

Zalety preferencji zrandomizowanych i intransytywne – dylematy osła i kota¹

(RePEc:s1a:eakjk1:110PLv2 13-xii-1999)

Edward W. Piotrowski
(*Uniwersytet w Białymstoku*)

25 V 1959. *Przed kilku dniami był tu Szolem Mandelbrojt z żoną (on jest profesorem w Collège de France; dużo podróżuje) i opowiadał, że Pitts (o którym pisze w Cybernetyce Wiener) eksperymentował z kotami i stwierdził, że kot mając do wyboru rybę i mięso, wybiera rybę, mając mięso i mleko, wybiera mięso, ale mając mleko i rybę wybiera mleko! Myślę, że wyraźna preferencja chroni go od losu osła Buridana, a cykliczność zapewnia różnorodność pożywienia a więc pełność.*

Hugo Steinhaus

Streszczenie

Praca poświęcona jest dwóm najprostszym przykładom gier sekwencyjnych, ilustrujących uniwersalne dla nauk społecznych problemy związane z dokonywaniem racjonalnych wyborów. W kontekście stałej strategii drugiego gracza (oferującego) badany jest zbiór optymalnych decyzji (strategii) wybierającego, które manifestują jego preferencje. W drugim przykładzie okazuje się, że porządek zadany racjonalnymi preferencjami gracza może być intransytywny. Przedstawione ilościowe wnioski skłaniają do rewizji „zdroworozsądkowych” poglądów głoszących, że przejawiające intransytywność preferencje są paradoksalne i niepożądane.

1. Wstęp

¹ tekst został opublikowany w *Zeszytach Naukowo-Teoretycznych PWSBiA Wiek XXI*.

Przymiotnik „ekonomiczny” niesie w sobie znaczenia kojarzące się od stuleci z optymalnością planowanych działań. W latach kształtowania się obowiązującego dziś w naukach społecznych paradygmatu Ernst Mach², podkreślając uniwersalność tendencji do powiększania korzyści i nawiązując do brzytwy Ockhama³, sformułował *zasadę najmniejszego wysiłku*, kierującą naszymi procesami psychicznymi, adoptowaną potem do potrzeb metodologii nauk przyrodniczych⁴. Rozumiane jak wyżej sprzężenie ekonomicznego myślenia (nie w znaczeniu ubóstwa środków, lecz raczej prostoty założeń i przejrzystości stosowanych rozwiązań) z ekonomicznym działaniem nazwijmy *zasadą optymalnego działania*. Autor pragnie przedstawić ilościową analizę modelu zachowań podporządkowanych owej zasadzie, który w swoich jakościowych aspektach znany jest z wielu źródeł. Tak więc przypominający wojskowy żargon drugi człon tytułu tego artykułu należy odnieść do objaśniającego go kontekstu, na który składają się:

- szeroko znany przykład niezdecydowania, przedstawiony w opowieści o ośle Buridana⁵,
- eksperymenty Pittsa z kotami, wspomniane w zacytowanym wyżej fragmencie pamiętnika⁶.

Przedstawione przez autora omówienie pewnej elementarnej klasy modeli skutecznego podejmowania decyzji nawiązuje do eksperymentu wspomnianego przez Steinhausa.

Jean Buridan zwrócił naszą uwagę na los osła nie potrafiącego wybrać pomiędzy owsem a sianem. Jest to najbardziej elementarny dylemat, w którym postępowanie zgodne z deterministyczną regułą wyboru zawsze prowadzi do śmierci zwierzęcia – bądź z przyczyny zagłodzenia, bądź na skutek awitaminozy wynikłej z niepełnowartościowej paszy.

Brak posiadania jednoznacznych i niezmiennych w czasie preferencji nie oznacza niezdecydowania. Buridan kpił raczej nie z braku preferencji, lecz z cechy braku zdecydowania. Nieprzypadkowo w grze karcianej *osioł* owym zwierzęciem staje się ten z graczy, który nie tylko grał źle, ale jeszcze dodatkowo się zagapił⁷. Poniżej rozważymy jedynie klasę zachowań zdecydowanych, to znaczy takich, w których nie istnieje możli-

² E. Mach, *Die Geschichte und die Wurzel des Satzes der Erhaltung der Arbeit*, Calve, Praha 1872.

³ Ostatnio pojawiły się zaskakująco szerokie perspektywy stosowania brzytwy Ockhama w ramach kwantowej teorii gier, zob. E. W. Piotrowski, J. Sładkowski, *The Next Stage: Quantum Game Theory*, w *Mathematical Physics Research at the Cutting Edge* (red. C. V. Benton), Nova Science Publishers, 2004.

⁴ B. Malinowski, *O zasadzie ekonomii myślenia* (rozprawa doktorska), Uniwersytet Jagielloński, Kraków 1908.

⁵ <http://plato.stanford.edu/entries/buridan/>.

⁶ H. Steinhaus, *Wspomnienia i zapiski*, Aneks, London 1992.

⁷ *Gry karciane*, Oficyna Wydawnicza Atena, Poznań 1999.

wość rezygnacji z podjęcia wyboru. Doprowadzą one w końcu do analizy potencjalnego „świata” wszystkich możliwych do pomyślenia kotów nie posiadających pamięci, za to mających zakodowany niedeterministyczny sposób reagowania na pojawiające się propozycje pokarmowe. Przedstawioną tu stochastyczną analizą autor pragnie przyczynić się do wypełniania luki, jaką jest brak teoretycznych opracowań ilościowych, dotyczących niedeterministycznych elementarnych algorytmów zachowań o istotnym znaczeniu w ekonomii, czy socjologii. Ten stan rzeczy wydaje się naturalną konsekwencją braku rachunku prawdopodobieństwa wśród przedmiotów nauczanych na wielu kierunkach studiów. Z drugiej strony nowoczesne metody kształcenia elementarnego przewidują pojawienie się rachunku prawdopodobieństwa już w programie IV klasy szkoły podstawowej⁸. Na początku dekady kończącej minione stulecie książka opisująca skrajny analfabetyzm stochastyczny społeczeństwa stała się w Stanach Zjednoczonych bestsellerem⁹. Dlatego naturalnym jest przypuszczenie, że doczekają się upowszechnienia analizy podobne do niżej przeprowadzonej.

