

# STOCHASTYCZNA REPREZENTACJA ALGEBRY STOPY ZWROTU

(RePEc:sla:eakjkl:112PL 1-II-2000)

EDWARD W. PIOTROWSKI

Zdaniem profesora Franka Knighta,  
przy braku niepewności zniknęłaby  
nawet ludzka świadomość.[1]

## 1. WSTĘP

Niniejszy tekst stanowi kontynuację opracowania [2] omawiającego algebrę stopy, czyli posiadającą fundamentalne znaczenie strukturę formalną. Jej klasyczne realizacje (zwane przez matematyków reprezentacjami) obejmują pełny zakres praktycznie używanych zastosowań finansowych stopy procentowej. Jednocześnie realizacje te stanowią pokaźny zestaw narzędzi badawczych służących w zastosowaniach analizy matematycznej. Przypomnijmy, że obejmującą wszelkie operacje obliczeń finansowych algebrę stopy tworzy zbiór generowany przez dwie operacje  $\mathbf{r}$  i  $\mathbf{s}$  takie, że  $[\mathbf{r}, [\mathbf{r}, \mathbf{s}]] = [\mathbf{s}, [\mathbf{r}, \mathbf{s}]] = 0$  (własności algebry Heisenberga-Weyla). Operator  $\mathbf{r}$  służy do wyznaczenia bieżącej stopy wzrostu kapitału, a operacja  $\mathbf{s}$  pozwala, w oparciu o znajomość stopy, określić całkowity przyrost kapitału w dłuższych okresach czasu. Komutator  $[\mathbf{r}, \mathbf{s}] := \mathbf{r} \circ \mathbf{s} - \mathbf{s} \circ \mathbf{r}$  jest operacją polegającą na odjęciu wyniku otrzymanego przez przeprowadzenie operacji  $\mathbf{r}$ , a potem  $\mathbf{s}$ , od wyniku z wykonanych kolejno operacji  $\mathbf{s}$ , a po niej  $\mathbf{r}$ . Element algebry stopy  $[\mathbf{r}, \mathbf{s}]$  ma podstawowe znaczenie w finansach, gdyż w dotychczas omawianych reprezentacjach okazywał się być operatorem mnożenia wartości kapitału przez czynnik dyskontujący tę kwotę do ustalonej chwili czasowej. Proponowana niżej reprezentacja algebry stopy, mimo zastosowania w jej opisie klasycznego układu wielomianów ortogonalnych, nie jest jeszcze wykorzystywana. Jednak jej izomorfizm (na poziomie operacji algebraicznych) z popularnymi reprezentacjami klasycznymi powinien być dostatecznym powodem zwrócenia na ten rachunek szczególnej uwagi. Posiadamy formalnie poprawną i interpretacyjnie spójną stochastyczną reprezentację struktury, której algebrą posługujemy się, mniej czy bardziej świadomie, od stuleci. Poznajmy tę realizację, by móc

adoptować ogrom wykorzystywanych modeli matematyki finansowej na dziedzinę problemów ryzykownych i niepewnych.

## 2. REPREZENTACJA GAUSSA

Zajmiemy się formalizmem badania procesów kapitałowych dla których istotny w przebiegu procesu moment  $\eta$  jest określony nieprecyzyjnie. Owa chwila może być opisywana zmienną losową o rozkładzie prawdopodobieństwa posiadającego obiektywny, lub subiektywny charakter. Przykładowo z taką sytuacją spotykamy się podczas realizacji płatności, gdy moment wykonania płatności  $\eta$ , w zależności od warunków określonych czynnikami losowymi, fluktuuje wokół pewnej oczekiwanej chwili  $a$ , zaś wielkość samych fluktuacji  $\sigma$  zależy od czynników specyficznych dla transakcji. Moment rozpoczęcia typowej inwestycji ma także podobną własność – stopień wdrożenia inwestycji w funkcji czasu  $t$  można, po wyborze odpowiedniej skali czasowej, opisać dystrybuantą standaryzowanego rozkładu normalnego, noszącą nazwę *funkcji Laplace'a*  $L(\eta)$  [3]. Zaproponowane niżej narzędzie rachunkowe może stanowić punkt wyjścia dla opracowania metod porównywania wartości instrumentów finansowych o niezdeterminowanych okresach realizacji. Z sytuacją, gdy nie znamy ostatecznego terminu naszej rezygnacji z dostatecznie płynnej formy kapitałowej (gdyż zawsze możemy dostrzec coś bardziej atrakcyjnego), będziemy się coraz częściej spotykać dzięki coraz sprawniejszym technologiom gromadzenia, przekazywania i analizy informacji.

Przyjmijmy naturalny model matematyczny pozwalający mierzyć konsekwencje założenia o czasowej przypadkowości procesu. W tym popularnym modelu czasowa zmienna losowa  $\eta$  ma rozkład normalny, tzn. model uwzględnia różne wartości jakie może przybierać  $\eta$  z wagą (miarą)  $dM_{a,\sigma}(\eta)$

$$dM_{a,\sigma}(\eta) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(\eta-a)^2}{2\sigma^2}} d\eta$$

określoną na dziedzinie rzeczywistej ( $\eta \in \mathbb{R}$ ). Jak zwykle wartości oczekiwane dowolnych funkcji  $f(\eta)$  będziemy oznaczać symbolem  $E[f(\eta)]$ , czyli

$$E[f(\eta)] := \int_{-\infty}^{\infty} dM_{a,\sigma}(\eta) f(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} d\eta f(\eta) e^{-\frac{(\eta-a)^2}{2\sigma^2}}$$

Dla wygody stosowanej w dalszym tekście notacji operatorowej przyjęliśmy konwencję wypisywania różniczki  $d\eta$  bezpośrednio po znaku dotyczącej jej całki. Ustalenie miary będącej rozkładem normalnym wyróżnia

miejsce na dziedzinie zmiennej losowej  $\eta$  (równe wartości pierwszego momentu rozkładu, czyli  $a$ ) oraz jednostkę czasową  $\sigma$ . Dokonajmy translacji i przeskalowania dziedziny czasowej uwzględniających ten naturalny układ odniesienia. Po transformacji  $t \rightarrow a + \sigma \cdot t$  zmienna losowa  $\eta$  będzie opisywana standaryzowanym rozkładem normalnym  $dL(\eta) := dM_{0,1}(\eta)$ . Przekształcając końcowe wyniki za pomocą podstawienia odwrotnego  $t \rightarrow \frac{t-a}{\sigma}$  otrzymamy interesujące nas wzory, obowiązujące w sytuacji dowolnego sposobu opisu współrzędnej czasowej.

Ze względu na potrzebę zachowania korespondencji pomiędzy tu konstruowaną reprezentacją a reprezentacją Bernoulliego założymy, że operacja stopy kształtującej obraz zmian kapitałowych jest realizowana przez pochodną kapitału, czyli

$$\mathbf{r} f(t) := \frac{df(t)}{dt}$$

Taki wybór przedstawienia operatora  $\mathbf{r}$  algebry stopy niesie najbardziej precyzyjną informację o chwilowych przyrostach kapitałowych, co ze względu na potrzebę precyzyjnego badania omawianych tu procesów wydaje się wysoce pożądane. Operator przyrostu kapitałowego wzorowany na reprezentacji Bernoulliego  $\mathbf{s} = \int_{\eta}^t d\tau$  nie dostarcza obecnie pełnej informacji o wartości kapitału, bowiem chwila  $\eta$ , do której zamierzamy dyskontować kapitał, jest teraz zmienną losową. Gdy, dla przykładu, rozważymy umowę transakcji zachodzącej w momencie  $\eta$ , która określa kwotę transakcji nominalnie, to wtedy, z powodu uwzględnienia charakteryzujących kapitał stóp procentowych, oczekiwana wartość realna transakcji nie pokrywa się z jej kwotą nominalną. Dlatego stosowną będzie modyfikacja operatora przyrostu kapitałowego w postaci

$$\mathbf{s} f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dL(\eta) \int_{\eta}^t d\tau f(\tau) = E \left[ \int_{\eta}^t d\tau f(\tau) \right] = E \left[ \int_0^{t-\eta} d\tau f(\tau + \eta) \right]$$

co w notacji operatorowej zapiszemy następująco

$$\mathbf{s} = E \int_{\eta}^t d\tau$$

Zbiór tak zdefiniowanych operacji  $\mathbf{r}$  i  $\mathbf{s}$ , z działaniami polegającymi na składaniu tych operatorów (dalej oznaczanym symbolem  $\circ$ ), dodawaniu, czy mnożeniu przez liczby, będziemy dalej nazywać *reprezentacją Gaussa* algebry stopy.

