^2$), zob. [4]. Wtedy $\widetilde{\mathbf{k}}_1=(1,i)$ oraz $\widetilde{\mathbf{k}}_2=(1,-i)=\widetilde{\mathbf{k}}_1^*$ (gdzie symbol * oznacza sprzężenie zespolone) są wektorami własnymi stopy macierzowej $\mathbf{R}(t)$ o wartościach własnych odpowiednio $-ib$ oraz ib . Opis procesu upraszcza się, bowiem koszyk rozkłada się na dwie niezależne składowe o abstrakcyjnym kapitale zespolonym. Równanie ruchu koszyka ma następujące rozwiązanie w rozszerzonej przestrzeni fazowej $\mathbb{C}^2$, w bazie wektorów własnych $\{\widetilde{\mathbf{k}}_1,\widetilde{\mathbf{k}}_2\}$:

$$\widetilde{k}_1(t)=e^{-ib(t-t_0)}\widetilde{k}_1(t_0) \quad , \quad \widetilde{k}_2(t)=e^{ib(t-t_0)}\widetilde{k}_2(t_0)$$

Przechodząc na powrót do bazy wyjściowej otrzymamy poniższe rozwiązanie

$$\mathbf{k}(t)=\begin{pmatrix} \cos(b(t-t_0)) & -\sin(b(t-t_0)) \\ \sin(b(t-t_0)) & \cos(b(t-t_0)) \end{pmatrix}\mathbf{k}(t_0)$$

opisujące ruch po okręgu o środku w początku kartezjańskiego układu współrzędnych koszyka.

Odpowiednie rozwiązanie równania ruchu w wersji różnicowej (2.4) modelu oscylatora harmonicznego, w każdej z rozważonych baz, zadane jest powyższymi formułami w chwilach $t=t_l$. Wstawiając stopę różniczkową (6.1) do wzorów (5.1) wyznaczymy macierzowe stopy dolną i górną. Mają one następującą postać:

$$\underline{\mathbf{R}}(l)=\begin{pmatrix} \cos(b(t_{l+1}-t_l))-1 & -\sin(b(t_{l+1}-t_l)) \\ \sin(b(t_{l+1}-t_l)) & \cos(b(t_{l+1}-t_l))-1 \end{pmatrix},$$

$$\overline{\mathbf{R}}(l)=\begin{pmatrix} 1-\cos(b(t_{l+1}-t_l)) & -\sin(b(t_{l+1}-t_l)) \\ \sin(b(t_{l+1}-t_l)) & 1-\cos(b(t_{l+1}-t_l)) \end{pmatrix}$$

Jeżeli obliczymy pochodną jednej z powyższych macierzowych stóp różnicowych po zmiennej $t = t_l$, po czym skorzystamy z tożsamości (5.2), to z powrotem otrzymamy macierz stopy różniczkowej $\mathbf{R}(t)$ oscylatora harmonicznego.

Okres powrotu rozwiązania do tego samego obszaru przestrzeni fazowej wynosi $T = \frac{2\pi}{|b|}$. W przypadku procesu dyskretnego, gdy wybierzemy przedziały czasowe jednakowej długości $\tau = t_{l+1} - t_l$, to dla niewymiernych ilorazów $\frac{\tau}{T}$ wartości składowych koszyka nigdy nie odtwarzają się dokładnie. Zachowanie konsystencji między wariantami różnicowym i różniczkowym oscylatora wymaga, by elementy diagonalne macierzowych stóp różnicowych były różne od zera. Jest to efekt wspomnianego już wcześniej paradoksu stóp różnicowych.

