OPERATOROWA STOPA ZWROTU – ZASTOSOWANIA KLASYCZNE

(RePEc:sla:eakjkl:111PL 4-I-2000)

EDWARD W. PIOTROWSKI

W tekstach z okresu Seleucydów znajdujemy zadania z sumowaniem n wyrazów postępu geometrycznego... Inaczej niż w Egipcie ...w dawnym Babilonie...wcześnie pojawił się pieniądz i kredyt. ...Obliczano również i „procenty” składane, zapewne za pomocą interpolacji liniowej... [1]

1. Wstęp

Dla potrzeb rachunku finansowego własności postępu geometrycznego wykorzystywano już w czasach poprzedzających doniosłe osiągnięcia matematyków antycznej Grecji. Na ile formuły te stanowią sedno idei kredytu? Czy istnieje oparty na nich jednolity formalizm ujmujący całość konwencji procentowych? Takie pytania kuszą, bo wiążą się z nadzieją uproszczenia teorii, uproszczenia będącego mechanizmem stymulującym rozwój badań, narzucającym ekonomię myślenia w opisach modeli racjonalnych, więc ekonomicznych zachowań i działań.

W dobie ekspansji technologii informatycznych coraz większe znaczenie uzyskują metody automatyzacji procedur rozrachunkowych, które stwarzają zapotrzebowanie na konstruowanie sztucznych języków programowania komputerów. Języki te służą do formułowania algorytmów dotychczas wykonywanych wyłącznie przez świadome jednostki, potrafiące skutecznie komunikować się jedynie za pomocą logicznie nieprecyzyjnych i bogatych w kulturowe konteksty opisów przeprowadzanych czynności. Poniżej omówiona algebra, oparta tylko na dwóch generatorach, może opisywać w różnych swych reprezentacjach niezwykle bogatą w możliwości aplikacyjne rodzinę operacji formalnych, która prócz znanych, tradycyjnych technik finansowych, zawiera nowe propozycje ilościowego spojrzenia na ideę kredytu. Rozwijane w minionej dekadzie komputerowe rachunki symboliczne, znane powszechnie choćby ze stosowania narzędzi programistycznych w rodzaju pakietów *Maple*, czy *Mathematica*, patrz [2], pozwalają na indywidualne wdrożenia obliczeń o charakterze operacyjnym, powiązanych z końcowym wykorzystaniem numerycznym algebraicznie przekształconych i uproszczonych, symbolicznie zapisanych procedur. Rozdzielenie uniwersalnych własności algebraicznych rachunku symbolicznego od specyficznych własności, charakterystycznych jedynie dla określonej w modelu (np. finansowym) reprezentacji numerycznej przeprowadzanych operacji, poważnie skraca opis algorytmów i ich programowanie, czyniąc je bardziej ogólnymi i wolnymi od przypadkowych błędów, mnożących się przy braku syntetycznego oglądu całości zagadnienia.

Omawianą w tym opracowaniu algebrę stopy zwrotu generuje zbiór dwóch operacji $\mathbf{r}$ i $\mathbf{s}$ których komutator $[\mathbf{r}, \mathbf{s}] := \mathbf{r} \circ \mathbf{s} - \mathbf{s} \circ \mathbf{r}$ (symbol $\mathbf{r} \circ \mathbf{s}$ oznacza złożenie, tzn. wykonanie operacji $\mathbf{s}$, a po niej operacji $\mathbf{r}$) pozwala dyskontować kapitał do jego wartości w ustalonym terminie. W związku z tym warto zauważyć, że komutator gra kluczową rolę w całej fizyce teoretycznej, zob. np.[3], łącząc ze sobą teorie klasyczne z kwantowymi. Algebra generowana elementami $\mathbf{r}$ i $\mathbf{s}$ o własnościach $[\mathbf{r}, [\mathbf{r}, \mathbf{s}]] = [\mathbf{s}, [\mathbf{r}, \mathbf{s}]] = 0$ nosi nazwę *algebry Heisenberga-Weyla*, bądź *algebry kanonicznych relacji komutacji* [4]. Trzy klasyczne reprezentacje owej algebry są doskonale znane czytelnikom podręczników matematyki finansowej: jedna na przestrzeni funkcji gładkich zmiennej rzeczywistej (czasu), dwie na przestrzeni ciągów, elementy których numeruje dyskretna zmienna czasowa. Autor proponuje powiązanie nazw tych trzech reprezentacji z odkrywcami formuł pozwalających (dla odpowiednich przedstawień) wyznaczać jawną postać wyniku działania komutatora $[\mathbf{r}, \mathbf{s}]$, czyli najprostszej (bo polegającej na przeskalowaniu wartości liczbowej kapitału), a zarazem podstawowej operacji finansowej. Istnieje jeszcze wiele innych reprezentacji tej algebry, ciągle nieznanych praktykom, a posiadających bardzo interesujące konteksty finansowe. Niektórym z nich, związanym z przestrzeniami swoistymi dla opisu procesów stochastycznych, autor poświęci drugą część rozpoczętego tym artykułem opracowania.

W podstawach wszystkich rachunków dla reprezentacji naszej algebry można doszukać się tzw. *formuły teleskopowej.* Idea tego wzoru, a przynajmniej konsekwencje, wydaje się znacznie starsza od wynalazku teleskopu. Poniższy tekst zasługuje na uwagę także z powodów dydaktycznych – przedstawia on wyjątkowo krótki wariant kompletnego elementarnego dowodu poprawności rozwinięcia funkcji w szereg Taylora z dokładnie określoną resztą, wraz z dwoma jego dyskretnymi analogonami, a przecież rozwinięcie Taylora stanowi podstawę zastosowań analizy matematycznej i omawiane jest na wszelkiego rodzaju wykładach z tzw. matematyki stosowanej. Dyskretne formuły Newtona służą od wieków w rozwiązywaniu problemów praktycznych związanych z zagadnieniem interpolacji. Tożsamości kombinatoryczne pojawiające się we wszystkich poniżej omawianych reprezentacjach algebry stopy należą do znanych od dawna formuł, rzadko razem zestawianych we współczesnych opracowaniach. Większą ich część (dla wariantu $a = 0$) znajdziemy w artykule O.V. Viskova [5]. Podstawowe z pośród tu przedstawionych własności algebraicznych różnych rodzajów stóp odnaleźć można we wcześniejszej pracy autora [7]. Zestawienie istniejących konwencji opisu stóp procentowych znajduje się w pracy [8].

2. Algebra stopy

Przejdźmy do ilościowych definicji wyżej wspomnianej pary operacji finansowych. Przypomnijmy, że różniczkową (chwilową) stopę zwrotu r_t definiuje następujący jej związek z funkcyjną zależnością wartości kapitału $k(t)$ od czasu t:

$$k(t_2) = e^{\int_{t_1}^{t_2} r(\tau)d\tau} k(t_1) \tag{2.1}$$

która po zróżniczkowaniu obydwu jej stron po czasie t_2 daje następującą formułę dla stopy zwrotu $r(t)$:

$$r(t)\, k(t) = \frac{d}{dt} k(t)$$

Z tej przyczyny, w różniczkowej konwencji opisu ewolucji wielkości kapitałowych, jest naturalnym uznanie operatora różniczkowania

$$\mathbf{r} := \frac{d}{dt} \tag{2.2}$$

za operator stopy zwrotu, bowiem w działaniu na funkcję kapitału daje w wyniku chwilowy przyrost kapitału wyrażający się wielkością $r(t)\, k(t)$. Definicja (2.2) oznacza, że działając operatorem stopy na dowolną funkcję kapitału należącą do klasy funkcji różniczkowalnych $\{f(t)\}$, dostaniemy w efekcie szybkość jej zmiany, czyli jej pochodną:

$$\mathbf{r}\, f(t) := \frac{df(t)}{dt}$$

Wygodnym okaże się rozważenie, łącznie z operacją różniczkowania, odwrotnego do niej operatora całkowania:

$$\mathbf{s} := \int_a^t d\tau$$

czyli

$$\mathbf{s}\, f(t) := \int_a^t d\tau\, f(\tau)$$

gdzie a oznacza dowolną ustaloną chwilę czasu. Chcąc zachować przejrzystość notacji operatorowej autor przyjął konwencję wypisywania zmiennej całkowania bezpośrednio po znaku całki. Interpretacja finansowa operacji $\mathbf{s}$ jest oczywista – wartością tego operatora na dowolnej chwilowej prędkości zmiany kapitału jest całkowity przyrost tego kapitału liczony od chwili a

$$\mathbf{s}\,\frac{dk}{dt} = \int_a^t d\tau\,\frac{dk}{d\tau} = k(t) - k(a)$$

Wraz z operatorem tożsamościowym (tradycyjnie oznaczamy go symbolem $\mathbf{1}$) trójka $\{\mathbf{1}, \mathbf{r}, \mathbf{s}\}$ generuje na klasie funkcji $C^\infty(\mathbb{R})$ łączną, choć nieprzemienną algebrę z naturalnymi działaniami składania operacji, ich dodawania, oraz mnożenia operacji przez liczby. Strukturę tą ze względów interpretacyjnych nazwiemy *algebrą stopy.* Posiada ona proste i przydatne własności, a jej realizacjom na przestrzeniach innych niż $C^\infty(\mathbb{R})$, jednak mających interesujący kontekst finansowy, będą poświęcone dalsze paragrafy tego artykułu. Opisaną realizację różniczkową, z przyczyn wyjaśnionych niżej, nazwiemy *reprezentacją Bernoulliego* algebry stopy.