3. ZŁOŻENIA OPERACJI  $\mathbf{r}$  I  $\mathbf{s}$ 

W klasycznych reprezentacjach algebry stopy, patrz [2], operator  $\mathbf{s}$  był zawsze operatorem prawym odwrotnym do  $\mathbf{r}$ , czyli  $(\mathbf{r} \circ \mathbf{s})f(t) = f(t)$  dla dowolnej funkcji gładkiej  $f(t)$ . Obecnie własność ta jest także spełniona, bowiem

$$(\mathbf{r} \circ \mathbf{s})f(t) = \frac{d}{dt} E \int_{\eta}^t d\tau f(\tau) = E[f(t)] = f(t)$$

Wyznaczając wynik działania komutatora  $\mathbf{r}$  i  $\mathbf{s}$ , czyli wielkości  $[\mathbf{r}, \mathbf{s}] = \mathbf{r} \circ \mathbf{s} - \mathbf{s} \circ \mathbf{r}$ , na funkcję kapitałową, otrzymamy

$$[\mathbf{r}, \mathbf{s}]f(t) = f(t) - E \int_{\eta}^t d\tau \frac{df(\tau)}{d\tau} = E[f(\eta)] = E[e^{\int_{\eta}^t d\tau r_1(\tau)}] f(t)$$

gdzie ostatnia równość wynika z definicji stopy różniczkowej pierwszego rzędu  $r_1(t)$  [2]. Komutator pozostaje więc nadal, tak jak w przypadku reprezentacji klasycznych [2], operacją dyskontowania do chwili 0 (przypadek standaryzowanego rozkładu normalnego), a po przywróceniu pierwotnych współrzędnych czasowych do chwili  $a$  (dowolny przypadek z rozkładem normalnym o środku w  $a$ ). Jednak nie polega już ona na pomnożeniu funkcji  $f(t)$  przez czynnik dyskontowy  $e^{\int_{\eta}^t d\tau r_1(\tau)}$ . Wynik należy jeszcze uśrednić po zmiennej losowej  $\eta$ . Uśredniony czynnik dyskontowy nie spełnia prawa składania charakterystycznego dla rezolwent równań różniczkowych zwyczajnych [2] (jednak prawdziwego w granicy  $\sigma \rightarrow 0$ , gdyż wtedy rozkład normalny zmierza do dystrybucji  $\delta$  Diraca [3]), czyli

$$\int_{-\infty}^{\infty} dM_{t_1, \sigma}(\eta) e^{\int_{t_3}^{\eta} d\tau r_1(\tau)} \neq \int_{-\infty}^{\infty} dM_{t_2, \sigma}(\xi) e^{\int_{t_3}^{\xi} d\tau_1 r_1(\tau_1)} \int_{-\infty}^{\infty} dM_{t_1, \sigma}(\zeta) e^{\int_{t_2}^{\zeta} d\tau_2 r_1(\tau_2)}$$

Dlatego reprezentacja Gaussa należy do nieklasycznych reprezentacji stopy zwrotu.

4. WIELOMIANY HERMITA  $n! \mathbf{s}^n \mathbf{1}$ 

Konstrukcja odpowiednika formuły Cauchy'ego [2] dla reprezentacji Gaussa, tak jak dla reprezentacji klasycznych opiera się na własnościach  $n$ -krotnego wykonania operacji  $\mathbf{s}$  na funkcji stałej (np. równej 1)

$$(4.1) \quad \mathbf{s}^n \mathbf{1} = E \int_{\eta_1}^t d\tau_1 \int_{\eta_2}^{\tau_1} d\tau_2 \dots \int_{\eta_n}^{\tau_{n-1}} d\tau_n$$

Dla prostoty notacji przyjęto konwencję w której operator  $E$  uśrednia po wszystkich zmiennych losowych  $\eta_k$  o standaryzowanych rozkładach

normalnych. Przyjmiemy także, że  $s^0 1 = 1$ . W Dodatku zamieszczonym na końcu opracowania zostało wykazane, że rodzina funkcji  $\{n! s^n 1\}$  jest dobrze znanym matematykom zbiorem *wielomianów Hermita* o wielu zbadanych i interesujących własnościach, patrz np.[4]. Kilka użytecznych tożsamości wykorzystywanych w dalszych częściach artykułu zostanie przedstawionych w bieżącym paragrafie. Dla omawianych zastosowań wygodnie jest przyjąć następującą definicję wielomianu Hermita  $n$ -tego stopnia

$$(4.2) \quad H_n(t) := E [(t + i\eta)^n]$$

gdzie  $i = \sqrt{-1}$ . Przedstwienie takie można znaleźć np. w tablicach funkcji [5]. Nieparzyste momenty standaryzowanego rozkładu normalnego są zerowe, więc wartości liczbowe wielomianów na dowolnej liczbie rzeczywistej  $t$  są także rzeczywiste. Całkując strony definicji (4.1) otrzymamy jej rekurencyjny odpowiednik

$$(4.3) \quad H_n(t) = n \cdot s H_{n-1}(t) = n \cdot E \int_{\eta}^t d\tau H_{n-1}(\tau)$$

z warunkiem początkowym  $H_0(t) = 1$ . Także bezpośrednio z definicji łatwo zauważyć, że funkcje  $H_n(t)$  są wielomianami  $n$ -tego stopnia zmiennej  $t$  o współczynniku przy najwyższej potędze  $t$  równym 1 (takie wielomiany noszą nazwę *wielomianów monicznych* [4]). Różniczkowy wariant wzoru (4.3) jest następujący

$$(4.4) \quad \mathbf{r} H_n(t) = \frac{dH_n(t)}{dt} = n H_{n-1}(t)$$

Formuły (4.3) i (4.4) posiadają taką samą postać jak wzory na całkowanie i różniczkowanie jednomianów  $(n! s^n 1)_{Bernoulli} = t^n$ , czyli funkcji  $n! s^n 1$  w reprezentacji Bernoulliego, czy analogiczne wzory na odpowiednie sumy i różnice w reprezentacjach Newtona. Wykorzystując dwumian Newtona i wzór na wartość parzystego momentu rozkładu normalnego zamieszczony w Dodatku możemy wypisać jawną postać współczynników wielomianu Hermita, mamy bowiem

$$\begin{aligned} H_n(t) &= E [(t + i\eta)^n] = E \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} (-\eta^2)^k t^{n-2k} = \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} \frac{(2k)!}{(-2)^k k!} t^{n-2k} \end{aligned}$$

Symbol  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  oznacza największą liczbę naturalną nie większą od  $\frac{n}{2}$ . Łatwo teraz zauważyć, że wielomiany o parzystych indeksach  $H_{2n}(t)$  są funkcjami parzystymi, a o indeksach nieparzystych  $H_{2n+1}(t)$  – funkcjami nieparzystymi. Współczynniki przy kolejnych nieznikających potęgach zmiennej  $t$  mają przeciwne znaki.