7. Nieoddziaływujące zespolone procesy kapitałowe.

Przy pomocy dowolnie małej deformacji elementów każdą macierz liczbową można przekształcić w macierz podobną do diagonalnej macierzy zespolonej [10], czyli zbiór odwzorowań diagonalizowalnych rozszerzonej przestrzeni fazowej $\mathbb{C}^M$ jest zbiorem gęstym w zbiorze wszystkich odwzorowań liniowych, zadanych w $\mathbb{C}^M$. Z twierdzenia tego wynika, że ewolucję każdego koszyka kapitałowego można przedstawić (z dowolnie dużą precyzją) jako zestaw nieoddziaływujących pomiędzy sobą zespolonych lokat kapitałowych. Wniosek ów oznacza, że w rozszerzonej przestrzeni fazowej możliwa jest dekompozycja stopy macierzowej $\mathbf{R}(t) = \mathbf{C}(t) + \mathbf{D}(t)$, przy której macierz przepływów $\mathbf{C}(t)$ jest zerowa. W przypadku stałych w czasie chwilowych stóp macierzowych baza, w której można uzyskać ten obraz, także nie będzie się z czasem zmieniać. Podobnie jak w tradycyjnej matematyce finansowej, części rzeczywiste niezerowych elementów zdiagonalizowanej macierzy stóp będą mierzyć stopień strat bądź zysków dotyczących zespolonych lokat, zaś części urojone będą informacją o periodyczności zmian w proporcjach między składową rzeczywistą lokaty kapitałowej, a jej składową urojoną. Każdym takim okresowym zmianom proporcji składników zespolonej komponenty kapitału będzie towarzyszył inny zespolony odpowiednik, o współrzędnych do niego sprzężonych. Ewolucję rzeczywistego kapitału koszyka najłatwiej obserwować dokonując jego dekompozycji w bazie zespolonych wektorów własnych stóp macierzowych. W procesach, dla których różniczkowa stopa macierzowa posiada wartości własne o nieznikającej części urojonej, odpowiednie składowe rozwiązania równania ruchu przemieszczają się w przestrzeni fazowej po torach w kształcie spiral logarytmicznych. Przykład 3 obrazował taką sytuację dla wartości własnej o zerowej części rzeczywistej (spirala staje się wtedy okręgiem). Poprzez wybór stosownych momentów wejścia i wyjścia z procesu oscylacje takie, po identyfikacji, mogą być wykorzystywane jako szczególnie efektywny mechanizm powiększania kapitału, podobny w skutkach do dźwigni finansowej.

Wyżej naszkicowany finansowy obraz koszyka jest prosty, bo skalarny, choć abstrakcyjny, bo zespolony. Jeśli nie mamy na niego ochoty, pozostaje nam stosować stopy macierzowe o elementach rzeczywistych.

Przykład 4. Symulacja procesu kapitałowego. Rozważmy pewien dowolnie wybrany czterowymiarowy proces kapitałowy. By zapewnić jego pełną dowolność, autor wygenerował elementy macierzy rzeczywistej 4×4 przy pomocy generatora liczb losowych o równomiernym rozkładzie na odcinku $[-1, 1]$. Elementy diagonalne macierzy określiły macierz wzrostów $\mathbf{D}$, a pozadiagonalne – macierz przepływów $\mathbf{C}$. Suma tych macierzy jest poniżej wypisaną różniczkową stopą macierzową o współczynnikach niezależnych od czasu

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 2,0715 & -0,7798 & -0,2367 & -0,9461 \\ 0,0495 & -0,2119 & 0,2992 & 0,1812 \\ 0,7610 & 0,4616 & 1,8802 & 0,1764 \\ -0,3796 & -0,5208 & 0,8118 & -0,4093 \end{pmatrix}$$

W bieżącym przykładzie liczby są wypisane do czwartej pozycji po przecinku.

Wartości własne macierzy $\mathbf{R}$ i odpowiadające im wektory własne są następujące

$$\begin{aligned} \lambda_1 = \lambda_2^* &= \quad 2,1416 + 0,6316i \\ \lambda_3 = \lambda_4^* &= -0,4764 + 0,2605i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2^* &= (1, \quad 0,0003 - 0,1563i, \quad 0,2498 - 1,0635i, \quad -0,1369 - 0,2727i) \\ \mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_4^* &= (1, \quad -0,6328 - 1,3305i, \quad -0,4650 + 0,1505i, \quad 3,3308 + 0,7837i) \end{aligned}$$

Nie wprowadzając dalszych założeń związanych z rynkiem (zob.[?]), możemy przyjąć w rozszerzonej przestrzeni fazowej $\mathbb{C}^4$ normę $\|\mathbf{k}(t)\| = \sum_{j=1}^{4} k_j^*(t)\, k_j(t)$, zgodną w jej podprzestrzeni rzeczywistej $\mathbb{R}^4$ z normą euklidesową. Funkcja ta indukuje normę dla odwzorowań liniowych (3.3), „rozróżniającą" jedynie amplitudy (czyli wartości bezwzględne) jednowymiarowych procesów składowych. Wtedy odpowiadające tej normie, najbardziej interesujące komponenty koszyka (także rzeczywistego, z przestrzeni fazowej $\mathbb{R}^4$) leżą w dwuwymiarowej podprzestrzeni rozpiętej przez wektory $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ i wszystkie posiadają stopę zmian o wartości bezwzględnej równej $\sqrt{\|\mathbf{R}\|} = |\lambda_1| = 2,2328$, a okres T oscylacji komponenty rozwiązania równania ruchu, należącej do optymalnej podprzestrzeni, jest stosowną funkcją argumentu wartości własnej o największym module $T = \frac{2\pi}{|\arg(\lambda_1)|} = 21,9087$. Pozostałe składowe rozwiązania, przy czterokrotnie mniejszym czynniku wzrostu $(|\lambda_3| = 0,5430)$, mogą zostać wykorzystane do przepompowania kapitału, bowiem oscylują dziewięć razy szybciej $(T' = \frac{2\pi}{|\arg(\lambda_3)|} = 2,3789)$.

