HIPERSTOPA ZWROTU

(RePEc:sla:eakjkl:113PL 1-III-2000)

EDWARD W. PIOTROWSKI

> Wagi dziesiętne w sklepach, rachunki za zakupy, cyfrowe zegary. Czy mamy to wszystko odrzucić po to, żeby stwarzać sztuczny świat ułamków „szkolnych", takich jak 10/11 czy 12/7, które się potem dodaje według dziwnych reguł w niewiadomym celu? [1]

1. Wstęp

Algebra stopy zwrotu [2],[3] stanowi fundamentalną dla matematyki finansowej strukturę formalną, obejmującą wszystkie stosowane sposoby opisu zmian kapitału, a także ich nowe modyfikacje, z uwzględniającymi czynniki losowe włącznie, mogące w przyszłości wzbogacić metody ilościowej charakterystyki procesów kapitałowych. Wykazuje ona cechy, zob. [3], świadczące o powiązaniach z głębszą abstrakcyjnie strukturą algebraiczną, znaną od półwiecza jako *rachunek Mikusińskiego na hiperfunkcjach* [4]. Rachunek ten stanowi alternatywne podejście do zagadnień teorii dystrybucji [5] w jej ujęciu funkcjonałowym Schwartza, czy ujęciu ciągowym, odkrytym także przez Jana G.-Mikusińskiego. W literaturze matematycznej rachunek Mikusińskiego odnajdziemy również pod jego alternatywnymi nazwami *rachunku operatorów*, czy *rachunku Heaviside'a*.

Początki teorii dystrybucji sięgają badań Paula Diraca dotyczących teorii pola (wtedy pojawiła się występująca niżej „funkcja" delta Diraca)[6]. Dziś fizycy matematyczni zaliczają teorię dystrybucji do kanonicznych narzędzi badawczych. Najczęściej wiąże się ona z techniką rachunkową operującą funkcjami Greena [6], pozwalającą znaleźć skomplikowane rozwiązania układów liniowych równań różniczkowych cząstkowych teorii pola na podstawie ich fundamentalnych rozwiązań opisujących punktowe źródła pól. Niestety, aplikacje te dotyczą wielowymiarowej dziedziny dystrybucji, gdzie rachunek Mikusińskiego traci swój walor prostoty. Wydaje się, że w aplikacjach finansowych, gdzie jednowymiarowy parametr jakim jest czas gra autonomiczną rolę, zaproponowane przez Mikusińskiego hiperfunkcje-ułamki powinne znaleźć swoje naturalne zastosowanie.

Teoria hiperfunkcji Mikusińskiego łączy uogólnienie klasycznego pojęcia funkcji z łatwością manipulacji na ułamkach upowszechnianych w ramach szkolnictwa podstawowego. Chociaż istnieje, wskazana w pracy [3], możliwość rozszerzenia rachunku Mikusińskiego na wszystkie reprezentacje algebry stopy, ograniczymy się do jego opisu w ramach reprezentacji Bernoulliego, czyli opisu ewolucji kapitału w konwencji kapitalizacji ciągłej. Wymaga tego czytelność i zachowanie konsystencji prezentowanego opracowania, a przede wszystkim jego ograniczona przez formę artykułu objętość.

Niżej przedstawiony rachunek ułamków-hiperfunkcji, pomimo iż bazuje jedynie na jednej reprezentacji algebry stopy, pozwala wyjść poza ramy opisu kapitalizacji ciągłej przez uwzględnienie skokowych zmian kapitału w ramach jednolitej formuły stopy procentowej. Daje to uniwersalne narzędzie wyrażania w języku stopy zysku wszelkich zmian kapitału, które skraca w znacznym stopniu rachunki stosowane do określania ilościowych zmian kapitałowych.

2. Funkcje liczbowe na $\mathbb{R}_+$

Rozważmy zbiór funkcji o wartościach liczbowych, określonych na nieujemnej (włącznie z zerem) części osi liczb rzeczywistych $\mathbb{R}_+$. Współrzędna $t \in \mathbb{R}_+$, należąca do tej dziedziny, w zastosowaniach finansowych interpretowana jest jako czas, w którym opisujemy procesy kapitałowe. Funkcje na $\mathbb{R}_+$ będziemy ujmować w nawiasy klamrowe $\{\dots\}$, zob. [7], aby przy pomocy tego zabiegu odróżnić funkcję, np. $\{\sin(t)\}$, od jej wartości liczbowej w punkcie t, czyli $\sin(t)$. Zabieg taki jest konieczny jeśli chcemy uniknąć istotnych dwuznaczności w dalszym tekście.