3. Reprezentacja Bernoulliego

Formuła Cauchy'ego. Najprostszą do określenia klasą operatorów algebry stopy są jednorodne jednomiany różniczkowań $\mathbf{r}^m$. Posiadamy efektywną recepturę prowadzącą do wyznaczenia ich działania, choćby w postaci wyznaczania granic kolejnych ilorazów różniczkowych. Przez analogię do operatora stopy zwrotu $\mathbf{r}$ operator $\mathbf{r}^m$ nazwiemy operatorem stopy m-tego rzędu, a odpowiednią funkcję $r_m(t)$ zdefiniowaną równością

$$\mathbf{r}^m f(t) = r_m(t)\, f(t)$$

różniczkową stopą m-tego rzędu. W poprzednim paragrafie mieliśmy do czynienia ze stopą pierwszego rzędu $r(t) = r_1(t)$. Choć trudniejszy w bezpośrednich rachunkach, operator $\mathbf{s}$ posiada pewną ciekawą własność, która pozwala wyznaczyć wynik działania wielokrotnego jego złożenia $\mathbf{s}^m := \overbrace{\mathbf{s} \circ \mathbf{s} \circ \cdots \circ \mathbf{s}}^{m \text{ razy}}$ przez jednokrotne zastosowanie operacji $\mathbf{s}$ na nieco odmiennym elemencie jego dziedziny. Znamy bowiem formułę wielokrotnego całkowania pochodzącą od Cauchy'ego

$$\mathbf{s}^m f(t) =$$

(3.1)
$$= \int_a^t d\tau_1 \int_a^{\tau_1} d\tau_2 \;\ldots \int_a^{\tau_{m-1}} d\tau_m\, f(\tau_m) = \int_a^t d\tau\, \frac{(t-\tau)^{m-1}}{(m-1)!}\, f(\tau) =$$

$$= \mathbf{s}\, \frac{(\tau - t)^{m-1}}{(m-1)!} f(t)\bigg|_{\tau = t}$$

której dowód indukcyjny jest elementarny.

Dowód. Dla $m = 1$ obie strony formuły (3.1) są taką samą całką $\int_a^t d\tau\, f(\tau)$. Dla $m+1$-krotnej całki mamy

$$\mathbf{s}^{m+1} f(t) = \mathbf{s} \int_a^t d\tau\, \frac{(t-\tau)^{m-1}}{(m-1)!}\, f(\tau) =$$

$$= \int_a^t d\tau \int_a^\tau d\tau_1\, \frac{(\tau - \tau_1)^{m-1}}{(m-1)!}\, f(\tau_1) = \int_a^t d\tau \int_a^\tau d\tau_1\, f(\tau_1)\, \frac{d}{d\tau}\, \frac{(\tau-\tau_1)^m}{m!} =$$

$$\int_a^t d\tau_1 \int_{\tau_1}^t d\tau\, f(\tau_1)\, \frac{d}{d\tau}\, \frac{(\tau - \tau_1)^m}{m!} = \int_a^t d\tau_1\, \frac{(t-\tau_1)^m}{m!}\, f(\tau_1)$$

gdzie pierwsza z równości wynika z założenia indukcyjnego, a czwarta z zamiany kolejności całkowania. Przedstawienie działania operatora $\mathbf{s}^{m+1}$ za pomocą ostatniej całki jest końcowym krokiem dowodu przez indukcję formuły Cauchy'ego. □

Złożenia operacji podstawowych. Określmy w reprezentacji Bernoulliego działanie operacji złożonej polegającej na kolejnym wykonaniu dwóch operacji elementarnych $\mathbf{r}$ i $\mathbf{s}$. Można ją, wybierając rożne kolejności składania, przeprowadzić na dwa sposoby

$$\mathbf{s} \circ \mathbf{r}\, f(t) = \int_a^t d\tau \frac{df(\tau)}{d\tau} = f(t) - f(a)$$

bądź

$$\mathbf{r} \circ \mathbf{s}\, f(t) = \frac{d}{dt} \int_a^t d\tau\, f(\tau) = f(t) = \mathbf{1}\, f(t)$$

$$\mathbf{r} \circ \mathbf{s} = \mathbf{1} \tag{3.2}$$

czyli operatory $\mathbf{r}$ i $\mathbf{s}$ są nieprzemienne. Z uwagi na ostatni rezultat wyrażenia $\mathbf{r} \circ \mathbf{s}$ występujące w złożeniach z innymi elementami algebry można pominąć we wszelkich rachunkach w reprezentacji Bernoulliego.

Jak już wspominaliśmy na wstępie, komutatorem $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$ dwóch operatorów $\mathbf{u}$ i $\mathbf{v}$ nazywamy różnicę ich złożeń w różnych kolejnościach, czyli wielkość $[\mathbf{u}, \mathbf{v}] := \mathbf{u} \circ \mathbf{v} - \mathbf{v} \circ \mathbf{u}$. Dla jedynej nieprzemiennej pary generatorów algebry stopy w reprezentacji Bernoulliego otrzymamy

$$[\mathbf{r}, \mathbf{s}]\, f(t) = \mathbf{r} \circ \mathbf{s}\, f(t) - \mathbf{s} \circ \mathbf{r}\, f(t) = f(a) = e^{\int_t^a d\tau\, r(\tau)} f(t)$$

gdzie ostatnia równość wynika z definicji stopy (2.1). Wielkość $[\mathbf{r},\mathbf{s}]$ posiada więc fundamentalną interpretację finansową – jest operatorem dyskontującym kapitał $f(t)$ do jego wartości na ustaloną chwilę a, czyli do $f(a)$. Operator taki w teorii równań różniczkowych nosi nazwę operatora rezolwenty. Komutator $[\mathbf{r},\mathbf{s}]$ – okazujący się operatorem mnożenia przez funkcję liczbową, więc komutujący (przemienny) z operatorami $\mathbf{r}$ i $\mathbf{s}$ – pozwala porównywać wartości kapitału w różnych chwilach czasowych przez odniesienie ich do jednakowej miary kapitałowej – dowolnej wielkości nominującej kapitał w ustalonej chwili a. Warto zwrócić uwagę, że operacja dyskontowania $[\mathbf{r},\mathbf{s}]$, chociaż rachunkowo prostsza od $\mathbf{r}$ i $\mathbf{s}$ (bo polegająca jedynie na przemnożeniu elementów $f(t)$ dziedziny reprezentacji przez liczbę), jest w kontekście algebraicznym operacją w stosunku do tamtych złożoną (bo skonstruowaną z generatorów $\mathbf{r}$ i $\mathbf{s}$ algebry stopy).

Suma teleskopowa. Wszelkie obliczenia finansowe w kontekście algebry stopy można wyrazić jako sumę operacji w postaci $\mathbf{s}^{k_1}\circ\mathbf{r}^{k_2}\circ\mathbf{s}^{k_3}\circ\mathbf{r}^{k_4}\circ\ldots$, gdzie ilości złożeń k_i operacji jednego typu $(i=1,\ldots)$ są dowolnymi nieujemnymi liczbami całkowitymi. Znajomość komutatora $[\mathbf{r},\mathbf{s}]$ pozwala wszystkie operatory $\mathbf{s}$ „przepchać" na lewą stronę (czyli do końcowego etapu obliczeń) takich operacji złożonych (wielokrotnie wykorzystując tożsamość $\mathbf{r}\circ\mathbf{s}=\mathbf{s}\circ\mathbf{r}+[\mathbf{r},\mathbf{s}]$). Dzięki temu zabiegowi jedynymi nieznanymi jeszcze typami złożeń generatorów algebry stopy są wyrażenia postaci $\mathbf{w}_m:=\mathbf{s}^m\circ\mathbf{r}^m$. Jest tak gdyż dla $k>l$ wyrażenie $\mathbf{s}^k\circ\mathbf{r}^l=\mathbf{s}^{(k-l)}\circ\mathbf{s}^l\circ\mathbf{r}^l$ to złożenie operacji typu $\mathbf{s}^m\circ\mathbf{r}^m$ i $\mathbf{s}^n$. Analogicznie możemy przedstawić wyrażenie $\mathbf{s}^l\circ\mathbf{r}^k$. Aby operatory $\mathbf{w}_m$ zastąpić wyrażeniami niższych rzędów i w ten sposób, stosując rekurencję, wyznaczyć efektywnie działanie dowolnego operatora należącego do algebry stopy, zastosujmy znany choćby z wyznaczania sumy szeregu geometrycznego sposób przedstawiania $(n+1)$-szego wyrazu ciągu za pomocą sumy wyrazów niższych rzędów. Trik ów polega na odjęciu dwóch przesuniętych względem siebie szeregów utworzonych na bazie tego samego ciągu wyrażeń

$$\sum_{k=0}^{m}(\mathbf{w}_k-\mathbf{w}_{k+1})=\mathbf{w}_0-\mathbf{w}_{m+1} \tag{3.3}$$