Powyższą formułę możemy odczytać jako wzór wiążący reprezentację Gaussa algebry stopy z jej reprezentacją Bernoulliego

$$(4.5) \quad (s^n 1)_{Gauss} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{1}{(-2)^k k!} (s^{n-2k} 1)_{Bernoulli}$$

## 5. FUNKCJA TWORZĄCA

Ponieważ dla dowolnej zmiennej urojonej  $x$  zachodzi następujący ciąg równości

$$(5.1) \quad \begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} H_n(t) &= E \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (x(t + i\eta))^n = E \left[ e^{t \cdot x - \frac{x^2}{2} + i\eta \cdot x} \right] = \\ &= e^{t \cdot x - \frac{x^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\eta e^{-\frac{1}{2}(\eta - ix)^2} = e^{t \cdot x - \frac{x^2}{2}} = \psi(x, t) \end{aligned}$$

więc wygodnie jest znajdować wielomiany Hermita za pomocą rozwinięcia funkcji tworzącej  $\psi(x, t)$  w szereg Taylora. Korzystamy wówczas ze wzoru

$$H_n(t) = \left. \frac{d^n \psi(x, t)}{dx^n} \right|_{x=0}$$

Powyższą formułę możemy wypisać w nieco odmienniej postaci

$$(5.2) \quad \begin{aligned} H_n(t) &= \left. \frac{d^n \psi(x, t)}{dx^n} \right|_{x=0} = e^{\frac{t^2}{2}} \left. \frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{(x-t)^2}{2}} \right|_{x=0} = e^{\frac{t^2}{2}} \left. \frac{d^n}{dz^n} e^{-\frac{z^2}{2}} \right|_{z=-t} = \\ &= (-1)^n (L(t))^{-1} \frac{d^n}{dt^n} L(t) \end{aligned}$$

zwanej *wzorem Rodriguesa* dla wielomianów Hermita [4].

Wykorzystamy funkcję  $\psi(x, t)$  dla wykazania zależności pomiędzy wielomianami Hermita. Różniczkując ją po parametrze  $x$  otrzymamy następujące równanie

$$(5.3) \quad \frac{\partial}{\partial x} \psi(x, t) = (t - x) \cdot \psi(x, t)$$

Zastępując w równaniu (5.3)  $\psi(x, t)$  odpowiednim szeregiem Taylora względem zmiennej  $x$  i porównując wyrażenia stojące przy jednakowych potęgach tej zmiennej otrzymamy następujący ciąg równości

$$H_{n+1}(t) = t H_n(t) - n H_{n-1}(t)$$

dla którego warunki początkowe znamy, gdyż wiedza o stopniu wielomianu i współczynniku przy wiodącej potędze zmiennej  $t$  jest wystarczająca, aby wypisać dwa wielomiany Hermita najniższych stopni  $H_0(t) = 1$  oraz  $H_1(t) = t$ . Wzór ten może posłużyć do generowania kolejnych wielomianów Hermita. Wielomiany kilku następnych stopni wypisane są poniżej.

$$\begin{aligned} H_2(t) &= t^2 - 1 \\ H_3(t) &= t^3 - 3t \\ H_4(t) &= t^4 - 6t^2 + 3 \\ H_5(t) &= t^5 - 10t^3 + 15t \\ H_6(t) &= t^6 - 15t^4 + 45t^2 - 15 \\ H_7(t) &= t^7 - 21t^5 + 105t^3 - 105t \\ H_8(t) &= t^8 - 28t^6 + 210t^4 - 420t^2 + 105 \\ H_9(t) &= t^9 - 36t^7 + 378t^5 - 1260t^3 + 945t \end{aligned}$$

Porównanie szeregów Taylora funkcji tworzącej  $\psi(x, t)$  występującej w równaniu różniczkowym

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = x \cdot \psi(x, t)$$

proceedzi do równości (4.4).

## 6. PRZESTRZEŃ HILBERTA

Obliczając wartość oczekiwaną iloczynu funkcji tworzących wziętych dla dowolnych dwóch wartości parametru formalnego  $x$  otrzymamy

$$\begin{aligned} E[\psi(x, \eta) \cdot \psi(y, \eta)] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\eta e^{-\frac{\eta^2}{2} - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + \eta \cdot x + \eta \cdot y - x \cdot y + x \cdot y} = \\ &= \frac{e^{x \cdot y}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\eta e^{-\frac{(\eta - x - y)^2}{2}} = e^{x \cdot y} \end{aligned}$$

Znowu możemy porównać stosowne szeregi Taylora, tym razem dla pierwszego i ostatniego wyrażenia w powyższym ciągu równości

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{1}{m!n!} E[H_m(\eta) \cdot H_n(\eta)] x^m y^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n y^n$$

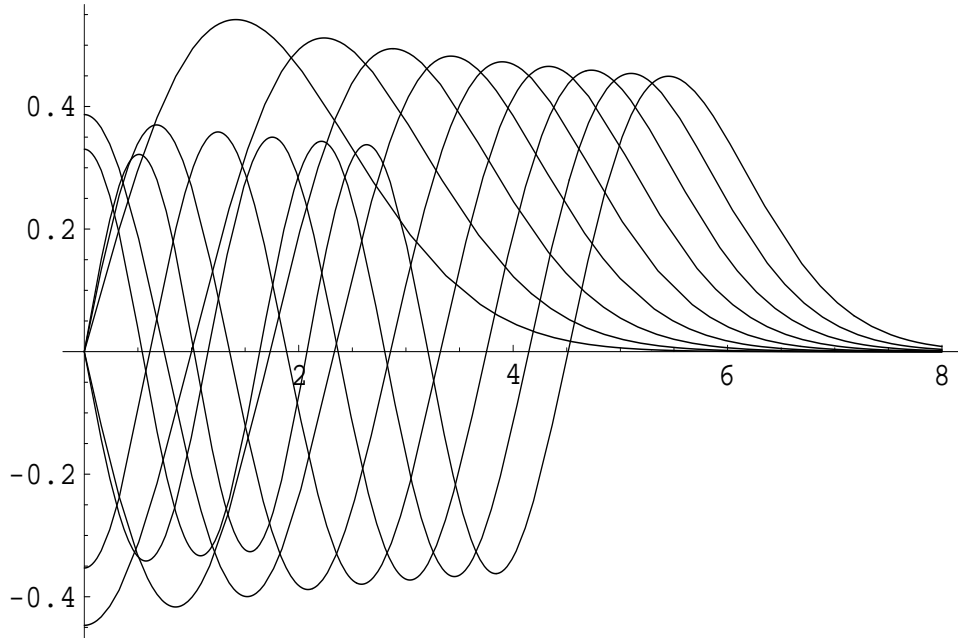
Równość wielomianów implikuje równość określających je współczynników, więc prawdziwymi muszą być następujące tożsamości

$$(6.1) \quad E \left[ \frac{H_m(\eta)}{\sqrt{m!}} \cdot \frac{H_n(\eta)}{\sqrt{n!}} \right] = 0$$

dla wszystkich par  $m \neq n$  oraz

$$(6.2) \quad E \left[ \frac{H_n(\eta)}{\sqrt{n!}} \cdot \frac{H_n(\eta)}{\sqrt{n!}} \right] = 1$$

dla wszystkich  $n$ . W ten sposób dochodzimy do wniosku o charakterze geometrycznym, że wielomiany postaci  $\frac{H_n(t)}{\sqrt{n!}}$  rozważane z wagą standaryzowanego rozkładu normalnego tworzą system funkcji *ortonormalnych* (tzn. prostopadłych w znaczeniu własności (6.1) i unormowanych do jedności w znaczeniu własności (6.2)). System ten jest bazą przestrzeni Hilberta  $\mathcal{H}_E$  [4]. Przestrzeń  $\mathcal{H}_E$  jest wyposażony w operację iloczynu skalarnego  $E[f_1(\eta) \cdot f_2(\eta)]$  zbiorem funkcji mierzalnych  $f(t)$ , czyli takich, dla których  $E[|f(\eta)|^2] < \infty$ . Ponieważ zagadnienie momentów rozkładu normalnego jest dobrze określone (patrz Dodatek), więc z twierdzenia Riesz [4] wynika, że układ  $\{s^n 1\}$  jest zupełny, to znaczy każda funkcja  $f(t)$  należąca do  $\mathcal{H}_E$  musi znikać na całej dziedzinie, gdy znika jej iloczyn skalarny z dowolnym elementem  $s^n 1$  układu (czyli  $E[f(\eta) \cdot s^k 1] = 0$ ).