2. Niedeterministyczny osioł

W nieustannie powtarzającej się sytuacji osioł Buridana wybiera jeden z dwóch pokarmów; tak więc są jedynie dwa rodzaje zachowań deterministycznych osłów: f_1 i f_2 . Tablica odpowiednich funkcji będących sposobami postępowania deterministycznych osłów, podejmujących decyzję wyboru elementu pary $(1,2)$, wygląda następująco¹⁰:

Funkcja f_k :	f_1	f_2
$f_k((1,2)) =$	1	2

Ośleń niedeterministycznym będzie stworzenie używające strategii mieszanej (p_1, p_2) , polegającej na losowym wyborze (z prawdopodobieństwem odpowiednio p_1 i $p_2 = 1 - p_1$) jednego z zachowań: f_1 lub f_2 . W przypadku istnienia zakazu rezygnacji ze spożywania asortyment pokarmów osła będzie zrównoważony (w pokarmie pojawi się tyle samo słomy, co i siana) jedynie wtedy, gdy $p_1 = p_2$.

⁸ Zob. A. Płocki, *Rachunek prawdopodobieństwa w szkole podstawowej*, WSiP, Warszawa 1991.

⁹ J. A. Paulos, *Analfabetyzm matematyczny i jego skutki*, Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe, Gdańsk 1999.

¹⁰ Każda z funkcji f_k jest więc określona na zbiorze jednoelementowym i może przyjąć jedną z dwóch możliwych wartości.

Teraz nieco skomplikujmy sytuację, w której osioł podejmuje decyzję, zakładając, że stawiamy mu ciągle jedną z trzech propozycji:

- pokarm nr 1,
- pokarm nr 2,
- pokarmy nr 1 lub nr 2.

Jeżeli pozwolimy osłowi zrezygnować z jedzenia (ze względu na przyszłowiowy upór zwierzęcia takie założenie jest naturalne), to *de facto* rozważany model stanie się równoważny opisowi sytuacji, w jakich znajdował się kot Pittsa. W celu wykazania owej równoważności wystarczy formalnie wprowadzić pokarm nr 0, będący pokarmem „pustym”. Ponieważ porządek wypisywania numerów składników pary (porcji pokarmu) nie gra roli, więc ustalmy konwencję, że w oznaczeniach par (k, j) zawsze numer k jest większy niż j . Wtedy różne alternatywy będą stanowić pary $(2,1)$, $(2,0)$ i $(1,0)$. Jeśli dodatkowo przyjmiemy postulat o kompletności pożywienia zakładający, że zdrowo odżywiany osioł powinien w jednakowych ilościach spożywać pokarmy 2, 1 i 0 (odpoczywać od jedzenia) to analizę takiego modelu odnajdziemy poniżej¹¹, w rozważaniach dotyczących algorytmu niedeterministycznych zachowań kota.

3. Zagadnienia intranzytywne

Aby przejść do analizy wszystkich możliwych kocich zachowań z jakimi potencjalnie mógł mieć do czynienia Pitts, przypomnijmy czym są porządki intranzytywne.

Relację dominowania zachodzącą pomiędzy elementami pewnego zbioru nazywamy intranzytywną, gdy istnieje trójka elementów A , B , C takich, że choć A dominuje nad B , a B nad C , to mimo takiej sytuacji zachodzi jednocześnie, że C dominuje nad A . Ponieważ nie sprecyzowaliśmy, co oznacza słowo „dominować”¹², więc tak naprawdę czasownik „dominować” może oznaczać dowolną relację.

Paradoks intranzytywnego porządku¹³ prawdopodobnie był dostrzeżony niezależnie przez wielu myślicieli na przestrzeni ostatnich stuleci. Tak na przykład Stanisław Ulam¹⁴ odkrył go przy próbie oceny gruszki, jabłka i śliwki według „dobroci” (po latach zauważył, że ten sam problem występuje przy ocenianiu matematyków)¹⁵. Popularnym jest przypadek intranzytywnej relacji porządku zawartej w regułach gry *papier, kamień*,

¹¹ Poczawszy od paragrafu 4.

¹² Zostało ono użyte jedynie dla wygody opisu intranzytywności.

¹³ Relacja jest porządkiem, gdy dla każdego dwóch elementów A i B albo A dominuje nad B , albo B dominuje nad A .

¹⁴ Mając 8 czy 9 lat.

¹⁵ S. Ulam, *Przygody matematyka*, Prószyński i S-ka, Warszawa 1996.

nożyce¹⁶. Od końca XVIII wieku intranzytywny porządek znany jest z paradoksu wyborczego, zwanego przez Francuzów efektem Condorceta¹⁷. Rozważania nawiązujące do tego paradoksu doprowadziły Arrowa¹⁸ do dowodu twierdzenia o nieistnieniu procedury skutecznych wyborów, która spełniałaby elementarne założenia demokratyczne. Ze względu na kluczową pozycję w politologii matematycznej wynik ten jest porównywany¹⁹ do odkrycia w dziedzinie logiki matematycznej twierdzeń Kurta Gödla²⁰.

Ciekawym przykładem konstrukcji porządków intranzytywnych jest metoda oparta na magicznych kwadratach²¹. Kolejne kolumny (bądź wiersze) kwadratu możemy interpretować np. jako zestawy pozycji rankingowych zawodników należących do kolejnych drużyn (A, B, C). Zawodnik o rankingu wyższym zwykle zwycięża z zawodnikiem o rankingu niższym. Wtedy w turnieju, w którym rywalizują zawodnicy o rankingach wypisanych w tym samym wierszu (bądź kolumnie), zwykle drużyna A przegrywa z drużyną B ($5 < 6$, $0 < 4$, $7 > 2$), drużyna B przegrywa z C ($6 > 1$, $4 < 8$, $2 < 3$), ale drużyna C przegrywa z A ($1 < 5$, $8 > 0$, $3 < 7$).