Po uwzględnieniu interesującej nas postaci operatora $\mathbf{w}_m$ otrzymamy następującą tożsamość operatorową

$$\sum_{k=0}^{m}\mathbf{s}^k\circ(\mathbf{1}-\mathbf{s}\circ\mathbf{r})\circ\mathbf{r}^k=\mathbf{1}-\mathbf{s}^{m+1}\circ\mathbf{r}^{m+1} \tag{3.4}$$

Sumy postaci (3.3) są nazywane *sumami teleskopowymi* [9] bowiem m.in. opisują sposób wyznaczania długości złożonego teleskopu, doskonale obrazującego własność wzajemnego redukowania się zachodzących na siebie segmentów o jednakowej długości. Dlatego odwołując się do tożsamości (3.4) będziemy nazywać ją formułą teleskopową. Wyrażenie w nawiasach jest komutatorem $[\mathbf{r}, \mathbf{s}]$, więc możemy zastąpić je czynnikiem dyskontującym prawą stronę do chwili a. Z prawej strony operatora $\mathbf{s}^k$ będzie znajdować się wielkość stała (niezależna od t), a $\mathbf{s}^k$ w działaniu na stałą mnoży ją przez czynnik $\frac{(t-a)^k}{k!}$ (wynik k-krotnego wycałkowania funkcji stałej). W ten sposób powyższa tożsamość operatorowa zastosowana dla dowolnej funkcji $f(t)$ z klasy C^{k+1} da następującą równość

$$\sum_{k=0}^{m} \mathbf{s}^k \circ (\mathbf{1} - \mathbf{s} \circ \mathbf{r}) \circ \mathbf{r}^k f(t) = \sum_{k=0}^{m} \frac{(t-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) = f(t) - \mathbf{s}^{m+1} f^{(m+1)}(t)$$

gdzie $f^{(k)}(a)$ oznacza k-tą pochodną funkcji $f(t)$ w punkcie $t = a$.

Komutator – operacja dyskontowania. Stosując formułę Cauchy'ego otrzymaliśmy równość, która przedstawia funkcję $f(t)$ poprzez znany z podręczników analizy matematycznej szereg Taylora (!) z precyzyjnie wyznaczoną resztą w postaci całkowej [4] rzędu $m + 1$

$$f(t) = [\mathbf{r}, \mathbf{s}]^{-1} f(a) = \sum_{k=0}^{m} \frac{(t-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^t d\tau \, \frac{(t-\tau)^m}{m!} f^{(m+1)}(\tau)$$

gdzie $[\mathbf{r}, \mathbf{s}]^{-1}$ jest operatorem dyskontującym kapitał z chwili a do chwili t, czyli operatorem odwrotnym do $[\mathbf{r}, \mathbf{s}]$, więc $[\mathbf{r}, \mathbf{s}]^{-1} \circ [\mathbf{r}, \mathbf{s}] = [\mathbf{r}, \mathbf{s}] \circ [\mathbf{r}, \mathbf{s}]^{-1} = \mathbf{1}$. W dobrze znany z analizy matematycznej sposób możemy stan kapitału na chwilę t, określony stosownie gładką funkcją $f(t)$ aproksymować coraz to dokładniej za pomocą ciągu stóp różniczkowych kolejnych rzędów

$$f(t) \simeq \sum_{k=0}^{m} \frac{(t-a)^k}{k!} r_k(a) f(a)$$

czyli

$$[\mathbf{r}, \mathbf{s}]^{-1} = e^{\int_a^t d\tau \, r(\tau)} = e^{(t-a) \frac{d}{d\tau}|_{\tau=a}} \simeq \sum_{k=0}^{m} \frac{(t-a)^k}{k!} r_k(a) \tag{3.5}$$

Druga z powyższych równości jest konsekwencją zastosowania powszechnie przyjętej definicji funkcji wykładniczej, tzn. $e^x := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$. W ten sposób wszystkie możliwe operacje finansowe algebry stopy, łącznie z najpopularniejszymi operacjami określania procentu $\mathbf{r}$, wyznaczania przyrostu kapitału $\mathbf{s}$ i operacją ustalania dyskonta (komutator $[\mathbf{r}, \mathbf{s}]$), przeprowadzanymi w dowolnych chwilach trwania procesu kapitałowego, sprowadziliśmy do znajomości ciągu $1, r_1, r_2, r_3, \ldots$ stóp różniczkowych kolejnych rzędów dla ustalonej chwili czasowej a. Formę rozwinięcia w szereg zgodną ze wzorem (3.5) odkrył już w 1693 roku Johann Bernoulli, patrz np. [10], dlatego autor tego opracowania określa omawianą reprezentację algebry stopy mianem *reprezentacji Bernoulliego*.

Przekształcenia kanoniczne. Dla wygenerowania algebry stopy zamiast operatorów $\mathbf{r}$ i $\mathbf{s}$ można wybrać inną parę generatorów $\mathbf{v}$ i $\mathbf{w}$. Odwzorowania generatorów $(\mathbf{r}, \mathbf{s}) \to (\mathbf{v}, \mathbf{w})$ zachowujące komutator (czyli takie, dla których $[\mathbf{v}, \mathbf{w}] = [\mathbf{r}, \mathbf{s}]$) noszą nazwę *przekształceń kanonicznych* [3]. Grupa transformacji kanonicznych stanowi od ponad stu lat obiekt intensywnych badań fizyków. Podstawową korzyścią zajmowania się transformacjami kanonicznymi jest opis modelu o określonym sposobie dyskontowania w języku odpowiednich „współrzędnych", czyli takich operacji algebraicznych $\mathbf{v}$ i $\mathbf{w}$, na bazie których potrzebne w trakcie analizy ilościowej rachunki stają się szczególnie proste, więc też przejrzyste i szybkie w wykonaniu. Transformacje kanoniczne są zdefiniowane na poziomie algebry stopy, dlatego dotyczą wszystkich jej reprezentacji. Spośród nich można wyróżnić liniowe transformacje kanoniczne, czyli takie, że $\mathbf{v} = q_{11}\mathbf{r} + q_{12}\mathbf{s}$, $\mathbf{w} = q_{21}\mathbf{r} + q_{12}\mathbf{s}$. Z warunku niezmienniczości komutatora $[\mathbf{v}, \mathbf{w}] = (q_{11}q_{22} - q_{12}q_{21})[\mathbf{r}, \mathbf{s}] = [\mathbf{r}, \mathbf{s}]$ wynika, że macierz takiego odwzorowania $U = (q_{ij})$ ma jednostkowy wyznacznik $det(U) = 1$, czyli jest macierzą unimodularną [4].

Na przykład do najprostszych odwzorowań unimodularnych należą te, które zachowują zbiór generatorów (z dokładnością do znaków). Reprezentują je macierze U postaci

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

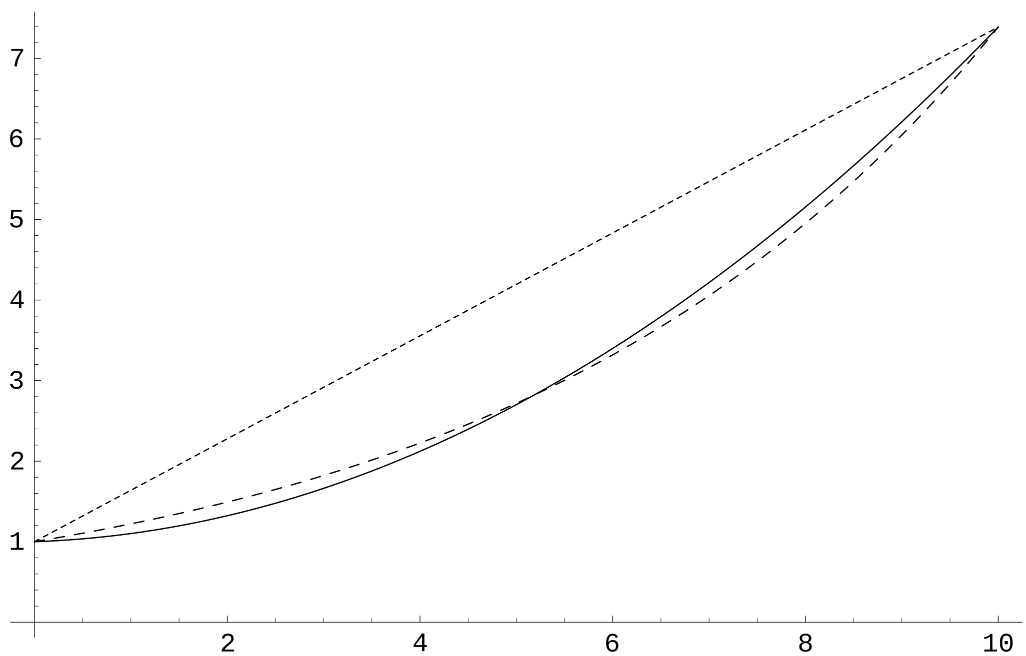
Łatwo zauważyć, że w reprezentacji Bernoulliego wymienione odwzorowania kanoniczne są trzema różnymi rodzajami zmiany czasowego kontekstu modelu. Pierwsza z transformacji (3.6) prowadzi do zmiany znaku zmiennej czasowej $-t \to t$, druga wprowadza konwencję obliczania przyrostów kapitału w kierunku przeciwnym do przyrostu czasu, a trzecia zmienia porządek czasowy na przeciwny (i nie jest tożsama z pierwszą).