Wykresy *funkcji Hermita*  $\sqrt{\frac{dL(t)}{dt}} \frac{H_n}{\sqrt{n!}}$  dla dziewięciu początkowych wielomianów Hermita obrazują skorygowany miarą rozkładu normalnego obszar zmienności tych wielomianów. Autor nie przedstawił wykresu funkcji Hermita dla wielomianu o numerze  $n = 0$ . Każdy zainteresowany może go odnaleźć na znajdującym się w obiegu banknotie dziesięciomarkowym. Z uwagi na wspomniane wyżej symetrie wielomianów przedstawiona została jedynie dodatnia część argumentów funkcji Hermita. Numer wybranego wielomianu łatwo odczytać z wykresu wiedząc, że wielomiany Hermita mają wszystkie zera rzeczywiste i jednokrotne. Spośród własności wielomianów Hermita warto jeszcze wymienić znikanie dla wszystkich indeksów naturalnych średniej wartości wielomianów  $E[H_n(\eta)]$ , wykazane przy okazji dowodu zamieszczonego w Dodatku. Oczywiście zachodzi równość  $E[H_0(\eta)] = 1$ .

## 7. WŁASNOŚĆ SPLOTU WIELOMIANÓW HERMITA

Rozważmy odwzorowanie  $\bullet : \mathcal{H}_E \times \mathcal{H}_E \rightarrow \mathcal{H}_E$  postaci

$$f(t) \bullet g(t) := [\mathbf{s} f(t) g(u - t + \eta)]_{u=t} = E \int_{\eta}^t d\tau f(\tau) g(t - \tau + \eta)$$

W przypadku klasycznych reprezentacji algebry stopy ( $\eta = 0$ ) powyższe wyrażenie należy zastąpić splotem funkcji (reprezentacja Bernoulliego), bądź splotem ciągów (reprezentacja Newtona) na odcinku  $[0, t]$ . W omawianej tu reprezentacji Gaussa wartość całki-splotu jest dodatkowo uśredniona w jej dolnej granicy. Rozpisanie stosownych wyrażeń pozwala wykazać przemienność ( $f(t) \bullet g(t) = g(t) \bullet f(t)$ ) oraz rozdzielność dodawania ( $(f(t) + g(t)) \bullet h(t) = f(t) \bullet h(t) + g(t) \bullet h(t)$ ) dla uśrednionego splotu  $\bullet$ . Wyliczymy wartość splotu dwóch wielomianów Hermita. W tym celu, podobnie jak wyżej, znajdziemy splot funkcji tworzących wielomianów Hermita, by potem odszukać współczynniki przy odpowiedniej potęgach parametrów formalnych funkcji tworzącej. Mamy

$$\begin{aligned} \psi(x, t) \bullet \psi(y, t) &= E \int_{\eta}^t d\tau e^{\tau \cdot x - \frac{x^2}{2} + (t - \tau + \eta) \cdot y - \frac{y^2}{2}} = \\ &= \frac{1}{x - y} e^{-\frac{x^2 + y^2}{2}} (e^{t \cdot x} E[e^{\eta \cdot y}] - e^{t \cdot y} E[e^{\eta \cdot x}]) \end{aligned}$$

Korzystając z postaci funkcji tworzącej momentów rozkładu normalnego (zamieszczonej w Dodatku) otrzymamy

$$(7.1) \quad \psi(x, t) \bullet \psi(y, t) = \frac{e^{t \cdot x - \frac{x^2}{2}} - e^{t \cdot y - \frac{y^2}{2}}}{x - y} = \frac{\psi(x, t) - \psi(y, t)}{x - y}$$

Ponieważ z definicji funkcji tworzącej wielomianów Hermita wynika, że

$$\frac{\psi(x, t) - \psi(y, t)}{x - y} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1} - y^{k+1}}{x - y} \mathbf{s}^{k+1} \mathbf{1} = \sum_{k=0}^{\infty} (\mathbf{s}^{k+1} \mathbf{1}) \sum_{m=0}^k x^m y^{k-m}$$

więc porównując wyrażenia przy  $x^m y^n$  po obydwu stronach równości (7.1) otrzymujemy, że

$$(7.2) \quad \frac{H_m(t)}{m!} \bullet \frac{H_n(t)}{n!} = \frac{H_{m+n+1}(t)}{(m+n+1)!}$$

Jeżeli zastąpimy wielomiany Hermita  $H_k(t)$  jednomianami  $t^k$  (reprezentacja Bernoulliego) bądź symbolami Pochhammera przyrastającej potęgi  $t^{\underline{k}}$ , czy ubywającej  $t^{\overline{k}}$  (reprezentacje Newtona) i odpowiednio skorygujemy operację splotu, to własność (7.2) pozostanie spełniona. Tak więc dla wszystkich rozważanych dotychczas reprezentacji algebry stopy zachodzi tożsamość

$$(7.3) \quad (\mathbf{s}^m \mathbf{1})(t) \bullet (\mathbf{s}^n \mathbf{1})(t) = (\mathbf{s}^{m+n+1} \mathbf{1})(t)$$

Zapiszmy formułę (7.3) tak, by uwypuklić jej istotną cechę

$$(7.4) \quad \frac{H_k(t)}{k!} \bullet \frac{H_l(t)}{l!} = \mathbf{s}^{k+1} \frac{H_l(t)}{l!}$$

Korzystając z zupełności układu wielomianów Hermita możemy wielomian  $\frac{H_l}{l!}$  występujący we wzorze (7.4) zastąpić dowolną funkcją, co prowadzi do formuły wielokrotnego całkowania typu Cauchy'ego, której klasyczne analogony rozważano w pracy [2]

$$\mathbf{s}^{k+1} f(t) = E \int_{\eta}^t d\tau \frac{H_k(t - \tau + \eta)}{k!} f(\tau)$$

Formuła Cauchy'ego okazuje się jedynie specyficznym zapisem własności (7.3) splotu wielomianów  $\mathbf{s}^k \mathbf{1}$ . Reprezentacje algebry stopy, w których operator przyrostu kapitałowego  $\mathbf{s}$  jest tak określony, że spełnia własność (7.3) będziemy nazywać *reprezentacjami Mikusińskiego*. Przyczyny przyjęcia tej nazwy podane są w paragrafie 13.