A	B	C
5	6	1
0	4	8
7	2	3

Dzięki wykazywaniu preferencji pokarmowych analogicznych do tych, jakie względem owoców posiadał mały Ulam, kot Pittsa zapewniał sobie kompletność pożywienia. Podobne wyniki przyniosły przypominające eksperymenty Pittsa doświadczenia ze szczurami²². W tym kontekście ciekawym jest zbadanie kwestii, czy intranzytywność zapewni kompletność pokarmu także w sytuacjach, które charakteryzują się szerszą gamą dopuszczalnych sposobów podejmowania decyzji. Może w klasie zachowań zrandomizowanych znajdziemy efektywniejsze sposoby odżywiania? Próba ilościowej odpowiedzi na te pytania poświęcony jest następny paragraf.

¹⁶ Papier tępi nożyce, nożyce tną papier, papier okrywa kamień tak, że wymienione na pierwszym miejscu par przedmioty dominują nad drugimi.

¹⁷ J. W. Hołubiec, J. W. Mercik, *Techniki i tajniki głosowania*, Omnitech Press, Warszawa 1992.

¹⁸ K. J. Arrow, *Special Choice and Individual Values*, Wiley, New York 1951.

¹⁹ M. Gardner, *Time Travel and Mathematical Bewilderments*, Freeman, New York 1988.

²⁰ E. Nagel, J. R. Newman, *Twierdzenie Gödla*, PWN, Warszawa 1966.

²¹ S. Jeleński, *Lilavati*, WSiP, Warszawa 1992.

²² W. S. McCulloch, *A Hierarchy of Values Determined by Topology of Nervous Nets*, Bulletin of Mathematical Biophysics Nr 7, 1945.

4. Niedeterministyczny kot

Założmy, że kotu proponuje się trzy rodzaje pokarmu zawsze w parach po dwa, przy czym porcje pokarmowe są równie atrakcyjne pod względem kalorycznym²³ i każda ma unikalne komponenty, jednakowo potrzebne dla zachowania zdrowia kota²⁴. Przyjmijmy też, że (podobnie jak w przypadku osła) kot nie może konsumować obydwu zaproponowanych mu rodzajów pożywienia jednocześnie i że nigdy nie rezygnuje z dokonania wyboru pomiędzy pokarmami. Oznaczmy wszystkie osiem (2^3) deterministycznych funkcji wyboru przez f_k

$$f_k : \{(1,0), (2,0), (2,1)\} \rightarrow \{0,1,2\}, \quad k = 0, \dots, 7.$$

Tabela definiująca wszystkie możliwe wartości funkcji f_k jest następująca:

funkcja f_k :	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
$f_k((1,0)) =$	0	0	0	0	1	1	1	1
$f_k((2,0)) =$	0	0	2	2	0	0	2	2
$f_k((2,1)) =$	1	2	1	2	1	2	1	2
Frekwencja p_k :	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7

Funkcje f_2 i f_5 wyznaczają porządki intransytywne. Symbol p_k , $k = 0, \dots, 7$, oznacza frekwencję (częstotliwość) pojawienia się funkcji wyboru f_k w niedeterministycznym algorytmie (strategii) kota. Pamiętać należy, że

$$\sum_{k=0}^7 p_k = 1, \quad p_k \geq 0 \text{ dla } k = 0, \dots, 7,$$

bowiem opis zjawisk zachodzących z określoną częstością (frekwencją) jest jedną z interpretacji rachunku prawdopodobieństwa, którego aksjomatyka przyjmuje unormowanie do jedności i dodatnią określoność występującej w nim miary.

Oznaczmy frekwencję wystąpienia pary (k, j) przez q_m , gdzie m jest numerem pokarmu nie występującego w parze (k, j) . Takie oznaczenie jest jednoznaczne, gdyż istnieją jedynie trzy rodzaje pokarmu²⁵. Oczywiście nasze rozważania muszą uwzględniać warunek unormowania miary prawdopodobieństwa $\sum_{m=0}^2 q_m = 1$.

²³ W tej mierze są równoważne.

²⁴ W tej mierze są jednakowo nieekwiwalentne.

²⁵ Np. para $(2,0)$ występuje z frekwencją q_1 .

Przy stosowaniu sposobów wyboru f_k niedeterministycznie, z odpowiednimi intensywnościami p_k , częstotliwość ω_m , $m = 0,1,2$, występowania poszczególnych pokarmów w diecie wyznaczona na podstawie tabelki będzie wynosić odpowiednio:

- pokarmu nr0: $\omega_0 = (p_0 + p_1 + p_2 + p_3)q_2 + (p_0 + p_1 + p_4 + p_5)q_1$,
- pokarmu nr1: $\omega_1 = (p_4 + p_5 + p_6 + p_7)q_2 + (p_0 + p_2 + p_4 + p_6)q_0$,
- pokarmu nr2: $\omega_2 = (p_2 + p_3 + p_6 + p_7)q_1 + (p_1 + p_3 + p_5 + p_7)q_0$.

Powyższe trzy równości można wyjaśnić posługując się pojęciem prawdopodobieństwa warunkowego $s(j|k)$. Liczba $s(j|k)$ określa prawdopodobieństwo wybrania pokarmu numer j gdy decyzja dotyczyła pary pokarmów nie obejmującej pożywienia numer k . Ponieważ (zgodnie z definicją prawdopodobieństwa warunkowego) równość²⁶ $p(k \text{ oraz } j) = s(j|k)q_k$ jest spełniona, a zdarzenia wyboru różnych par pokarmów są rozłączne i obejmują całą przestrzeń zdarzeń elementarnych, więc dla każdego wybranego pokarmu j zachodzi następujący związek pomiędzy interesującymi nas prawdopodobieństwami:

$$\omega_j = \sum_{m=0}^2 s(j|m)q_m.$$

Opierając się na tabelce funkcji f_j otrzymamy następujące zależności:

$$\begin{aligned} s(0|2) &= p_0 + p_1 + p_2 + p_3, \\ s(0|1) &= p_0 + p_1 + p_4 + p_5, \\ s(1|0) &= p_0 + p_2 + p_4 + p_6, \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$s(1|2) = 1 - s(0|2), \quad s(2|1) = 1 - s(0|1), \quad s(2|0) = 1 - s(1|0).$$

Częstość najrzadziej pojawiającego się pokarmu, czyli funkcja $\min(\omega_0, \omega_1, \omega_2)$ wyznacza stopień kompletności pożywienia. Ponieważ $\omega_0 + \omega_1 + \omega_2 = 1$, więc najbardziej wartościowy sposób wyboru pokarmu przez kota zachodzi dla wartości prawdopodobieństw p_0, \dots, p_7 takich, że funkcja $\min(\omega_0, \omega_1, \omega_2)$ ma wartość maksymalną, czyli

$$\omega_0 = \omega_1 = \omega_2 = 1/3. \quad (4.2)$$

Każdą ósemkę parametrów (p_0, \dots, p_7) (bądź szóstkę prawdopodobieństw warunkowych $(s(1|0), s(2|0), s(0|1), s(2|1), s(0|2), s(1|2))$),

²⁶ Gdzie $p(k \text{ oraz } j)$ jest miarą koniunkcji zdarzeń: „zapropozowano parę pokarmów numer k ” i „wybrano pokarm numer j ”.

która dla ustalonej trójki (q_0, q_1, q_2) spełnia układ równań (4.2), będziemy nazywać *algorytmem optymalnym* kota.