Jeżeli dla czytelnika wypowiedzi podobne do poprzedniego zdania są w jakiejkolwiek mierze niejasne, może odwołać się do wzorów transformacyjnych (3.6), które najprecyzyjniej ujmują intencje autora. Zaprezentowana metoda ingerencji w sposoby interpretacji zmiennej czasowej w reprezentacji algebry okazała się możliwa, gdyż sama algebra Heisenberga-Weyla nie zawiera odniesień do czasu, ujmując proces kapitałowy w konwencji archimedesowej [11]. Z uwagi na rozległość zasygnalizowanego zagadnienia, i różnorodne pożytki płynące z badania finansowych aspektów transformacji kanonicznych, autor przedstawi ten temat w odrębnym opracowaniu.

Skale czasowe. Zmieniając jednostkę czasową używaną do opisu procesu kapitałowego powinniśmy także tak przeskalować stopy wszystkich rzędów aby zależności czasowe wielkości kapitału, a więc wynik działania operacji dyskontowania, nie uległy zmianie. Modyfikacja jednostki czasu prowadzi do podstawienia $(t-a) \to \frac{(t-a)}{\lambda}$, czyli np. wybierając jednostkę miesięczną wszystkie formuły wyrażone w jednostkach rocznych winny być w stosownych miejscach skorygowane o czynnik $\lambda = 12$. Niezmienniczość skalowania operacji dyskonta $[\mathbf{r}, \mathbf{s}]$ oznacza, że dla zachowania formuły (3.5) powinniśmy dokonać następującego podstawienia $r_k(a) \to \lambda^k r_k(a)$ odnośnie stopy k-tego rzędu, dla wszystkich rzędów $(k = 1, 2, \ldots)$. Dla przykładu, zmiana jednostki czasowej z rocznej na miesięczną powoduje pojawienie się we wzorach w miejscu rocznej stopy drugiego rzędu wyrażenia $12^2\, r_2(a)$ i by liczbowo było ono równe poprzedniej rocznej stopie drugiego rzędu musimy wybrać miesięczną stopę drugiego rzędu 144 razy mniejszą od jej rocznego odpowiednika. Jest zrozumiałe, że takie manipulacje, będąc niezmienniczymi dla czynnika dyskonta, nie mogą powodować zmiany jakości przybliżenia, polegającego na pominięciu reszty odpowiedniego rzędu w szeregu Taylora. Przy ustalonym ciągu stóp kolejnych rzędów o jakości tego przybliżenia decyduje stosunkowo krótki okres związany z całym przebiegiem procesu kapitałowego (słowo krótki nabiera ilościowego znaczenia jedynie w kontekście ciągu stóp). W okresach inflacji, czy niezwykle zyskownych przedsięwzięć kapitałowych czas „upływa" znacznie szybciej.

Przykłady. Zadanie dyskonta za pomocą ciągu stóp $r_1(a) = r = const.$, $r_2(a) = 0$, $r_3(a) = 0$, $\ldots$ określa formułę oprocentowania zwaną procentem prostym ($[\mathbf{r}, \mathbf{s}]^{-1} = 1 + (t-a)r$), zaś ciąg $r_1(a) = r = constans$, $r_2(a) = r^2$, $r_3(a) = r^3$, $\ldots$ to stały procent w konwencji kapitalizacji ciągłej (wtedy $[\mathbf{r}, \mathbf{s}] = e^{-(t-a)r}$).

Dla przykładu rozważymy dziesięcioletni proces kapitałowy taki, że na początku tego okresu czasu kapitał wynosił $f(0) = 1$. Niech za wzorzec wzrostu tego kapitału posłuży jego powiększanie się o stały roczny procent $r = 0,2$ w konwencji kapitalizacyjnej ciągłej, czyli $f(t) = e^{0,2 \cdot t}$. Na rysunku krzywa przerywana obrazuje ten wykładniczy proces wzorcowy. Na tle tak określonych zmian wzorcowych rozważmy klasę procesów, dla których kapitał zmienia się w sposób ciągły w czasie, osiągając w chwilach początkowej ($t = 0$) i końcowej ($t = 10$) takie same wartości jak w procesie wzorcowym. Za miarę niedopasowania danego procesu do procesu wzorcowego wybierzmy średnie odchylenie kwadratowe danego kapitału od wysokości kapitału dla procesu wzorcowego. Rozważmy teraz dwuparametrową podklasę procesów, opisaną ciągiem stóp $r_1(0)$, $r_2(0)$, 0, 0, ..., czyli procesów opisywanych krzywymi (wielomianami) drugiego stopnia. Wśród nich najbardziej dopasowany okazuje się proces określony następującymi parametrami (stopami pierwszego i drugiego rzędu): $r_1 = 0,04164$, $r_2 = 0,1195$, przedstawiony na rysunku krzywą ciągłą.



Niespodziewanym efektem jest prawie czterokrotna różnica pomiędzy stopami pierwszego rzędu dla procesu o wykładniczym wzroście i najlepiej do niego dopasowanym procesie opisywanym wielomianem kwadratowym. Obrazuje ona iluzje jakie może stwarzać powszechne kierowanie się jedynie wielkością stopy procentowej pierwszego rzędu. Decydującym o efekcie dobrego dopasowania do wzorca parametrem jest tu stopa drugiego rzędu, prawie trzykrotnie wyższa niż dla procesu wykładniczego. Algorytm wyznaczający owe stopy zwrotu i generujący zamieszczony tu rysunek autor przedstawia w Dodatku. Analizując wykres procesu dostrzegamy jak stosunkowo wiernie ciągła krzywa odtwarza proces wzorcowy. Należący do klasy proces określony w konwencji procentu prostego (na rysunku linia prosta) jest na tyle rozbieżny w partii środkowej wykresu, w stosunku do procesu wzorcowego, że w trakcie jego trwania byłby przerwany w celu dokonania arbitrażu polegającego na przejściu do procesu wzorcowego. Takie niepożądane zjawisko niwelowane jest najczęściej poprzez ograniczenie płynności kapitału. Wydaje się niewłaściwą praktyka polegająca na stronieniu od bardziej subtelnych technik rachunkowych kosztem zwiększania ryzyka spowodowanego częściową utratą płynności.

Reprezentacja Bernoulliego jest jedną z wielu różnych możliwych realizacji podstawowego twierdzenia analizy matematycznej o aproksymacji funkcji gładkich wielomianami. Ta idea Weierstrassa pozwala spojrzeć na zagadnienia stopy procentowej w pełni uniwersalnie, wiążąc pojęcie stopy zwrotu ze stosownie do sytuacji wybranym typem wielomianów stanowiących bazę metody aproksymacyjnej. Niczym rozważymy taką odmienną od reprezentacji Bernoulliego realizację algebry, przyjrzyjmy się dyskretnemu analogonowi opisu różniczkowego stopy.

4. Reprezentacja dolna Newtona

Reprezentacja generatorów algebry stopy. Zamiast infinitezymalnych zmian czasowych rozważymy dyskretną dziedzinę czasową, w której zmienna czasowa t jest elementem dziedziny będącej zbiorem liczb naturalnych (bądź całkowitych). Czas upływający pomiędzy kolejnymi całkowitymi wartościami zmiennej t nie musi koniecznie odpowiadać jednakowym odstępom czasowym określonym w mierze fizycznej (astronomicznej). Nieciągłość dziedziny czasowej wymaga zastąpienia rachunku różniczkowego rachunkiem różnicowym. Operator stopy $\mathbf{r}$ będzie więc reprezentowany operatorem różnicowym

$$\mathbf{r}\, f(t) \;= \underline{\Delta}\, f(t) := f(t+1) - f(t)$$

Symbol $\underline{\Delta}$ oznaczający operator różnicowy występuje z dolnym podkreśleniem bowiem operator skończonej różnicy można zdefiniować na dwa odmienne sposoby. Ten drugi zostanie opisany w następnym paragrafie, gdyż dotyczy reprezentacji algebry stopy dualnej do tu omawianej. Dla dbałości o poprawność przedstawionych niżej wzorów przyjmiemy od tego miejsca, że t i a oznaczają współrzędne dwóch chwil czasowych, uporządkowane tak, by zachodziła nierówność liczbowa $t \geq a$. Nie oznacza to jednak, że chwila a jest wcześniejsza od chwili t. Także poprawnym jest opis procesów, w którym wcześniejsze chwile czasu są parametryzowane większymi liczbami – dla Archimedesa znającego nasz kalendarz mierzony latami termin zwrotu długu byłby oznaczony liczbą minejszą niż data jego zaciągnięcia (przyjmujemy, że lata p.n.e. numerują liczby dodatnie). Operator przyrostu kapitałowego **s**, z uwagi na analogie w reprezentacji Bernoulliego, będzie miał postać