## 8. OPERACJA DYSKONTOWANIA $[\mathbf{r}, \mathbf{s}]^{-1}$

Przypomnijmy tożsamość teleskopową [2], znaną z metody sumowania postępu geometrycznego

$$\sum_{k=0}^m \mathbf{s}^k \circ [\mathbf{r}, \mathbf{s}] \circ \mathbf{r}^k = \sum_{k=0}^m \mathbf{s}^k \circ (\mathbf{1} - \mathbf{s} \circ \mathbf{r}) \circ \mathbf{r}^k = \mathbf{1} - \mathbf{s}^{m+1} \circ \mathbf{r}^{m+1}$$

Po podstawieniu w powyższym równaniu definicji operatorów  $\mathbf{r}$  i  $\mathbf{s}$  specyficznych dla reprezentacji Gaussa i zapisaniu wyników działania obydwóch stron równania na dowolną funkcję  $f(t)$  (odpowiednią ilość razy różniczkowalną) otrzymamy

$$(8.1) \quad \sum_{k=0}^m \mathbf{s}^k E[f^{(k)}(\eta)] = \sum_{k=0}^m \frac{H_k(t)}{k!} E[f^{(k)}(\eta)] = f(t) - \mathbf{s}^{m+1} f^{(m+1)}(t)$$

gdzie  $f^{(k)}(\eta)$  standardowo oznacza  $k$ -tą pochodną funkcji  $f(t)$  w punkcie  $t = \eta$ . Operator  $[\mathbf{r}, \mathbf{s}]^{-1}$  jest (z definicji) odwrotnością operatora  $[\mathbf{r}, \mathbf{s}]$

$$[\mathbf{r}, \mathbf{s}] \circ [\mathbf{r}, \mathbf{s}]^{-1} = [\mathbf{r}, \mathbf{s}]^{-1} \circ [\mathbf{r}, \mathbf{s}] = \mathbf{1}$$

czyli  $f(t) = [\mathbf{r}, \mathbf{s}]^{-1} E[f(\eta)]$ , więc  $[\mathbf{r}, \mathbf{s}]^{-1}$  pozwala odtworzyć, na podstawie pełnej informacji o uśrednionej funkcji kapitału (zawierającej jej uśrednione kolejne pochodne), wartość kapitału  $f(t)$  w dowolnej chwili  $t$ . Równanie (8.1) ma następującą postać

$$f(t) = [\mathbf{r}, \mathbf{s}]^{-1} E[f(\eta)] = \sum_{k=0}^m \frac{H_k(t)}{k!} E[f^{(k)}(\eta)] + \mathbf{s}^{m+1} f^{(m+1)}(t)$$

wiec dla klasy funkcji należących do przestrzeni  $\mathcal{H}_E$ , gdy obowiązuje odpowiednia formuła Cauchy'ego (7.3), otrzymamy analogon popularnego wzoru Taylora z resztą w postaci całkowej [2]

$$(8.2) \quad f(t) = [\mathbf{r}, \mathbf{s}]^{-1} E[f(\eta)] = \sum_{k=0}^m \frac{H_k(t)}{k!} E[f^{(k)}(\eta)] + \frac{H_m(t)}{m!} \bullet f^{(m+1)}(t)$$

Zbieżność szeregu  $\sum_{k=0}^m \frac{H_k(t)}{k!} E[f^{(k)}(\eta)]$ , wynikająca z należenia  $f(t)$  do  $\mathcal{H}_E$ , pozwala nam w sposób jawny, na podstawie wzoru (8.2) i zupełności ortonormalnego systemu wielomianów  $\left\{ \frac{H_n(t)}{\sqrt{n!}} \right\}$ , przedstawić funkcję  $f(t)$  następująco

$$(8.3) \quad f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{H_k(t)}{k!} E[f^{(k)}(\eta)] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{H_k(t)}{k!} E[H_k(\eta) \cdot f(\eta)]$$

## 9. ZAMIANA REPREZENTACJI BERNOULLIEGO NA REPREZENTACJĘ GAUSSA

Rozwinięcie kapitału jako funkcji czasu  $f(t)$  w szereg względem wielomianów Hermita postaci (8.3) można otrzymać bezpośrednio z rozwinięcia  $f(t)$  w szereg Taylora (czyli z przedstawienia funkcji  $f(t)$  jako algebraicznego wyrażenia wygenerowanego w ramach reprezentacji Bernoulliego). Wystarczy do tego umiejętność przedstawienia wielomianów  $\frac{t^n}{n!} = (\mathbf{s}^n \mathbf{1})_{Bernoulli}$  występujących w szeregu Taylora jako kombinacji

liniowych wielomianów Hermita  $\frac{H_n(t)}{n!} = (\mathbf{s}^n \mathbf{1})_{Gauss}$ . Jeżeli w przedstawionym w paragrafie 5 zestawieniu wielomianów Hermita, lub we wzorze (4.5), dostrzec formułę transformacji (zmiany współrzędnych) wyrażeń zapisanych w reprezentacji Gaussa w odpowiadające im wyrażenia w reprezentacji Bernoulliego

$$\{\mathbf{s}^n \mathbf{1}\}_{Gauss} \rightarrow \{\mathbf{s}^n \mathbf{1}\}_{Bernoulli}$$

to obecnie potrzebna jest nam znajomość transformacji do niej odwrotnej, czyli

$$\{\mathbf{s}^n \mathbf{1}\}_{Bernoulli} \rightarrow \{\mathbf{s}^n \mathbf{1}\}_{Gauss}$$

W tym celu porównamy współczynniki stojące przy  $x^m$  w rozwinięciu w szereg potęgowy następującej tożsamości

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} x^m \cdot E[\eta^n \cdot (\mathbf{s}^m \mathbf{1})(\eta)] &= E[\eta^n \cdot \psi(x, \eta)] = \int_{-\infty}^{\infty} dL(\xi) \xi^n \cdot e^{x \cdot \xi - \frac{\xi^2}{2}} = \\ &= E[(x + \eta)^n] \end{aligned}$$

Łatwo zauważyć, że jedyne różne od zera współczynniki mają postać

$$E[\eta^n \cdot (\mathbf{s}^{n-2k} \mathbf{1})(\eta)] = \binom{n}{2k} \cdot E[\eta^{2k}] = \frac{n!}{2^k k! (n-2k)!}$$

dla  $k = 0, 1, \dots, \lfloor 2n \rfloor$ . Na podstawie powyższego wniosku i zupełności przestrzeni  $\mathcal{H}_E$  otrzymamy

$$\begin{aligned} t^n &= \sum_{m=0}^{\infty} E[\eta^m \cdot (\mathbf{s}^m \mathbf{1})(\eta)] \cdot H_m(t) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} E[\eta^n \cdot (\mathbf{s}^{n-2k} \mathbf{1})(\eta)] \cdot H_{n-2k}(t) = \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{n!}{2^k \cdot k!} (\mathbf{s}^{n-2k} \mathbf{1})(t) \end{aligned}$$

czyli

$$(9.1) \quad (\mathbf{s}^n \mathbf{1})_{Bernoulli} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{1}{2^k k!} (\mathbf{s}^{n-2k} \mathbf{1})_{Gauss}$$

Zwraca uwagę wyjątkowa symetria transformacji (4.5) i (9.1) pomiędzy reprezentacjami Bernoulliego i Gaussa. Jej konsekwencją jest niezwykle prosty przepis na wypisanie kolejnych jednomianów  $t^n$  jako kombinacji liniowych wielomianów Hermita. W tym celu wystarczy zamienić w zestawieniu podanym w paragrafie 5 wielomiany  $\{t^n\}$  i  $\{H_n(t)\}$  rolami oraz zignorować występujące tam znaki minusa. W efekcie uzyskamy następujące tożsamości

$$\begin{aligned}
t^2 &= H_2(t) + 1 \\
t^3 &= H_3(t) + 3H_1(t) \\
t^4 &= H_4(t) + 6H_2(t) + 3 \\
t^5 &= H_5(t) + 10H_3(t) + 15H_1(t) \\
t^6 &= H_6(t) + 15H_4(t) + 45H_2(t) + 15 \\
t^7 &= H_7(t) + 21H_5(t) + 105H_3(t) + 105H_1(t) \\
t^8 &= H_8(t) + 28H_6(t) + 210H_4(t) + 420H_2(t) + 105 \\
t^9 &= H_9(t) + 36H_7(t) + 378H_5(t) + 1260H_3(t) + 945H_1(t)
\end{aligned}$$

Autor nie zna bardziej efektywnego przykładu na natychmiastowe odwrócenie nietrywialnej macierzy o dowolnej ilości wymiarów.