Po wprowadzeniu parametrów $s(j|k)$ układ równań (4.2) ma następującą postać macierzową

$$\begin{pmatrix} s(0|2) & s(0|1) & 0 \\ s(1|2) & 0 & s(1|0) \\ 0 & s(2|1) & s(2|0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_2 \\ q_1 \\ q_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

a jego rozwiązanie²⁷:

$$\begin{aligned} q_2 &= \frac{1}{s} \left(\frac{s(0|1) + s(1|0)}{3} - s(0|1) \ s(1|0) \right), \\ q_1 &= \frac{1}{s} \left(\frac{s(0|2) + s(2|0)}{3} - s(0|2) \ s(2|0) \right), \\ q_0 &= \frac{1}{s} \left(\frac{s(1|2) + s(2|1)}{3} - s(1|2) \ s(2|1) \right) \end{aligned} \quad (4.4)$$

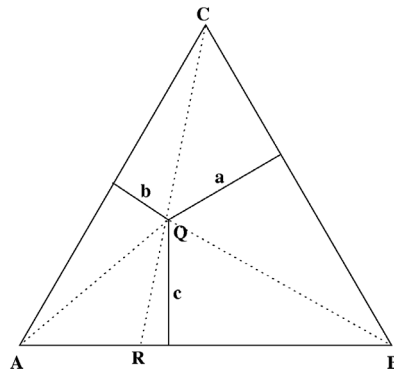
zadaje odwzorowanie trójwymiarowej kostki $[0,1]^3$ (w przestrzeni parametrów $(s(0|2), s(0|1), s(1|0))$) w trójkąt²⁸ (w przestrzeni parametrów (q_0, q_1, q_2)). Współrzędne barycentryczne²⁹ punktu tego trójkąta odczytujemy jako prawdopodobieństwa q_0 , q_1 i q_2 . Liczby te obrazują wysokości a , b , c , bądź pola powierzchni P_{QAB} , P_{QBC} , P_{QAC} wyznaczonych przez punkt Q trzech mniejszych trójkątów, bądź też długości odcinków powstałych z krawędzi trójkąta przez przecięcie ich prostymi przechodzącymi przez punkt Q i przeciwległy wierzchołek trójkąta.

²⁷ Gdzie $-s = -s(0|2)s(2|1)s(1|0) - s(1|2)s(2|0)s(0|1)$ jest wyznacznikiem macierzy parametrów $s(j|k)$.

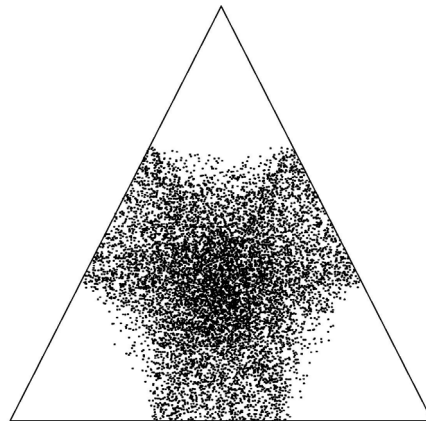
²⁸ Czyli dwuwymiarowy sympleks, bowiem prawdopodobieństwa q_k spełniają warunki

$q_0 + q_1 + q_2 = 1$, $q_k \geq 0$.

²⁹ Zob. np. M. Kordos, *Jak to robi matematyk?*, Delta Nr 6, 1999.



Dlatego np. $q_1/q_2 = a/b = P_{QBC}/P_{QAC} = |RB|/|RA|$, gdzie symbol $|RB|$ oznacza długość odcinka RB . Obraz kostki na tym sympleksie przedstawiony jest na kolejnym rysunku. Wyznacza on na sympleksie obszar częstości q_m pojawiania się poszczególnych alternatyw wyboru między dwoma pokarmami, dla których istnieje algorytm optymalny³⁰. Aby przedstawić przeciwdziedzinę interesującego nas nieliniowego odwzorowania autor zobrazował ją wartościami tego odwzorowania dla 10 000 punktów wybranych losowo względem rozkładu prawdopodobieństwa stałego na kostce³¹.



Uzasadnienie założenia takiej ekwipartycji prawdopodobieństwa można znaleźć np. w pracy Steinhausa³². Jest to znany postulat Bayesa, według

³⁰ Dla jednej trójki liczb (q_2, q_1, q_0) jest to cała rodzina algorytmów optymalnych, będących przeciwobrazem tego punktu sympleksu na kostce.

³¹ W Dodatku załączony jest tekst programu komputerowego generującego rysunki dotyczące odwzorowań omawianych w tym opracowaniu. Takie rozwiązanie umożliwia ewentualne sprawdzenie poprawności sposobu generowania rysunków. Wybór języka *Mathematica* podyktowany został chęcią otrzymania kodu programu o niewielkich rozmiarach.