$$\mathbf{s} := \sum_{\tau=a}^{t-1}$$

czyli

$$\mathbf{s}\, f(t) := \sum_{\tau=a}^{t-1} f(\tau)$$

Wyjaśnienie korespondencji pomiędzy operacjami $\int_a^b d\tau$, a $\sum_{\tau=a}^{b-1}$ znajdziemy w książce [9]. Dla prawidłowego stosowania rachunku operatorowego warto rozważyć tu pewną sytuację. Rozpatrzmy funkcję $g(t) := f(t+c)$. Wtedy

$$\mathbf{s}\, f(t+c) = \mathbf{s}\, g(t) = \sum_{\tau=a}^{t-1} g(\tau) = \sum_{\tau=a}^{t-1} f(\tau+c)$$

więc przesuwając argument funkcji na którą działa operator **s** należy zadbać o niezmienianie górnej granicy sumowania. Komutator generatorów algebry stopy będzie działał następująco

$$[\mathbf{r}, \mathbf{s}]\, f(t) = \left(\mathbf{r} \sum_{\tau=a}^{t-1} f(\tau)\right) - \mathbf{s}\, f(t+1) + \mathbf{s}\, f(t) =$$

$$= f(t) - \sum_{\tau=a}^{t-1} f(\tau+1) + \sum_{\tau=a}^{t-1} f(\tau) = f(t) - f(t) + f(a) = f(a)$$

czyli pozostanie w dalszym ciągu operatorem dyskontującym kapitał do chwili a.

Formuła Cauchy'ego. Przed rozpatrzeniem sumy teleskopowej dla bieżącej reprezentacji algebry stopy pozostaje wykazać prawdziwość dyskretnego odpowiednika formuły wielokrotnego całkowania Cauchy'ego. Oto on

$$\mathbf{s}^m\, f(t) =$$

$$= \sum_{\tau_1=a}^{t-1} \sum_{\tau_2=a}^{\tau_1-1} \cdots \sum_{\tau_m=a}^{\tau_{m-1}-1} f(\tau_m) = \sum_{\tau=a}^{t-1} \frac{(t-\tau-1)^{\underline{m-1}}}{(m-1)!}\, f(\tau) = \tag{4.1}$$

$$= \mathbf{s}\ \frac{(\tau - t - 1)^{\underline{m-1}}}{(m-1)!}\, f(t)\Big|_{\tau = t}$$

gdzie

$$m^{\underline{k}} := \overbrace{m(m-1)\dots(m-k+1)}^{k \text{ czynników}}$$

dla $k > 0$ ($m^{\underline{0}} = 1$) jest popularnym w kombinatoryce symbolem Pochhammera ubywającej potęgi liczby m [9]. Wyraża on liczbą wszystkich iniekcji (odwzorowań różnowartościowych) zbioru k-elementowego w zbiór m-elementowy. Sprawdźmy poprawność formuły (4.1).

Dowód. Dla $m = 1$ poprawność wzoru jest oczywista. Dla $m{+}1$-krotnej sumy mamy

$$\mathbf{s}^{m+1} f(t) = \mathbf{s} \sum_{\tau=a}^{t-1} \frac{(t-\tau-1)^{\underline{m-1}}}{(m-1)!}\, f(\tau) =$$

$$= \sum_{\tau=a}^{t-1} \sum_{\tau_1=a}^{\tau-1} \frac{(\tau-\tau_1-1)^{\underline{m-1}}}{(m-1)!}\, f(\tau_1) = \sum_{\tau=a}^{t-1} \sum_{\tau_1=a}^{\tau-1} f(\tau_1)\, \underline{\Delta}_\tau \frac{(\tau-\tau_1-1)^{\underline{m}}}{m!} =$$

$$= \sum_{\tau_1=a}^{t-1} \sum_{\tau=\tau_1+1}^{t-1} f(\tau_1)\, \underline{\Delta}_\tau \frac{(\tau-\tau_1-1)^{\underline{m}}}{m!} = \sum_{\tau=a}^{t-1} f(\tau)\, \frac{(t-\tau-1)^{\underline{m}}}{m!}$$

gdzie indeks τ stojący przy operatorze $\underline{\Delta}_\tau$ jest koniecznym dla wskazania zmiennej, której dotyczy operacja różnicy. Pierwsza z równości wynika z założenia indukcyjnego, a czwarta z zamiany kolejności sumowania. W trzeciej wykorzystana została różnicowa własność ubywającej potęgi $\underline{\Delta}\, t^{\underline{m}} = m\, t^{\underline{m-1}}$, gdyż

$$\underline{\Delta}\, t^{\underline{m}} = \frac{(t+1)!}{(t+1-m)!} - \frac{t!}{(t-m)!} = m\, \frac{t!}{(t-(m-1))!} = m\, t^{\underline{m-1}}$$

Przedstawienie działania operatora $\mathbf{s}^{m+1}$ za pomocą ostatniej sumy jest końcowym krokiem dowodu przez indukcję dyskretnego odpowiednika formuły Cauchy'ego. $\square$

Suma teleskopowa. Wstawiając dyskretną reprezentację operatorów $\mathbf{r}$ i $\mathbf{s}$ do sumy teleskopowej w postaci (3.4) otrzymamy następujący jej wariant

(4.2)
$$\sum_{k=0}^{m} \mathbf{s}^k \circ (\mathbf{1} - \mathbf{s} \circ \mathbf{r}) \circ \mathbf{r}^k f(t) = \sum_{k=0}^{m} \frac{(t-a)^{\underline{k}}}{k!} f^{\underline{(k)}}(a) = f(t) - \mathbf{s}^{m+1} f^{\underline{(m+1)}}(t)$$

gdzie $f^{\underline{(k)}}(a)$ oznacza wynik k-krotnego działania operatora różnicowego $\underline{\Delta}$ na ciąg $f(t)$, wynik wyznaczony dla chwili $t = a$. Znowu wyrażenie $(\mathbf{1} - \mathbf{s} \circ \mathbf{r})$ będące czynnikiem dyskontującym kapitał do chwili a pozwoliło odnieść operatory różnicowe do jednej ustalonej chwili a. W rachunku wykorzystano własność

$$\mathbf{s}^k\, 1 = \frac{(t-a)^{\underline{k}}}{k!}$$

która wynika z zadziałania operatorem $\mathbf{r}$ na szczególną postać wyżej udowodnionej formuły wielokrotnego sumowania (4.1), otrzymaną po podstawieniu $f(t) \to 1$. Można ją także otrzymać odpowiednio rozwiązując łatwą do zauważenia tożsamość

$$\mathbf{r}^k \circ \mathbf{s}^k = \mathbf{1}$$

prawdziwą dla wszystkich przedstawionych reprezentacji algebry stopy. Zestawienie powyższych dwóch uwag jest prawdopodobnym wyjaśnieniem metody „odgadnięcia” formuły wielokrotnego całkowania (sumowania) zastosowanej przez Cauchy’ego.

Operacja dyskontowania. Wstawiając dyskretną formułę Cauchy’ego do równości (2.1) otrzymamy przedstawienie ciągu $f(t)$ w postaci *szeregu Newtona* [6], który jest różnicowym odpowiednikiem szeregu Taylora, tak jak tamten posiadającym precyzyjnie wyznaczoną resztę rzędu $m+1$

$$f(t) = \sum_{k=0}^{m} \frac{(t-a)^{\underline{k}}}{k!} f^{\underline{(k)}}(a) + \sum_{\tau=a}^{t-1} \frac{(t-\tau-1)^{\underline{m}}}{m!} f^{\underline{(m+1)}}(\tau)$$

Ponieważ ubywająca potęga $m^{\underline{k}}$ znika dla argumentów $k > m$ reszta szeregu rzędu $m+1$ dla $m \geq t-a$ jest zerowa, co implikuje poprawność następującego ciągu równości

$$(4.3)\quad f(t) = \sum_{k=0}^{t-a} \frac{(t-a)^{\underline{k}}}{k!} f^{\underline{(k)}}(a) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t-a)^{\underline{k}}}{k!} f^{\underline{(k)}}(a) = e^{(t-a)^{\perp}\underline{\Delta}} f(a)$$

Obiekt $(t-a)^{\perp}$jest operatorem i przyjmuje wartości liczbowe po rozpisaniu szeregu potęgowego (jakim jest eksponens) przybierając postać kolejnych ubywających potęg liczby $(t-a)$. Ponieważ

$$(4.4)\quad \sum_{k=0}^{t-a} \frac{(t-a)^{\underline{k}}}{k!} f^{\underline{(k)}}(a) = \sum_{k=0}^{t-a} \frac{(t-a)!}{k!(t-a-k)!} f^{\underline{(k)}}(a) = (1+\underline{\Delta})^{t-a} f(a)$$

więc dla komutatora $[\mathbf{r},\mathbf{s}]$ wyznaczającego dyskonto w reprezentacji dolnej Newtona mamy

$$[\mathbf{r},\mathbf{s}] = e^{-(t-a)^{\perp}\underline{\Delta}} = (1+\underline{\Delta})^{a-t}$$

gdzie $(1+\underline{\Delta})^n$ dla $n<0$ należy traktować jako $-n$-krotny iloczyn nieskończonego postępu geometrycznego $1-\underline{\Delta}+\underline{\Delta}^2-\underline{\Delta}^3+\ldots$.