8. Uwagi końcowe.

1. Przedstawione ujęcie procesów ewolucji koszyków stanowi odpowiedni punkt wyjścia dla badań nad finansowymi niezmiennikami rzutowymi, zob. [7], które powinny pozwolić uszeregować różne koszyki w celu ich wartościowania.

2. W przypadkach braku ścisłych rozwiązań dla opisu ewolucji koszyka przy pomocy układów liniowych równań różnicowych (różniczkowych), możemy stosować standardowe metody rachunku perturbacyjnego, od dawna z powodzeniem wykorzystywane przez fizyków, zob. np. [11]. Polegają one na dekompozycji macierzy $\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_0(t) + \lambda\mathbf{R}_1(t)$ na część $\mathbf{R}_0(t)$, dla której znane jest ścisłe rozwiązanie równania ruchu, oraz na zaburzenie $\lambda\mathbf{R}_1(t)$ tak, aby podanie rozwiązania równania jedynie z dokładnością do reszty $\mathcal{O}(\lambda^n)$ (dla pewnego n) satysfakcjonowało praktyków. Z tego powodu ścisłe rozwiązania równań mają znaczenie szersze, niż mogłoby to wynikać z opisów dotyczących ich modeli. Opis pewnej techniki rachunkowej, opartej na nowym typie stopy różnicowej i umożliwiającej m. in. uzyskanie rozwiązania układu równań postaci (2.1), zostanie zamieszczony w odrębnym opracowaniu.

3. Pojęcie stopy macierzowej dopuszcza stosowanie modeli stochastycznych, co rozszerza możliwości opisu inwestowania. Elementy macierzy $\mathbf{R}(t)$ stają się wtedy zmiennymi losowymi, a to pozwala realistyczniej odzwierciedlać zjawiska rynkowe.

STRESZCZENIE. W oparciu o modele koszyków kapitałowych opisywanych liniowymi równaniami różnicowymi (bądź różniczkowymi) autor proponuje adaptację pojęcia stopy zwrotu z kapitału na przypadki wielowymiarowe.

BIBLIOGRAFIA

[1] H.Steinhaus, *Wspomnienia i zapiski*, Aneks, Londyn, 1992.
[2] M. Dobija, E. Smaga, *Podstawy matematyki finansowej i ubezpieczeniowej*, PWN, Warszawa–Kraków 1996.
[3] A. Białynicki-Birula, *Algebra liniowa z geometrią*, PWN, Warszawa 1974.
[4] W.I. Arnold, *Równania różniczkowe zwyczajne*, PWN, Warszawa 1975.
[5] K. Maurin, *Analiza, cz.1*, PWN, Warszawa, 1974.
[6] A. Karpio, E.W. Piotrowski, *Przegląd Statystyczny*, w druku.
[7] E.W. Piotrowski, *Materiały XXVII Ogólnopolskiej Konferencji Zastosowań Matematyki*, Instytut Matematyczny PAN, Warszawa 1998, str. 73.
[8] R.L. Graham, D.E. Knuth, O. Patashnik, *Matematyka konkretna*, PWN, Warszawa 1996.
[9] T. Cholewicki, *Zastosowania analizy macierzowej w technice*, w *Elementy nowoczesnej matematyki dla inżynierów*, pod red. H. Steinhausa, PWN, Warszawa–Wrocław 1971.
[10] A.P. Mišina, I.V. Proskurjakov, *Vyssšaja algebra*, Nauka, Moskwa 1965.
[11] F.W. Byron, R.W. Fuller, *Matematyka w fizyce klasycznej i kwantowej*, PWN, Warszawa 1975.

Zakład Fizyki Matematycznej, Instytut Fizyki, Uniwersytet w Białymstoku, LIPOWA 41, 15-424 BIAŁYSTOK.
E-mail address: ep@alpha.uwb.edu.pl