³² H. Steinhaus, *Podstawy kontroli statystycznej, Zastosowania Matematyki* Nr 1, 1953.

którego w naszym zrandomizowanym modelu prawdopodobieństwo *a priori* tego, że suma frekwencji $s(j | k)$ ³³ jest mniejsza od ustalonej liczby $\alpha \in [0,1]$ wynosi α . Nieobecność rozwiązań optymalnych poza sześciokątem, widocznym w postaci zaciemnionej części powyższego rysunku, jest oczywista, bowiem jasna (niezakropkowana) część rysunku dotyczy obszarów, dla których $q_0 > 2/3$ (bądź $q_1 > 2/3$, bądź $q_2 > 2/3$), a łączna frekwencja pojawiania się par (0,1) lub (0,2) musi wynosić co najmniej $1/3$, aby zapewnić kompletność pożywienia ze względu na składnik 0 (co nie może się zdarzyć, gdyż gdy $q_0 > 2/3$, to wtedy $q_1 + q_2 = 1 - q_0 < 1/3$).

Układ równań (4.3) można przekształcić do następującej postaci

$$\begin{pmatrix} q_2 & -q_1 & 0 \\ -q_2 & 0 & q_0 \\ 0 & q_1 & -q_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s(0 | 2) \\ s(2 | 1) \\ s(1 | 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 - q_1 \\ 1/3 - q_2 \\ 1/3 - q_0 \end{pmatrix},$$

która pozwala wypisać przekształcenie odwrotne do odwzorowania zadanego równaniami (4.4). Wprowadzenie parametru λ pozwala taką transformację zapisać następująco:

$$s(0 | 2) = \frac{\lambda}{3q_2}, \quad s(2 | 1) = \frac{\lambda - 1 + 3q_1}{3q_1}, \quad s(1 | 0) = \frac{\lambda + 1 - 3q_2}{3q_0}. \quad (4.5)$$

Jednemu punktowi sympleksu odpowiada cały odcinek na jednostkowej kostce, sparametryzowany zmienną λ . Przeciwdziedzinę tego odwzorowania należy ograniczyć do jednostkowej kostki, co dla powyższych równań prowadzi do warunków:

$$\lambda \in [0, 3q_2], \quad \lambda \in [1 - 3q_1, 1], \quad \lambda \in [3q_2 - 1, 2 - 3q_1].$$

Dozwolony przedział zmienności parametru λ jest częścią wspólną tych odcinków, więc jest niepusty dla

$$\max(0, 1 - 3q_1, 3q_2 - 1) \leq \min(2 - 3q_1, 3q_2, 1)$$

i wynosi:

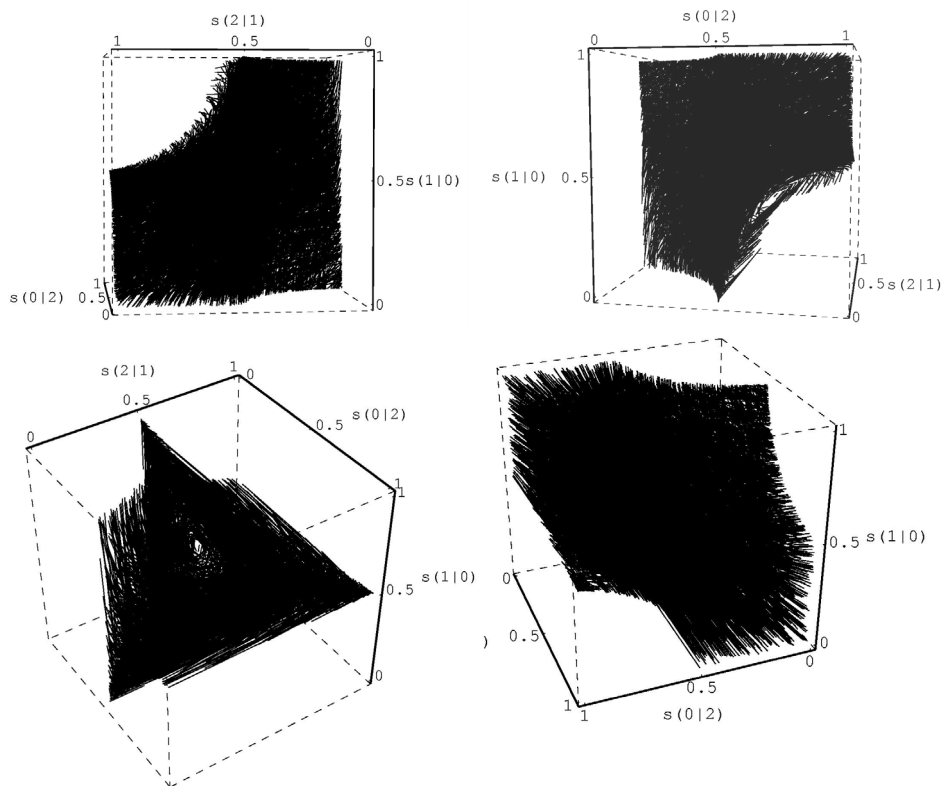
$$\lambda \in [\max(0, 1 - 3q_1, 3q_2 - 1), \min(2 - 3q_1, 3q_2, 1)].$$

Można teraz zauważyć, że dla dowolnej trójki prawdopodobieństw reprezentowanych punktem należącym do sześciokąta istnieje w zbiorze parametrów $(s(0 | 2), s(2 | 1), s(1 | 0))$ rozwiązanie optymalne³⁴. Jeżeli przedstawiane na trójkącie-sympleksie zbiory frekwencji występowania par pokarmów będziemy mierzyć miarą Lebesgue'a, to możemy stwierdzić, że z algorytmami optymalnymi mamy do czynienia w $2/3$ wszyst-

³³ Dla dowolnej wartości wskaźników k oraz j .

³⁴ Czyli obrazem jednostkowej kostki w obszarze trójkąta jest cały sześciokąt.

kich przypadków (jest to stosunek powierzchni sześciokąta foremnego wpisanego w trójkąt równoboczny). Cztery kolejne rysunki obrazują usytuowany na kostce wszystkich możliwych algorytmów przeciwobraz obszaru tych frekwencji (q_2, q_1, q_0) par pokarmowych, które umożliwiają realizację algorytmów optymalnych. Tym sposobem możemy analizować tą samą konfigurację oglądając z różnych punktów widzenia. Odcinki widoczne na rysunkach odpowiadają³⁵ pojedynczym punktom trójkąta frekwencji poszczególnych par pokarmowych. Największe zagęszczenie odcinków na kostce obserwujemy w dwóch obszarach odpowiadających algorytmom intranzytywnym³⁶. Jasny obszar w centrum kostki, który można dostrzec na drugim i trzecim rysunku tej serii, należy do algorytmów efektywnych, skutecznych na niewielkiej miary³⁷ podzbiorze frekwencji (q_2, q_1, q_0) pojawiania się par pokarmowych. Między innymi ulokowane jest tam zachowanie całkowicie przypadkowe, uwzględniające w równych ilościach wszystkie mechanizmy deterministycznego wyboru $p_j = p_k = 1/8$.