Przykłady. Dzięki formule (4.3) możemy określony ciągiem $f(t)$ stan kapitału na chwilę t aproksymować coraz dokładniej za pomocą ciągu dolnych stóp różnicowych $\underline{r}_1(a)$, $\underline{r}_2(a)$,..., $\underline{r}(a)_{t-a}$ kolejnych rzędów, stóp zdefiniowanych następująco

$$\underline{\Delta}^k f(a) = \underline{r}_k(a)\, f(a)$$

Pierwsza z nich $\underline{r}_1(a)$ jest popularną w świecie finansów przedziałową dolną stopą procentową. Jej możliwie ogólną definicję można znaleźć w opracowaniu [7]. Kapitał o zerowych stopach wyższych rzędów ma liniowe w czasie przyrosty (czynnik dyskontowy $[\mathbf{r},\mathbf{s}]^{-1} = 1+(t-a)\underline{r}_1(a)$ opisuje tzw. procent prosty o stopie określonej w chwili a). Ciąg $\underline{r}_1(a)=\underline{r}=const.$, $\underline{r}_2(a)=\underline{r}^2$, $\underline{r}_3(a)=\underline{r}^3$, ... to stały procent w konwencji z kapitalizacją odsetek. Wtedy $[\mathbf{r},\mathbf{s}] = e^{-\underline{r}(t-a)^{\perp}}$bowiem

$$f(t) = [\mathbf{r},\mathbf{s}]^{-1} f(a) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t-a)^{\underline{k}}}{k!}\underline{r}^k\, f(a) = \sum_{k=0}^{t-a} \frac{(t-a)!}{k!(t-a-k)!}\underline{r}^k\, f(a) =$$

$$= (1+\underline{r})^{t-a} f(a) \tag{4.5}$$

czyli operator dyskonta w tym przypadku prowadzi do sytuacji, gdy możemy taką operację zastąpić $(t-a)$-krotnym zastosowaniem procentu prostego z jednakową stopą pierwszego rzędu (pamiętając o kapitalizacji kwoty po każdej operacji).

Formułę (4.5) możemy uogólnić poprzez naturalne rozszerzenie argumentu t do całej dziedziny czasowej liczb rzeczywistych. Wtedy, powracając do przykładu zilustrowanego wcześniej rysunkiem, ten sam najlepiej dopasowany wielomian kwadratowy (modelujący równie dobrze proces ilustrowany krzywą ciągłą) otrzymamy dla pary stóp o nieco innych wartościach liczbowych. Z porównania szeregu Taylora z jego odpowiednikiem w reprezentacji dolnej Newtona otrzymamy, że $r_1(0) = \underline{r}_1(0) - \frac{1}{2}\underline{r}_2(0)$, oraz $r_2(0) = \underline{r}_2(0)$, więc jedyne niezerowe składniki stopy procentowej w naszym najlepiej dopasowanym wielomianie wynoszą teraz $\underline{r}_1 = 0,1014$ i $\underline{r}_2 = 0,1195$. Podkreślić należy, że nowa para liczb parametryzuje tą samą krzywą, co para z przykładu w reprezentacji Bernoulliego.

Zanurzenie dyskretnych współrzędnych czasowych w dziedzinę ciągłą prowadzi do standardowego wykorzystania formuły Newtona w zadaniach interpolacji – ciągi $\{f(t)\}$ są teraz reprezentantami całych klas funkcji analitycznych, posiadających w całkowitoliczbowych elementach dziedziny (zwanych *węzłami interpolacyjnymi* [6]) wartości pokrywające się z wartościami odpowiednich elementów ciągów $f(t)$. Działanie na klasach staje się konieczne, bowiem operacja dyskontowania, bazując jedynie na stopach różnicowych, jest w stanie odtworzyć dokładne wartości funkcji z klasy tylko na podzbiorze liczb całkowitych. Stosowanie metod interpolacyjnych w finansach tam, gdzie o kształcie funkcji kapitałowych wnioskujemy na podstawie skończonego zbioru ich wartości, wydaje się w pełni zasadne. W takich sytuacjach przydałoby się, by analityk finansowy posiadał pełną świadomość faktu badania całych klas funkcji i stosowania *de facto* metod interpolacyjnych przy pracy nad jednym z reprezentantów klasy.

5. Reprezentacja górna Newtona

Reprezentacja generatorów algebry. Operator stopy zwrotu $\mathbf{r}$ w realizacji różnicowej może być przedstawiony jeszcze na jeden sposób. Oto on

$$\mathbf{r}\, f(t) = \overline{\Delta}\, f(t) := f(t) - f(t-1)$$

Operator przyrostu kapitału określamy teraz następująco

$$\mathbf{s} := \sum_{\tau=a+1}^{t}$$

czyli

$$\mathbf{s}\, f(t) := \sum_{\tau=a+1}^{t} f(\tau)$$

Sposób określenia operatora przyrostu kapitałowego $\mathbf{s}$ został podyktowany zamiarem zachowania przez ten obiekt stosownej symetrii względem jego odpowiednika z reprezentacji dolnej Newtona, symetrii narzuconej przez parę operatorów różnicowych $\underline{\Delta}$ i $\overline{\Delta}$. Komutator nieprzemiennej pary generatorów algebry stopy jest następującą operacją

$$[\mathbf{r}, \mathbf{s}]\, f(t) = \left(\mathbf{r} \sum_{\tau=a+1}^{t} f(\tau)\right) - \mathbf{s}\, f(t) + \mathbf{s}\, f(t-1) =$$

$$= f(t) - \sum_{\tau=a+1}^{t} f(\tau) + \sum_{\tau=a+1}^{t} f(\tau-1) = f(t) - f(t) + f(a) = f(a)$$

także dyskontującą kapitał do ustalonej chwili a. Tak więc znana np. z codziennej praktyki finansowej operacja dyskontowania ciągów kapitałowych $\{f(t)\}$, choć jednakowo wyliczana, może być interpretowana w dwóch istotnie różnych reprezentacjach algebry stopy.

Formuła Cauchy'ego. Formuła wielokrotnego sumowania ma obecnie poniższą postać

$$\mathbf{s}^m f(t) =$$

$$\sum_{\tau_1=a+1}^{t} \sum_{\tau_2=a+1}^{\tau_1} \cdots \sum_{\tau_m=a+1}^{\tau_{m-1}} f(\tau_m) = \sum_{\tau=a+1}^{t-1} \frac{(t-\tau)^{\overline{m-1}}}{(m-1)!} f(\tau) = \tag{5.1}$$

$$\mathbf{s} \left. \frac{(\tau - t)^{\overline{m-1}}}{(m-1)!} f(t) \right|_{\tau=t}$$

gdzie

$$m^{\overline{k}} := \overbrace{m(m+1)\dots(m+k-1)}^{k\,\text{czynników}}$$

oraz $m^{\overline{0}} = 1$. Jak można się domyśleć wielkość $m^{\overline{k}}$ jest nazywana symbolem Pochhammera przyrastającej potęgi liczby m.

Dowód. Przy $m = 1$ lewa i prawa strona wzoru (5.1) ma postać $\mathbf{s}\, f(t)$. Dla podstawienia $m+1 \to m$ otrzymamy

$$\mathbf{s}^{m+1} f(t) = \mathbf{s} \sum_{\tau=a+1}^{t-1} \frac{(t-\tau)^{\overline{m-1}}}{(m-1)!} f(\tau) =$$

$$= \sum_{\tau=a+1}^{t} \sum_{\tau_1=a+1}^{\tau-1} \frac{(\tau-\tau_1)^{\overline{m-1}}}{(m-1)!} f(\tau_1) = \sum_{\tau=a+1}^{t} \sum_{\tau_1=a+1}^{\tau-1} f(\tau_1)\, \overline{\Delta}_\tau \frac{(\tau-\tau_1)^{\overline{m}}}{m!} =$$

$$= \sum_{\tau_1=a+1}^{t-1} \sum_{\tau=\tau_1+1}^{t} f(\tau_1)\, \overline{\Delta}_\tau \frac{(\tau-\tau_1)^{\overline{m}}}{m!} = \sum_{\tau=a+1}^{t-1} f(\tau)\, \frac{(t-\tau)^{\overline{m}}}{m!}$$

Pierwsza z równości wynika z założenia indukcyjnego, a czwarta, tak jak w przypadku poprzedniej reprezentacji, ze zamiany kolejności sumowania. W rachunku skorzystano także z różnicowej własności przyrastającej potęgi $\overline{\Delta}\, t^{\overline{m}} = m\, t^{\overline{m-1}}$, bowiem

$$\overline{\Delta}\, t^{\overline{m}} = \frac{(t+m-1)!}{(t-1)!} - \frac{(t+m-2)!}{(t-2)!} = m\, \frac{(t+m-2)!}{(t-1)!} = m\, t^{\overline{m-1}}$$

□

Suma teleskopowa. Suma teleskopowa (3.4) w reprezentacji górnej Newtona przybiera następującą postać

(5.2)
$$\sum_{k=0}^{m} \mathbf{s}^k \circ (\mathbf{1} - \mathbf{s} \circ \mathbf{r}) \circ \mathbf{r}^k f(t) = \sum_{k=0}^{m} \frac{(t-a)^{\overline{k}}}{k!} f^{\overline{(k)}}(a) = f(t) - \mathbf{s}^{m+1} f^{\overline{(m+1)}}(t)$$

gdzie symbol $f^{\overline{(k)}}(a)$ oznacza wynik k-krotnego działania operatora różnicowego $\overline{\Delta}$ na ciąg $f(t)$, ustalony w chwili $t = a$. Wykorzystaną w powyższym rachunku własność

$$\mathbf{s}^k \, 1 = \frac{(t-a)^{\overline{k}}}{k!}$$

można wykazać w analogiczny jak dla reprezentacji dolnej Newtona sposób.