## 10. STATYSTYCZNY POMIAR POCHODNYCH

Warto zatrzymać się w tym miejscu, by wyciągnąć wnioski z równości

$$(10.1) \quad E[f^{(m)}(\eta)] = E[H_m(\eta) \cdot f(\eta)]$$

którą można otrzymać wyznaczając wartość oczekiwaną iloczynu wielomianu  $H_m(\eta)$  i funkcji  $f(\eta)$  zadanej wzorem (8.3). Lewa strona równania (10.1) jest uśrednioną po standaryzowanym rozkładzie normalnym  $m$ -tą pochodną funkcji  $f(t)$ . Gdy drugi moment rozkładu Gaussa zmierza do zera ( $\sigma \rightarrow 0$ ), sam rozkład zbiega do dystrybucji  $\delta$ -Diraca [4], więc  $E[f^{(m)}(\eta)] \rightarrow f^{(m)}(0)$ . Wybierając różne pierwsze momenty rozkładu normalnego otrzymamy wartości  $m$ -tych pochodnych funkcji  $f^{(m)}(a)$  w dowolnych punktach  $a$ . Tożsamość (10.1) pozwala statystykowi wyznaczać pochodne funkcji odtwarzanej na podstawie danych empirycznych przez pomiar wartości średniej iloczynów funkcji z odpowiednim wielomianem Hermita. Wzór (10.1) posiada istotne znaczenie praktyczne w związku z bezpośrednimi zastosowaniami wielomianów Hermita. Przedstawione wyżej zestawienie kolejnych wielomianów może być traktowane jako tablica współczynników potrzebnych do statystycznego wyznaczania pochodnych funkcji.

Wynikająca z równości (10.1) i (4.2) formuła

$$E[f^{(n)}(\eta)] = E[f(\eta_1) \cdot (\eta_1 + i\eta_2)^n]$$

przypomina nieco wzór Cauchy'ego na  $n$ -tą pochodną funkcji analitycznej [10]

$$(10.2) \quad f^{(n)}(x) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C dz f(z) \cdot (z - x)^{-n-1}$$

jednak wzór (10.2) jest nieprzydatny dla określenia metody pomiaru pochodnych funkcji.

## 11. CIĄG STÓP GAUSSOWSKICH

Analogicznie do konstrukcji zastosowanych w przypadkach reprezentacji klasycznych algebry stopy [2] zdefiniujmy stopę gaussowską  $n$ -tego rzędu  $r_n$  równaniem

$$(11.1) \quad r_n \cdot E[f(\eta)] = E[f^{(n)}(\eta)]$$

Szereg (8.3) możemy zapisać następująco

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{H_k(t)}{k!} E[f^{(k)}(\eta)] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_k H_k(t)}{k!} E[f(\eta)]$$

Formuła (9.1) przejścia z reprezentacji Bernoulliego do reprezentacji Gaussa pozwala wyrazić stopę gaussowską  $n$ -tego rzędu jako kombinację liniową stóp różniczkowych  $r_{dk}$  rzędów nie niższych niż  $n$ -ty ( $k \geq n$ )

$$\begin{aligned} r_n &= \frac{E[f^{(n)}(\eta)]}{E[f(\eta)]} = \frac{E[H_n(\eta) \cdot f(\eta)]}{E[f(\eta)]} = \\ &= \frac{1}{E[f(\eta)]} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_{dk}}{k!} \cdot E[H_n(\eta) \cdot \eta^k] \cdot f(0) = \\ &= \frac{f(0)}{E[f(\eta)]} \sum_{k=0}^{\infty} r_{d(n+2k)} \cdot E\left[H_n(\eta) \cdot \frac{\eta^{n+2k}}{(n+2k)!}\right] = \frac{f(0)}{E[f(\eta)]} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_{d(n+2k)}}{2^k \cdot k!} \end{aligned}$$

W przypadku gdy kapitał zmienia się wykładniczo w czasie w opisie reprezentacji Bernoulliego zgodnie ze stopą różniczkową  $r$  ( $f^{(1)}(t) = r f(t)$ ) z (11.1) otrzymamy  $r_n = r^n$ , czyli

$$(11.2) \quad [\mathbf{r}, \mathbf{s}]^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^k H_k(t)}{k!} = \psi(r, t)$$

Funkcja tworząca  $\psi(x, t) = e^{r \cdot t - \frac{r^2}{2}}$  ma prostą interpretację finansową. Jest ona czynnikiem dyskontującym kapitał na chwilę  $t$ , czyli jest wartością jednostki kapitału na tą chwilę, wyznaczoną dla wykładniczego wzrostu kapitałowego przebiegającego w tempie mierzonym stopą różniczkową  $r$ . Kapitał ten choć jednostkowy w momencie losowym  $\eta$ , to uśredniony po standaryzowanym rozkładzie normalnym wokół chwili 0 ma względem tej chwili wartość  $e^{-\frac{r^2}{2}}$ . Dla wykładniczego wzrostu logarytmiczna stopa wzrostu, por.[7], zdefiniowana jako logarytm naturalny czynnika dyskontowego

$$r_{\ln}(t) := \ln([\mathbf{r}, \mathbf{s}]^{-1})$$

jest funkcją liniowo zależną od czasu

$$r_{\ln}(t) = \ln(\psi(r, t)) = r \cdot t - \frac{r^2}{2}$$

## 12. PRZYKŁADY LICZBOWE

Przedstawione poniżej przykłady nawiązują do rachunków zamieszczonych we wcześniejszym opracowaniu [2].

*Wzrost wykładniczy.* Rozważmy powiększanie się zainwestowanego kapitału  $k$  o stały roczny procent  $r = 0.2$  w konwencji kapitalizacyjnej ciągłej, czyli wzrostu opisanego funkcją

$$(12.1) \quad k(t) = e^{\frac{0.2}{1 \text{ rok}} \cdot t} \cdot k$$

Okres wdrażania (rozruchu) inwestycji trwał dwa lata ( $\sigma = 2$ ), tzn. w chwili  $t$  „pracująca” część kapitału wynosiła  $\int_{-\infty}^t dM_{0,2}(\tau)$ . Szukamy wartości kapitału po 10-ciu latach ( $t_{10} = 10$ ), licząc od momentu połowicznego wdrożenia inwestycji ( $t = 0$ ). Problem ten jest równoważny zadaniu wyznaczenia wartości oczekiwanej kapitału po 10-ciu latach z inwestycji o identycznym wzroście, poczynionej w chwili  $\tau$  będącej zmienną losową o rozkładzie normalnym  $dM_{0,2}(\tau)$ . Przechodząc do naturalnej jednostki czasowej (2 lata), czyli do opisu zadania za pomocą standaryzowanego rozkładu normalnego mamy  $r = 0.4$ ,  $\sigma = 1$ ,  $t_{10} = 5$ . Zgodnie z formułami (11.2) i (5.1) wartość kapitału po 10-ciu latach wyniesie

$$(12.2) \quad k(t_{10}) = [\mathbf{r}, \mathbf{s}]^{-1} k = \psi(r, t_{10}) \cdot k = \psi(0.4, 20) \cdot k = e^{2-0.08} \cdot k = 6.82 \cdot k$$

Wielkość ta jest 0.923 (czyli  $e^{-0.08}$ ) częścią kapitału  $k$  wzrastającego zgodnie z taką samą stopą  $r$ , lecz w całości „pracującego” od chwili  $t = 0$ , lub jest równoważna kapitałowi wdrożonemu w taką samą inwestycję w całości w momencie  $t' = 0.08/0.4 = 0.2$  następującym po upływie  $0.2 \cdot 2 = 0.4$  roku od chwili  $t = 0$  (gdyż wtedy  $k(t) = e^{r(t-t')} \cdot k$ ). Innymi słowy wdrażana inwestycja zaczyna być rentowną po chwili  $t'$  określonej warunkiem  $r_{\ln}(t') = 0.4 t' - 0.008 = 0$ , czyli po  $t' = 0.2 \cdot 2 \text{ lata}$ , to znaczy po 0.4 roku. Po dziesięciu latach otrzymamy w procesie (12.2) zysk taki, jak z inwestycji o kapitalizacji ciągłej zadanej stopą różniczkową  $r = \frac{2-0.08}{10} = 0.192 \frac{1}{\text{rok}}$ .