³⁵ Prócz krawędzi kostki.

³⁶ Zob. paragraf 6.

³⁷ Mało prawdopodobnym.

5. Przykład algorytmu optymalnego

Formuły (4.5) odwzorowujące trójkąt w kostkę mogą posłużyć do wyznaczenia algorytmu optymalnego w przypadkach, gdy znane są frekwencje (q_2, q_1, q_0) pojawiania się poszczególnych par produktów. Dla przykładu załóżmy, że $q_0 = 1/2$, $q_1 = 1/3$ i $q_2 = 1/6$. Wtedy zgodnie z wzorami (4.5) otrzymamy $s(0|2) = 2\lambda$, $s(2|1) = \lambda$, $s(1|0) = 1/3 + 2\lambda/3$, gdzie $\lambda \in [0, 1/2]$. Wybierając np. $\lambda = 1/4$ mamy $s(0|2) = 1/2$, $s(2|1) = 1/4$, $s(1|0) = 1/2$. Teraz możemy wskazać dowolne rozwiązanie równań (4.1), np. następujące: $p_0 = 1/2$, $p_5 = p_7 = 1/4$ i dla pozostałych parametrów $p_j = 0$.

Sprawdzając nasze rachunki otrzymamy następujące częstości występowania poszczególnych pokarmów w diecie:

$$\omega_0 = (p_0 + p_5)q_1 + p_0q_2 = 1/4 + 1/12 = 1/3,$$

$$\omega_1 = p_0q_0 + (p_5 + p_7)q_2 = 1/4 + 1/12 = 1/3,$$

$$\omega_2 = (p_5 + p_7)q_0 + p_7q_1 = 1/4 + 1/12 = 1/3.$$

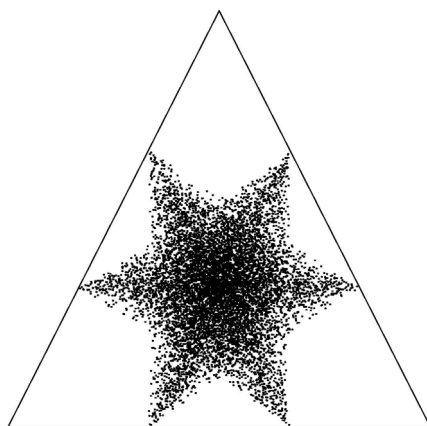
Powyższe wyliczenia frekwencji ω_j potwierdzają optymalność indeterministycznego algorytmu wyznaczonego w tym przykładzie.

6. Niedeterministyczne decyzje intranzytywne

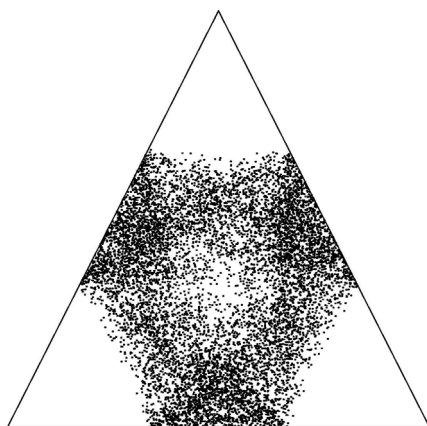
Dla wyborów losowych możemy mówić o relacji porządku *produkt nr 0* < *produkt nr 1* gdy z pary (0,1) skłonni jesteśmy częściej wybierać produkt nr 1 niż produkt nr 0, czyli wtedy, gdy $s(0|2) < s(1|2)$. Wtedy mamy do czynienia z wyborem intranzytywnym, jeśli

- albo $s(0|2) < 1/2$, $s(2|1) < 1/2$, $s(1|0) < 1/2$,
- albo $s(0|2) > 1/2$, $s(2|1) > 1/2$, $s(1|0) > 1/2$.

Są to sześciiany będące częściami kostki leżącymi po dwóch stronach jednej z jej przekątnych. Interesującym jest zobaczyć, w jakiej części sympleksu parametrów (q_2, q_1, q_0) można stosować optymalne algorytmy intranzytywne. Tworzą one sześcioramienną gwiazdę złożoną z dwóch trójkątów, z których każdy odpowiada jednemu z dwóch możliwych porządków intranzytywnych.



Przeważają one w miejscach centralnych trójkąta, w pobliżu punktu $q_0 = q_1 = q_2 = 1/3$ zrównoważonej frekwencji wszystkich par pokarmów. Jest to ciemniejszy obszar wewnątrz gwiazdy. Optymalne algorytmy tranzytywne pokrywają ten sam obszar sympleksu, co wszystkie algorytmy optymalne, jednak występują rzadziej w centrum sympleksu. Sytuację tą można zobaczyć na kolejnym rysunku. W obszarach zagęszczenia optymalnych algorytmów tranzytywnych jedna z trzech frekwencji q_0 , q_1 , q_2 traci na znaczeniu – z wyraźną przewagą występują dwie z trzech par pokarmów.



Posiadamy wystarczająco dużo informacji, aby móc porównać zakres stosowalności algorytmów optymalnych różnego typu. Przyjmijmy jednokową miarę możliwości występowania określonej proporcji pojawiania się wszystkich trzech par pokarmów. To założenie oznacza, że prawdopodobieństwo wystąpienia sytuacji określonej punktem położonym w trójką-

cie–dziedzinie parametrów (q_2, q_1, q_0) nie zależy od tych parametrów. Wtedy ilość sytuacji pozwalających stosować algorytmy optymalne stanowi 67% wszystkich możliwych sytuacji³⁸. Okoliczności pozwalających stosować algorytmy optymalne, które należą do określonego porządku intranzytywnego, jest 33%³⁹. Sytuacji sprzyjających algorytmom optymalnym o dowolnym porządku jest 44% ($4/9$), co wynika z faktu, że mierzy je powierzchnia gwiazdy foremnej, a jej pole równe jest podwojonemu polu powierzchni trójkąta odpowiadającego jednemu porządkowi intranzytywnemu pomniejszonemu o pole powierzchni sześciokąta⁴⁰ wpisanego w gwiazdę. Czyli mamy: $1/3 + 1/3 - 2/9 = 4/9$. Pojawienie się liczby $2/9$ w rachunku można łatwo wyjaśnić, jeśli spostrzec, że gwiazda foremna sześcioramienna ma dwa razy większą powierzchnię⁴¹ od sześciokąta w nią wpisanego. Liczba ta (22%) jest miarą zdarzeń sprzyjających obydwu typom algorytmów intranzytywnych.