Operacja dyskontowania. I tym razem komutator $[\mathbf{r}, \mathbf{s}] = (\mathbf{1} - \mathbf{s} \circ \mathbf{r})$ dyskontujący kapitał do chwili a umożliwia przesunięcie do tej chwili operatorów różnicowych. Przekształcając formułę teleskopową (5.2) otrzymujemy wariant wzoru Newtona z jawnie opisaną resztą rzędu $m+1$.

$$f(t) = \sum_{k=0}^{m} \frac{(t-a)^{\overline{k}}}{k!} f^{\overline{(k)}}(a) + \sum_{\tau=a+1}^{t-1} \frac{(t-\tau)^{\overline{m}}}{m!} f^{\overline{(m+1)}}(\tau) \tag{5.3}$$

Rozważając graniczny przypadek powyższego wzoru dla $m \to \infty$ i korzystając z tożsamości

$$\frac{\mathbf{1}}{(\mathbf{1} - \mathbf{p})^{n+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} \mathbf{p}^k$$

dla $n \geq 0$ będącej „ukrytym przypadkiem wzoru dwumianowego”[9], otrzymamy następujący ciąg tożsamości

$$f(t) = [\mathbf{r}, \mathbf{s}]^{-1} f(a) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t-a)^{\overline{k}}}{k!} f^{\overline{(k)}}(a) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{t-a+k-1}{k} \overline{\Delta}^k f(a) = \frac{\mathbf{1}}{(\mathbf{1} - \overline{\Delta})^{t-a}} f(a)$$

Czyli dla komutatora $[\mathbf{r}, \mathbf{s}]$ wyznaczającego dyskonto w reprezentacji górnej Newtona mamy

$$[\mathbf{r}, \mathbf{s}] = (1 - \overline{\Delta})^{t-a}$$

Przykłady. W reprezentacji górnej Newtona wzór (5.3) pozwala kapitał $f(t)$ przybliżać dowolnie dokładnie za pomocą ciągu górnych stóp różnicowych $\overline{r}_1(a)$, $\overline{r}_2(a)$, ... kolejnych rzędów. Ciąg ten definiujemy następująco

$$\overline{\Delta}^k f(a) = \overline{r}_k(a)\, f(b)$$

Pierwszy element ciągu, czyli $\overline{r}_1(a)$ jest znaną przedziałową górną stopą procentową [7]. Czynnik dyskontowy $[\mathbf{r}, \mathbf{s}]^{-1} = 1 + (t-a)\overline{r}_1(a)$ o liniowych w czasie przyrostach wyznaczają zerowe stopy rzędów wyższych niż pierwszy. Jest to, identycznie jak w analogicznym przypadku dla reprezentacji dolnej Newtona, procent prosty o stopie zwrotu określonej w chwili a. Inny z przypadków określony jednym parametrem, czyli ciąg $\overline{r}_1(a) = \overline{r} = const.$, $\overline{r}_2(a) = \overline{r}^2$, $\overline{r}_3(a) = \overline{r}^3$, ... to znowu stały procent w konwencji z kapitalizacją odsetek, gdy kapitał w chwili t zadany jest funkcją

$$f(t) = \frac{1}{(1-\overline{r})^{t-a}} f(a) \tag{5.4}$$

Porównanie przykładów opisanych formułami (4.5) i (5.4) prowadzi do popularnej zależności pomiędzy tzw. stopą procentową $\underline{r}$ i dyskontową $\overline{r} = \frac{\underline{r}}{1+\underline{r}}$.

I tym razem, rozszerzając na zbiór ciągły dziedzinę czasową, możemy opisać (spośród krzywych drugiego rzędu) krzywą najlepiej dopasowaną do analizowanego już kapitałowego procesu wykładniczego. Porównanie procesów drugiego rzędu w reprezentacjach Bernoulliego i górnej Newtona prowadzi do równań określających związki pomiędzy stopami (poprawne jedynie przy aproksymacji ograniczonej do wielomianów kwadratowych) $r_1(0) = \overline{r}_1(0) + \frac{1}{2}\overline{r}_2(0)$, oraz $r_2(0) = \overline{r}_2(0)$, co w wyniku daje następującą parę parametrów opisu procesu kapitałowego w reprezentacji górnej Newtona: $\overline{r}_1 = -0,0181$ i $\overline{r}_2 = 0,1195$. Tym razem stopa procentowa pierwszego rzędu z góry, najlepiej przybliżająca wzrost o 20 procentowej stopie rocznej w konwencji kapitalizacji ciągłej, okazuje się wręcz ujemna!

6. Wspólne cechy reprezentacji algebry stopy

Przeglądając kolejne wzory występujące w ostatnich trzech rozdziałach możemy wypisać związki występujące pomiędzy różnymi klasycznymi realizacjami algebry stopy. Dla tego celu oznaczmy przedstawienia dowolnego operatora $\mathbf{p}$ w reprezentacjach Bernoulliego, dolnej Newtona i górnej Newtona odpowiednio przez $\mathbf{p}_d$, $\underline{\mathbf{p}}$ i $\overline{\mathbf{p}}$.

Dla operatora dyskontującego kapitał do wartości w chwili a mamy

$$[\mathbf{r}, \mathbf{s}]_d = \underline{[\mathbf{r}, \mathbf{s}]} = \overline{[\mathbf{r}, \mathbf{s}]}$$

gdzie pierwsza z równości dotyczy jedynie punktów, które odpowiadają dyskretnej dziedzinie czasowej reprezentacji Newtona. Powyższe równości możemy wyrazić operatorem stopy $\mathbf{r}$ przedstawionym w odpowiednich reprezentacjach.. Na podstawie wzorów (3.5), (4.4) i (2.1) otrzymamy, że

$$e^{(t-a)\,\mathbf{r}_d} = (\mathbf{1}+\underline{\mathbf{r}})^{t-a} = \frac{\mathbf{1}}{(\mathbf{1}-\overline{\mathbf{r}})^{t-a}}$$

dla dowolnych chwil t i a, czyli dowolnych potęg operatorów dyskontowania w jednostce czasowej: $e^{\mathbf{r}_d}$, $(\mathbf{1}+\underline{\mathbf{r}})$ i $(\mathbf{1}-\overline{\mathbf{r}})^{-1}$. Gdy rozważymy infinitezymalne zmiany położenia punktu opisywanego zmienną całkowitoliczbową t występującą w reprezentacjach Newtona, wtedy zróżniczkowanie po czasie t powyższej formuły prowadzi do zależności pomiędzy stopą różniczkową z reprezentacji Bernoulliego, a komutatorem $[\mathbf{r}, \mathbf{s}]$ w reprezentacjach Newtona, które przedstawiają tożsamości (5.2) zamieszczone w opracowaniu [7].

Wyjaśnienia dotyczące różnych skal czasowych, poczynione przy opisie reprezentacji Bernoulliego, przenoszą się bez zmian na reprezentacje dolną i górną Newtona.

Na uwagę zasługuje fakt, że wszystkie trzy klasyczne reprezentacje algebry stopy prowadzą do aproksymacji procesów kapitałowych odmiennymi rodzinami wielomianów zmiennej t. We wszystkich reprezentacjach zachodzi izomorfizm pomiędzy ciągiem stóp kolejnych rzędów $r = (r_1, r_2, \dots)$ w dowolnej z chwil a dziedziny czasowej a kształtem zmian kapitałowych na całej dziedzinie, określonych operatorem dyskontującym $[\mathbf{r}, \mathbf{s}]$, izomorfizm zadany odwzorowaniem

$$[\mathbf{r}, \mathbf{s}]^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k r_k = \varphi \cdot r \tag{6.1}$$

gdzie współczynniki ciągu $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots)$ są niezależnymi od kształtu ewolucji czasowej kapitału liczbami, zależnymi jedynie od wyboru reprezentacji, w powyższej sumie przyjmujemy z definicji $\varphi_0 r_0 = 1$, więc $[\mathbf{r}, \mathbf{s}]^{-1}$ możemy formalnie traktować jako iloczyn skalarny $\varphi \cdot r$ w nieskończenie wymiarowych przestrzeniach wektorowych (takie przestrzenie nazywamy przestrzeniami Hilberta). Z własności (6.1) wynika, że jeśli kapitał $f(a)$ podzielimy na dowolne dwie części (związane z odmienną kapitalizacją, a więc różnymi stopami zwrotu) $f(a) = f_1(a) + f_2(a) = \gamma_1 f(a) + \gamma_2 f(a)$, gdzie wagi podziału $\gamma_1 + \gamma_2 = 1$ mogą być liczbami ujemnymi, to czynnik dyskontowy łącznego kapitału, będący sumą ważoną czynników dyskontowych każdej z części kapitałowych, jest izomorficzny stopie będącej sumą ważoną stóp każdej z części