*Obliczanie stóp gaussowskich dwóch pierwszych rzędów.* Przykład ten przedstawia zagadnienie aproksymacji procesu kapitałowego wielomianami Hermita. Jak pokazano w przykładzie zamieszczonym w pracy [2] procesem kapitałowym, uwzględniającym zmiany do drugiego rzędu włącznie, najlepiej dopasowanym do wykładniczego wzrostu  $k(t) =$

$e^{0.2 \cdot t} \cdot k$  z poprzedniego przykładu, jest proces opisywany czynnikiem dyskontowym

$$(12.3) \quad [\mathbf{r}, \mathbf{s}]^{-1}(t) = 1 + r_{d1}t + \frac{r_{d2}}{2}t^2$$

gdzie kolejne stopy różniczkowe są odpowiednio równe  $r_{d1} = 0.04164 \frac{1}{rok}$  oraz  $r_{d2} = 0.1195 \frac{1}{rok^2}$ . Zmieniając, podobnie jak wyżej, jednostkę czasową na dwuletnią mamy  $r_{d1} = 0.08328$  i  $r_{d2} = 0.478$ . Dla równoważnego dyskontowania w reprezentacji Gausa, gdzie  $\rho := E[[\mathbf{r}, \mathbf{s}]^{-1}(\eta)]$ , mamy

$$[\mathbf{r}, \mathbf{s}]^{-1}(t) = \left(1 + r_1 H_1(t) + \frac{r_2}{2} H_2(t)\right) \cdot \rho = \left(1 + r_1 \cdot t + r_2 \cdot \frac{t^2 - 1}{2}\right) \cdot \rho$$

i przez porównanie z wyrażeniem (12.3) otrzymujemy następujący układ równań na współczynniki wielomianu w reprezentacji Gausa  $\rho \cdot r_1 = r_{d1}$ ,  $\rho \cdot r_2 = r_{d2}$ ,  $\rho(1 - \frac{r_2}{2}) = 1$ , Tego typu równania są układami liniowymi względem iloczynów  $\rho \cdot r_k$ . Stosując np. szkolną metodę eliminacji Gausa otrzymamy następujące rozwiązanie  $\rho = 1 + \frac{r_{d2}}{2} = 1.239$ ,  $r_1 = 0.8071 \cdot r_{d1} = 0.06722$ ,  $r_2 = 0.8071 \cdot r_{d2} = 0.3858$ . Zgodnie ze wzorem (11.1) liczby  $r_1$  i  $r_2$  są uśrednionymi prędkościami zmiany kwoty kapitału dwóch pierwszych rzędów, wyrażonymi w stosunku do przeciętnej wartości kapitału. Uzyskaliśmy parametry gaussowskiej reprezentacji stopy procesu najlepiej dopasowanego do tempa wzrostu (12.1). By otrzymać najlepszą aproksymację procesu (12.2) wystarczy, zgodnie z jednym z wniosków zamieszczonych w poprzednim przykładzie, dokonać korekty współczynnika  $\rho$  do wartości  $0.923 \cdot \rho = 1.1436$ .

### 13. RACHUNEK OPERATOROWY MIKUSIŃSKIEGO

Rozważmy uśredniony splot trzech dowolnych funkcji  $f(t)$ ,  $g(t)$ ,  $h(t)$  należących do przestrzeni  $\mathcal{H}_E$ , więc posiadających rozwinięcie w bazie wielomianów Hermita

$$\begin{aligned} f(t) \bullet (g(t) \bullet h(t)) &= \sum_{l,m,n=0}^{\infty} f_l \cdot H_l(t) \bullet ((g_m \cdot H_m(t)) \bullet (h_n \cdot H_n(t))) = \\ &= \sum_{l,m,n=0}^{\infty} (f_l \cdot g_m \cdot h_n) (H_l(t) \bullet (H_m(t) \bullet H_n(t))) = \\ &= \sum_{l,m,n=0}^{\infty} (f_l \cdot g_m \cdot h_n) \frac{l! \cdot m! \cdot n!}{(l+m+n+2)!} H_{l+m+n+2}(t) = \\ &= \sum_{l,m,n=0}^{\infty} (f_l \cdot g_m \cdot h_n) ((H_l(t) \bullet H_m(t)) \bullet H_n(t)) = (f(t) \bullet g(t)) \bullet h(t) \end{aligned}$$



gdzie w trakcie przekształceń skorzystaliśmy z formuły (7.3). Uśredniony splot  $\bullet$  posiada więc własność łączności, konieczną by móc rozważać pierścień „ułamków”  $\{f(t)/g(t)\}$ , gdzie symbol  $/$  ma identyczne powiązanie z uśrednionym splotem  $\bullet$ , jak znana wszystkim kreska ułamkowa z symbolem standardowego mnożenia liczbowego. Łączność okazała się konsekwencją formuły splotu (7.3) więc jest własnością operacji  $\bullet$  zdefiniowanej na podstawie operatora przyrostu kapitałowego  $s$  w dowolnej reprezentacji Mikusińskiego algebry stopy. Ułamki postaci  $f(t)/g(t)$  związane ze zwykłym splotem nazywane są *hiperfunkcjami* [8],[3]. Są nimi wszystkie funkcje, a także wspomniana wcześniej dystrybucja  $\delta$ -Diraca, która nie jest funkcją. Rachunek na hiperfunkcjach nazywany jest *rachunkiem operatorowym Mikusińskiego* [8]. Pozwala on uwzględnić m.in. nieciągłe zmiany kapitałowe (np. wpłata na konto) w jednolitym formalizmie rachunku stóp. Wykazana wyżej własność splotu (7.3) umożliwia nie tylko określenie całkowitej postaci reszty w analogonii formuły Taylora, ale przede wszystkim przeniesienie formalizmu algebry stopy na jeszcze wyższy poziom abstrakcji, jakim jest rachunek Mikusińskiego. W ramach tego rachunku wszystkie własności algebraiczne stopy stają się łączne i przemienne, odtwarzając znane z czasów szkolnych operacje na zwykłych ułamkach, a konsekwencje takich rachunków dopiero w kontekście odpowiedniej reprezentacji Mikusińskiego algebry stopy przybierają postać skomplikowanych wzorów. W prezentowanej pracy brak miejsca na choćby częściowe zademonstrowanie praktycznych walorów rachunku Mikusińskiego, dlatego autor obiecuje przedstawić je w odrębnym opracowaniu, odsyłając zniecierpliwionych do obszernej monografii napisanej przez twórcę tego rachunku [9]. Tu warto jedynie zauważyć, że własność splotu (7.3), potrzebną dla spełnienia koniecznej dla rachunku na hiperfunkcjach łączności operacji  $\bullet$ , można byłoby otrzymać dla wielomianów generowanych przez dowolną funkcję postaci  $\psi(x, t) = e^{x \cdot t} \cdot f(x)$ . Wielomiany takie w literaturze nazywane są *wielomianami Appella* [4]. Należą do nich, prócz wielomianów już omówionych, m.in. *wielomiany Bernoulliego* i *wielomiany Laguerre’a* [4] (ortonormalne względem rozkładu gamma). Tak więc rachunek Mikusińskiego można uogólnić nie tylko na sploty dyskretne (reprezentacje Newtona algebry stopy) i sploty uśrednione po zmiennych losowych o rozkładzie normalnym, ale także na sploty uśrednione po zmiennych losowych będących sumami kwadratów tamtych zmiennych, więc opisywanych statystykami  $\chi^2$ .