Kończąc te ilościowe rozważania warto jest przypomnieć, że w sytuacji sprzyjającej algorytmom optymalnym zawsze możemy użyć algorytmu określającego porządek tranzytywny (patrz ostatni rysunek). Przy tym należy pamiętać, że cecha ta dotyczy prostego modelu zachowań kota i nie musi być już prawdziwa w przypadkach bardziej skomplikowanych reakcji. Może istnieją sytuacje decyzyjne, gdy jedynie porządki intranzytywne pozwalają uzyskać optymalne efekty. Zdaniem autora najbardziej intrygującym pytaniem, pozostającym w obszarze przeprowadzonych wyżej rozważań, jest rozstrzygnięcie kwestii, czy istnieje przydatny model zachowań optymalnych dający porządki intranzytywne, dla którego nie można byłoby wskazać tranzytywnego algorytmu optymalnego o jednakowych wynikach działania. Wykazanie niemożliwości budowy takich konstrukcji spowodowałoby marginalizację praktycznego znaczenia porządków intranzytywnych. Przeciwnie, wskazanie tego rodzaju modelu zmusiłoby nas do akceptacji porządkowania intranzytywnego.

7. Zakończenie

Trudno przecenić rozległość możliwych konsekwencji posługiwania się stochastycznym wariantem zasady optymalnego działania. Niniejsze opracowanie miało na celu zaprezentowanie ilościowych metod, które z

³⁸ Iloraz powierzchni sześciokąta foremnego wpisanego w trójkąt równoboczny, do powierzchni tego trójkąta jest równy $2/3$.

³⁹ Dokładniej, jest ich $1/3$, bowiem mierzy je pole powierzchni trójkąta równobocznego wpisanego w sześciokąt foremny, dopuszczający rozwiązania optymalne.

⁴⁰ Dotyczącego sytuacji, do których można stosować algorytm intranzytywny o dowolnym porządku.

⁴¹ Jej pole jest otrzymanym wynikiem, to znaczy wynosi $4/9$.

powodzeniem pozwalają analizować między innymi rolę intranzytywnych porządków, ciągle egzotycznych dla szerokich grup badaczy. Może upowszechnienie stosowania tej zasady doprowadzi do sformułowania wielu wynikających z niej inspirujących wniosków i spostrzeżeń.

W kolejne tysiąclecie weszliśmy m.in. odkryciem⁴² możliwości nieklasycznego opisu algorytmów decyzyjnych, jakim jest kwantowa teoria gier⁴³, w której subtelne reguły kwantowe określają sposób przetwarzania i kontroli informacji⁴⁴. Dzięki rozszerzeniu badanych strategii na dziedzinę kwantową⁴⁵ formalizm ten pozwala spojrzeć w nowym świetle na matematyczne właściwości modelowanych tu sytuacji. Przyszłość pokaże, czy to innowacyjne podejście spowoduje dalszą rewizję naszych poglądów o użyteczności porządków intranzytywnych.

Dodatek

Poniżej przedstawiony jest program napisany w języku *Mathematica*, generujący rysunki zamieszczone w pracy w formacie *PostScript* (*.ps), obrazujące własności rodziny algorytmów optymalnych.

```
CharacterEncoding[ISOLatin2]
```

```
(* Odwzorowanie kostka -> trójkąt *)
```

```
hexagon := Module[{p={0.,0.}},
  While[p[[1]]+p[[2]]<.0005,
    x=Random[];
    y=Random[];
    z=Random[];
    s = N[1/(x (1-y) z + (1-x) y (1-z))];
    X = s ((y + z)/3 - y z);
    Y = s ((1 + x - z)/3 - x (1-z));
    Z = 1 - X - Y ;
    If[ X<0 || Y<0 || Z<0,p = {0.,0.},
      p = {N[1/2 Abs[1+Y-X]],N[Sqrt[3]/2 Z]};];];
hexTable := Table[Point[hexagon],{10000}];
hexPlot := Show[Graphics[Join[hexTable,{Line[{{0,0},
  {.5,N[Sqrt[3]/2]},{1,0},{0,0}}]}],
  AspectRatio -> 1,
  Prolog -> PointSize[.004],
  PlotRange -> {{-.05,1.05},{-.05,N[Sqrt[3]/2]+.05}}];
```

⁴² Zob. G. P. Collins, *Gry Schrödingera*, Świat Nauki Nr 3, 2000.

⁴³ W pełni zgodna z panującym już od stulecia paradygmatem fizycznym.