$$f(t) = [\mathbf{r}, \mathbf{s}]^{-1} f(a) = \varphi \cdot r\, f(a) = f_1(t) + f_2(t) = [\mathbf{r}, \mathbf{s}]_1^{-1} \gamma_1 f(a) +$$

$$+[\mathbf{r},\mathbf{s}]_2^{-1}\gamma_2 f(a) = \varphi \cdot (\gamma_1 r_1 + \gamma_2 r_2)\ f(a)$$

czyli

$$r_{\gamma_1+\gamma_2} = \gamma_1 r_1 + \gamma_2 r_2$$

Stopy (wektory) w dowolnej reprezentacji zachowują się w sposób addytywny (wypadkową stopą k-tego rzędu jest suma ważona stóp tego samego rzędu), co stanowi niezwykle porządaną własność skracającą obliczenia finansowe do tego stopnia, że wykorzystuje się ją na codzień nie zważając, że stosowane powszechnie definicje stóp procentowych własności tej nie posiadają, zob.[8].

Przy zmierzających do zera odległościach pomiędzy kolejnymi chwilami czasowymi granicą obydwu reprezentacji Newtona jest reprezentacja Bernoulliego [7].

Zastosowania formalizmu algebry stopy są wyjątkowo rozległe. Można dla przykładu rozważyć wszystkie rodzaje kredytów jako funkcjonały określone na algebrze stopy, zaś o wartościach w dziedzinie liczbowej. Takie spojrzenie na kredyt daje dwojakie korzyści. Prowadzi do algebraicznej klasyfikacji kredytów [12], pozwalającej na „odkrywanie" nowych, niepraktykowanych, a prawdopodobnie atrakcyjnych technik finansowych. Wiąże także różne, tradycyjnie odległe techniki kredytowania w dwoiste pary (np. nominalnie stała renta wieczysta *vs* obligacje nie datowane), którym towarzyszą *de facto* jednakowe wzory ich rachunkowego opisu [12], sformułowane w wariantach odpowiednich dla wybranej reprezentacji algebry stopy.

7. Uwagi końcowe

We wszystkich trzech reprezentacjach klasycznych generator $\mathbf{s}$ jest w algebrze stopy elementem prawym odwrotnym do operatora $\mathbf{r}$, co zapisujemy symbolicznie w postaci równości (3.2). Dzięki postulowaniu tej tożsamości dla określenia konkretnej klasycznej (niestochastycznej) reprezentacji algebry stopy wystarcza podanie jedynie realizacji generatora $\mathbf{r}$ (przykład reprezentacji stochastycznej algebry stopy, w której operator $\mathbf{r}$ ma postać taką jak w reprezentacji Bernoulliego, lecz $\mathbf{s}$ jest zdefiniowany odmiennie, zostanie omówiony w odrębnym tekście). Postać operatora $\mathbf{s}$ można znaleźć rozwiązując warunek (3.2), co czyni nazwę algebra stopy adekwatną dla tej sytuacji. Metoda taka jest receptą na znalezienie innych reprezentacji algebry świata finansów. Tak więc *algebrę stopy* możemy zdefiniować jako algebrę Heisenberga-Weyla, spełniającą dodatkowo postulat (3.2). Gdy potrafimy efektywnie realizować dowolną ilość złożeń operacji $\mathbf{r}$ wyznaczania stopy zwrotu, jednokrotną operację $\mathbf{s}$ określania przyrostu kapitału i znamy odpowiednik reguły Cauchy'ego, to taką reprezentację algebry stopy możemy nazywać *reprezentacją efektywną*. Nazwę tą usprawiedliwia spostrzeżenie iż, niezależnie od tego jak egzotycznymi w stosunku do ich klasycznych odpowiedników okazują się realizacje operacji **r** i **s**, możemy obliczyć wyniki dowolnych procedur rachunkowych, prowadzonych w reprezentacji spełniającej powyższe warunki. Abstrahując od kontekstów historycznych, dotyczących odkrycia przytoczonych w tej pracy wzorów, *reprezentacjami klasycznymi* nazwiemy reprezentacje efektywne, których komutator (operacja dyskontowania) polega na mnożeniu funkcji kapitału przez tzw. czynnik dyskontowy $U(a,t)$, posiadający własność składania rezolwenty równania różniczkowego liniowego, czyli $U(a,t)U(t,t') = U(a,t')$, zob. [7]. W reprezentacji Bernoulliego operacja komutatora polega na mnożeniu przez czynnik $U(a,t) = e^{\int_t^a d\tau\, r_1(\tau)}$. W reprezentacjach dolnej i górnej Newtona mamy odpowiednio $U(a,t) = \prod_{\tau=a}^{t-1} (1+\underline{r}_1(\tau))^{-1}$, oraz $U(a,t) = \prod_{\tau=a}^{t-1} (1-\overline{r}_1(\tau))$. Wszystkie wymienione tu przedstawienia spełniają własność rezolwenty. Kontynuacja tego opracowania będzie poświęcona nowym, atrakcyjnym finansowo, nieklasycznym reprezentacjom efektywnym algebry stopy.

Dodatek

Poniższy tekst przedstawia wydruk programu napisanego w języku *Mathematica*, generującego zamieszczony w tekście rysunek, oraz stopy procentowe dwóch pierwszych rzędów, omówione w opisie rysunku.

```
a = 0; b = 10; r = .2;

ModelFunction[x_] := Exp[r(x - a)]

TaylorFunction[x_, r1_, r2_] := 1 + r1(x - a) +
                                        (1/2) r2 (x - a)^2

procedure[function_] := Module[{temp,r1,r2,minimum},
   r1 := (temp/.Solve[ModelFunction[b] ==
        function[b,temp, r2], temp])[[1]];
   r2 = r2/.(FindMinimum[
               Integrate[(ModelFunction[x] -
                   function[x, r1, r2])^2,{x,a, b}],
             {r2,{-1,5}}])[[2]];
   Plot[{ModelFunction[x],function[x,r1,r2],
        1+(ModelFunction[b]-1)(x-a)/(b-a)},{x,a,b},
```

```
    PlotPoints -> 500,
    PlotStyle -> {{GrayLevel[0],Dashing[{0.01}]},
             {GrayLevel[0],Dashing[{0.0}]},
    {GrayLevel[0],Dashing[{.005}]}}];
   {r1,r2}         ]

procedure[TaylorFunction]
```

STRESZCZENIE. Autor analizuje podstawową dla matematyki finansowej strukturę algebraiczną, której wyrażenia symboliczne obejmują wszelkie operacje kapitałowe. Jej trzy znane od stuleci reprezentacje zawierają popularne zależności pomiędzy różnymi typami stóp procentowych. Przedstawione są ścisłe formuły dla wyznaczania multiplikatywnych czynników dyskontowych. Proponowane ciągi stóp procentowych kolejnych rzędów umożliwiają dowolnie dokładnie modelowanie przebiegów procesów kapitałowych, pozwalając jednocześnie w różnych konwencjach, czyli różnych reprezentacjach algebry stopy, przeliczać operacje kapitałowe.

BIBLIOGRAFIA

[1] Juszkiewicz A.P., *Historia matematyki*, t.1, PWN, Warszawa 1975.
[2] http://SAL.KachinaTech.COM/A/1/index.shtml
[3] Białynicki-Birula I., Białynicka-Birula Z., *Elektrodynamika kwantowa*, PWN, Warszawa 1974.
[4] *Encyclopaedia of Mathematics on CD-ROM*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht 1997.
[5] Viskov O.V., *Niekomutativnyj podhod k klasiczieskim zadaczam analiza*, Tr. MIAN 177(1986)21-32.
[6] Gelfond A.O., *Isczislienie koniecznych raznostiej*, Fizmatgiz, Moskwa, 1959.
[7] Piotrowski E.W., *Macierzowa stopa zwrotu*, Przegląd Statystyczny 46(1999)340-352.
[8] Karpio A., Piotrowski E.W., *Chwilowa stopa procentowa*, Przegląd Statystyczny 46(1999)67-78.
[9] Graham R.L., Knuth D.E., Patashnik O., *Matematyka konkretna,* PWN, Warszawa 1996.
[10] Juszkiewicz A.P., *Historia matematyki*, t.2, PWN, Warszawa 1976.
[11] Price H., *Strzałka czasu i punkt Archimedesa*, Amber, Warszawa 1998.
[12] Piotrowski E.W., *Algebra kredytów*, Przegląd Statystyczny 46(1999)297-313.

Instytut Fizyki Teoretycznej, Uniwersytet w Białymstoku, LIPOWA 41, 15-424 BIAŁYSTOK.

E-mail address: ep@alpha.uwb.edu.pl