## 14. ZAKOŃCZENIE

Układ wielomianów Hermita posiada fundamentalne znaczenie dla obowiązującego paradygmatu fizyki kwantowej, w związku z pojawieniem się tych wielomianów podczas rozwiązywania problemu oscylatora harmonicznego, por. [7]. Autorzy popularnego podręcznika metod matematycznych fizyki [10] snują wizję świata bardzo małych istot rozumnych. Dochodzą do wniosku, że taka cywilizacja odkryła by wielomiany Hermita całe stulecia przed funkcjami trygonometrycznymi. W kontekście przedstawionego opracowania wydaje się, że nie trzeba mieć mikroskopijnych rozmiarów, żeby dostrzec wagę rachunków prowadzonych w przestrzeni Hilberta zbudowanej na bazie takich wielomianów. Wystarczy uwzględnić w jakichkolwiek rachunkach element niepewności, czy ryzyka, mierzony rozkładem normalnym, a wielomiany Hermita pojawią się jako naturalna konsekwencja podstawowej w analizie matematycznej potrzeby aproksymacji funkcji wielomianami. Należy wtedy pamiętać o zmodyfikowaniu stosowanego określenia stopy wzrostu odpowiednio do wybranej reprezentacji opisu procesów kapitałowych,

## DODATEK

Formuła wyrażająca wielomian Hermita  $H_n(t)$  przez uśrednioną po rozkładzie normalnym  $n$ -krotną całkę iterowaną znajduje się w pracy [11]. Brak tam jednak chociażby sugestii dotyczącej jej dowodu, bądź odwołania do stosownego źródła. Zanim wykażemy ten związek przypomnijmy wzór na parzysty moment rozkładu normalnego (wszystkie nieparzyste momenty oczywiście znikają). Mamy

$$E[\eta^{2k}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \eta^{2k} e^{-\frac{\eta^2}{2}} = \frac{(-2)^k}{\sqrt{2\pi}} \frac{d^k}{dx^k} \int_{-\infty}^{\infty} d\eta e^{-\frac{x\eta^2}{2}} \Big|_{x=1}$$

a po zamianie zmiennych  $\eta\sqrt{x} \rightarrow \tau$  i skorzystaniu z unormowania rozkładu normalnego otrzymamy

$$(14.1) \quad E[\eta^{2k}] = (-2)^k \frac{d^k}{dx^k} x^{-\frac{1}{2}} \Big|_{x=1} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1) = \frac{(2k)!}{2^k k!}$$

Funkcja tworząca momentów  $E[e^{\eta \cdot x}]$  ma postać

$$E[e^{\eta \cdot x}] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} E[\eta^k] = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^{2l}}{(2l)!} \frac{(2l)!}{2^l l!} = e^{\frac{x^2}{2}}$$

Przejdźmy do wykazania równości

$$(14.2) \quad n! s^n 1 = H_n(t)$$

*Dowód.* Dla  $n = 1$  lewa strona (14.2) ma postać  $E \int_{\eta}^t d\tau = E[t - \eta] = t$  i jest równa prawej stronie równości, bowiem  $H_1(t) = E[t + i\eta] = t$ . Stosując wnioskowanie indukcyjne rozpatrzmy postać prawej strony (14.2) dla  $n \rightarrow n + 1$ . Mamy

$$(n + 1)! \mathbf{s}^{n+1} \mathbf{1} = (n + 1) \mathbf{s} H_n(t) = (n + 1) E \int_{\eta}^t d\tau (\tau + i\eta_1)^n$$

gdzie zgodnie z przyjętą konwencją operator  $E$  uśrednia wszystkie zmienne losowe znajdujące się po jego prawej stronie. Obliczając całkę względem zmiennej  $\tau$  otrzymamy

$$(n + 1)! \mathbf{s}^{n+1} \mathbf{1} = E[(t + i\eta_1)^{n+1} - (\eta + i\eta_1)^{n+1}] = H_{n+1}(t) - E[H_{n+1}(\eta)]$$

Dla zakończenia całości dowodu należy wykazać, że dla  $n > 0$  średnia wartość wielomianu Hermita  $H_n(\eta)$  jest równa zero. Równość  $E[H_{2n+1}(\eta)] = 0$  jest oczywista, gdyż wielomian  $H_{2n+1}(\eta)$  zależy jedynie od nieparzystych potęg zmiennej  $\eta$ , więc uśredniony z parzystą funkcją rozkładu daje w wyniku zero. Wystarczy już tylko pokazać, że wyrażenie

$$\int_{-\infty}^{\infty} dL(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} dL(\eta) (\tau + i\eta)^{2n}$$

jest równe zero. Wykorzystując dwumian Newtona i wzór (14.1) otrzymujemy

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} i^k \int_{-\infty}^{\infty} dL(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} dL(\eta) \eta^k \tau^{2n-k} = \\ & = \sum_{r=0}^n \frac{(2n)!}{(2r)!(2n-2r)!} (-1)^r \frac{(2r)!(2n-2r)!}{2^r r! 2^{n-r} (n-r)!} = \frac{(2n)!}{n!} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)^n = 0 \end{aligned}$$

□

STRESZCZENIE. Opracowanie przedstawia realizację algebry stopy zwrotu dla modeli dyskontujących kapitał do chwili opisywanej zmienną losową o rozkładzie normalnym. Wykazano, że w takich przypadkach rachunek stóp sprowadza się do operowania funkcjami należącymi do przestrzeni Hilberta rozpiętej na bazie wielomianów Hermita. Określono metodę aproksymacji funkcji opartą na stochastycznym analogonie szeregu Taylora. Podano przykłady rachunków dotyczących zmian kapitałowych w tej nieklasycznej reprezentacji algebry stopy. Zaproponowano sposób statystycznego pomiaru pochodnych funkcji wyznaczanych empirycznie. Wykazane algebraiczne własności reprezentacji Gaussa prowadzą do uogólnień rachunku operatorowego Mikusińskiego.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] Arrow K.J., *Eseje z teorii ryzyka*, PWN, Warszawa 1979.
- [2] Piotrowski E.W., *Operatorowa stopa zwrotu – zastosowania klasyczne*, oddane do druku w Przeglądzie Statystycznym .
- [3] *Elementy nowoczesnej matematyki dla inżynierów*, pod red. H.Steinhausa, PWN, Wrocław 1971.
- [4] *Encyclopaedia of Mathematics on CD-ROM*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht 1997.
- [5] Antoniewicz J., *Tablice funkcji dla inżynierów*, PWN, Warszawa 1969.
- [6] Graham R.L., Knuth D.E., Patashnik O., *Matematyka konkretna*, PWN, Warszawa 1996.
- [7] Piotrowski E.W., *Macierzowa stopa zwrotu*, Przegląd Statystyczny 46(1999)340-352.
- [8] Yosida K., *Operatoinal Calculus*, Springer-Verlag, New York 1984.
- [9] Mikusiński J., *Rachunek operatorów*, PWN, Warszawa 1957.
- [10] Byron F.W., Fuller R.W., *Matematyka w fizyce klasycznej i kwantowej*, t. 1, PWN, Warszawa 1975.
- [11] Viskov O.V., *Niekomutativnyj podhod k klasycznym zadaczam analiza*, Tr. MIAN 177(1986)21-32.

*Instytut Fizyki Teoretycznej, Uniwersytet w Białymstoku, LIPOWA 41, 15-424 BIAŁYSTOK.*

*E-mail address: ep@alpha.uwb.edu.pl*