⁴⁴ E. W. Piotrowski, J. Ślaskowski, *The Next Stage: Quantum Game Theory*, w *Mathematical Physics Research at the Cutting Edge* (red. C. V. Benton), Nova Science Publishers, 2004.

```

halfStar := Module[{p={0.,0.}},
  While[p[[1]]+p[[2]]<.0005,
    x = .5 Random[];
    y = .5 Random[]+.5;
    z = .5 Random[];
    s = N[1/(x (1-y) z + (1-x) y (1-z))];
    X = s ((y + z)/3 - y z);
    Y = s ((1 + x - z)/3 - x (1-z));
    Z = 1 - X - Y;
    If[ X<0 || Y<0 || Z<0,p = {0.,0.},
      p = {N[1/2 Abs[1+Y-X]],N[Sqrt[3]/2 Z]};];];
p ];

restStar := Module[{p={0.,0.}},
  While[p[[1]]+p[[2]]<.0005,
    x = .5 Random[]+.5;
    y = .5 Random[];
    z = .5 Random[]+.5;
    s = N[1/(x (1-y) z + (1-x) y (1-z))];
    X = s ((y + z)/3 - y z);
    Y = s ((1 + x - z)/3 - x (1-z));
    Z = 1 - X - Y;
    If[ X<0 || Y<0 || Z<0,p = {0.,0.},
      p = {N[1/2 Abs[1+Y-X]],N[Sqrt[3]/2 Z]};];];
p ];

halfStarTable := Table[Point[halfStar],{5000}];

starTable := Join[halfStarTable,Table[Point[restStar],{5000}]];

starPlot := Show[Graphics[Join[starTable,{Line[{{0,0},
  {5,N[Sqrt[3]/2]},{1,0},{0,0}}]}],
  AspectRatio -> 1,
  Prolog -> PointSize[.004],
  PlotRange -> {{-.05,1.05},{-.05,N[Sqrt[3]/2+.05}}];

trans := Module[{p={0.,0.}},
  While[p[[1]]+p[[2]]<.0005,
    x = Random[];
    y = Random[];
    z = Random[];
    s = N[1/(x (1-y) z + (1-x) y (1-z))];
    X = s ((y + z)/3 - y z);
    Y = s ((1 + x - z)/3 - x (1-z));
    Z = 1 - X - Y;
    If[ X<0 || Y<0 || Z<0 ||
      (x<.5 && y>.5 && z<.5) ||
      (x>.5 && y<.5 && z>.5) ,p = {0.,0.},
      p = {N[1/2 Abs[1+Y-X]],N[Sqrt[3]/2 Z]};];];
p ];

```



```

transTable = Table[Point[trans],{10000}];

transPlot := Show[Graphics[Join[transTable,
  {Line[{{0,0},{.5,N[Sqrt[3]/2]},{1,0},{0,0}}]},
  AspectRatio -> 1,
  Prolog -> PointSize[.004],
  PlotRange -> {{-.05,1.05},{-.05,N[Sqrt[3]/2]+.05}}];

(* Odwzorowanie trójkąt -> kostka *)
constant = N[4/(3 Sqrt[3])];

rectangle := Module[{a={constant Random[], constant Random[]},
  While[a[[2]]>2/3,
    a={constant Random[], constant Random[]};a];

hexDomain := Module[{q1,a,x,y,v=1,w=1},
  While[ 2/constant v + 3/2 w >1,
    a = rectangle;
    q1 = a[[2]]; x = a[[1]]-.5 constant;
    y = a[[2]]-1/3;
    v = Abs[x];
    w = Abs[y];
    {q1,(N[Sqrt[3]/2 x - .5 y + 1/3])};

line := Module[{a,q1=1,q2=1,l1=1,l2=0},
  While[l1>l2,
    a = hexDomain;
    q1 = a[[1]];
    q2 = a[[2]];
    l1 = Max[0,1-3 q1, 3 q2 -1];
    l2 = Min[2-3 q1,3 q2,1];
    {{l1/(3 q2),(1-l1)/(3 q1),(1- 3 q2 + l1)/(3(1-q1-q2))},
    {l2/(3 q2),(1-l2)/(3 q1),(1- 3 q2 + l2)/(3(1-q1-q2))}}];

linePlot[x_,y_,z_] := Show[Graphics3D[{GrayLevel[.0],Thickness[.002],
  Table[Line[line],{2000}]},
  ViewPoint->{x,y,z},
  Axes -> True,
  AxesLabel -> {" s(0|2) "," s(2|1) "," s(1|0) "},
  Ticks -> {{0,.5,1},{0,.5,1},{0,.5,1}},
  BoxStyle -> Dashing[ {.02,.02}],
  AxesStyle -> Thickness[.005]];

(* Procedury zapisu rysunków na pliki w formacie PostScript *)

Display["hex.ps", hexPlot,"EPS"];
Display["star.ps", starPlot,"EPS"];
Display["trans.ps", transPlot,"EPS"];
Display["cube1.ps",linePlot[-2.-4,.7,.3],"EPS"];

```

Display["cube2.ps",linePlot[0.6,-3,.3],"EPS"];
Diplay["cube3.ps",linePlot[1.3,3.4,2],"EPS"];
Display["cube4.ps",linePlot[3,-2,3],"EPS"];

Bibliografia

1. K. J. Arrow, *Social Choice and Individual Values*, Wiley, New York 1951.
2. G. P. Collins, *Gry Schrödingera*, Świat Nauki Nr 3, 2000.
3. M. Gardner, *Time Travel and Mathematical Bewilderments*, Freeman, New York 1988.
4. *Gry karciane*, Oficyna Wydawnicza Atena, Poznań 1999.
5. J. W. Hołubiec, J. W. Mercik, *Techniki i tajniki głosowania*, Omnittech Press, Warszawa 1992.
6. S. Jeleński, *Lilavati*, WSiP, Warszawa 1992.
7. M. Kordos, *Jak to robi matematyk?*, Delta Nr 6, 1999.
8. E. Mach, *Die Geschichte und die Wurzel des Satzes der Erhaltung der Arbeit*, Calve, Praha 1872.
9. B. Malinowski, *O zasadzie ekonomii myślenia* (rozprawa doktorska), Uniwersytet Jagielloński, Kraków 1908.
10. W. S. McCulloch, *A Hierarchy of Values Determined by Topology of Nervous Nets*, Bulletin of Mathematical Biophysics Nr 7, 1945.
11. E. Nagel, J. R. Newman, *Twierdzenie Gödla*, PWN, Warszawa 1966.
12. J. A. Paulos, *Analfabetyzm matematyczny i jego skutki*, Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe, Gdańsk 1999.
13. E. W. Piotrowski, J. Śładkowski, *The Next Stage: Quantum Game Theory*, w *Mathematical Physics Research at the Cutting Edge* (red. C. V. Benton), Nova Science Publishers, 2004.
14. A. Płocki, *Rachunek prawdopodobieństwa w szkole podstawowej*, WSiP, Warszawa 1991.
15. H. Steinhaus, *Podstawy kontroli statystycznej*, Zastosowania Matematyki Nr 1, 1953.
16. H. Steinhaus, *Wspomnienia i zapiski*, Aneks, London 1992.
17. S. Ulam, *Przygody matematyka*, Prószyński i S-ka, Warszawa 1996.