W zbiorze funkcji, prócz ich dodawania, rozważymy operację splotu $\bullet$, zdefiniowaną dla dowolnych dwóch funkcji $\{f(t)\}$ i $\{g(t)\}$ następująco

$$\{f(t)\} \bullet \{g(t)\} := \left\{ \int_0^t f(\tau) \cdot g(t-\tau)\, d\tau \right\}$$

Operacja splotu $\bullet$ jest przemienna

$$\{f(t)\} \bullet \{g(t)\} = \left\{ \int_0^t f(\tau) \cdot g(t-\tau)\, d\tau \right\} =$$

$$= \left\{ - \int_t^0 f(t-\tau') \cdot g(\tau')\, d\tau' \right\} = \{g(t)\} \bullet \{f(t)\}$$

a dodawanie funkcji jest względem niej rozłączne

$$(\{f(t)\} + \{g(t)\}) \bullet \{h(t)\} = \left\{ \int_0^t (f(\tau) \cdot h(t-\tau) + g(\tau) \cdot h(t-\tau))\ d\tau \right\} =$$

$$= \left\{ \int_0^t f(\tau) \cdot h(t-\tau)\, d\tau \right\} + \left\{ \int_0^t g(\tau) \cdot h(t-\tau)\, d\tau \right\} =$$

$$= \{f(t)\} \bullet \{h(t)\} + \{g(t)\} \bullet \{h(t)\}$$

gdzie w przypadku braku nawiasów przyjęliśmy konwencję w której wykonujemy najpierw operacje splotu $\bullet$, a po nich dodawania.

Jednak własnością, która pozwala nam w pełni przenieść przyzwyczajenia rachunkowe dotyczące mnożenia liczb na rachunki z operacją splotu jest łączność:

$$(\{f(t)\} \bullet \{g(t)\}) \bullet \{h(t)\} = \left\{ \int_0^t \left(\int_0^\tau f(\tau') \cdot g(\tau-\tau')\, d\tau' \right) \cdot h(t-\tau)\, d\tau \right\} =$$

$$= \left\{ \int_0^t f(\tau') \cdot \left(\int_0^{t-\tau'} g(t-\tau'-\tau'') \cdot h(\tau'')\, d\tau'' \right)\, d\tau' \right\} = \{f(t)\} \bullet (\{g(t)\} \bullet \{h(t)\})$$

W artykule [3] autor wskazał możliwości uogólnień operacji splotu zachowujących wszystkie powyższe własności, co pozwala przenieść rachunek Mikusińskiego na niezwykle bogatą klasę modeli opisujących zjawiska finansowe. Ze względu na rozległość zagadnienia uogólnienia te wymagają odrębnych opracowań.

Tak np. we wprowadzonych oznaczeniach funkcja tożsamościowo równa liczbie jeden ma postać $\{1\}$. Przyjmując konwencję Sierpińskiego liczenia od zera, zob. [8], zdefiniujmy

$$\{1\}_0 := \{1\}\,, \quad \text{oraz} \quad \{1\}_k := \{1\} \bullet \{1\}_{k-1} \quad \text{dla} \quad k \in \mathbb{N} \tag{2.1}$$

Otrzymujemy w ten sposób ciąg wielomianów k-tego stopnia

$$\{1\}_k := \{1\}^{k+1} = \overbrace{\{1\} \bullet \{1\} \cdots \bullet \{1\}}^{k+1 \text{ czynników}}$$

które w algebrze stopy były oznaczane symbolami $\mathbf{s}^k 1$ i np. w reprezentacji Bernoulliego [2] są następującymi funkcjami

$$\{1\}_k = \{t^k/k!\} \tag{2.2}$$

Ta jawna postać wielomianów $\{1\}_k$ wynika z zasady indukcji matematycznej [9], gdyż na podstawie definicji (2.1) równość (2.2) jest prawdziwa dla $k = 0$, a jeśli założymy poprawność wzoru (2.2) dla pewnego $m \in \mathbb{N}$, to otrzymamy wymaganą zależność dla odpowiedniego wielomianu $(m+1)$-go stopnia

$$\{1\}_{m+1} = \{1\} \bullet \{1\}_m = \left\{ \int_0^t (\tau^m/m!)\, d\tau \right\} = \{t^{m+1}/(m+1)!\}$$

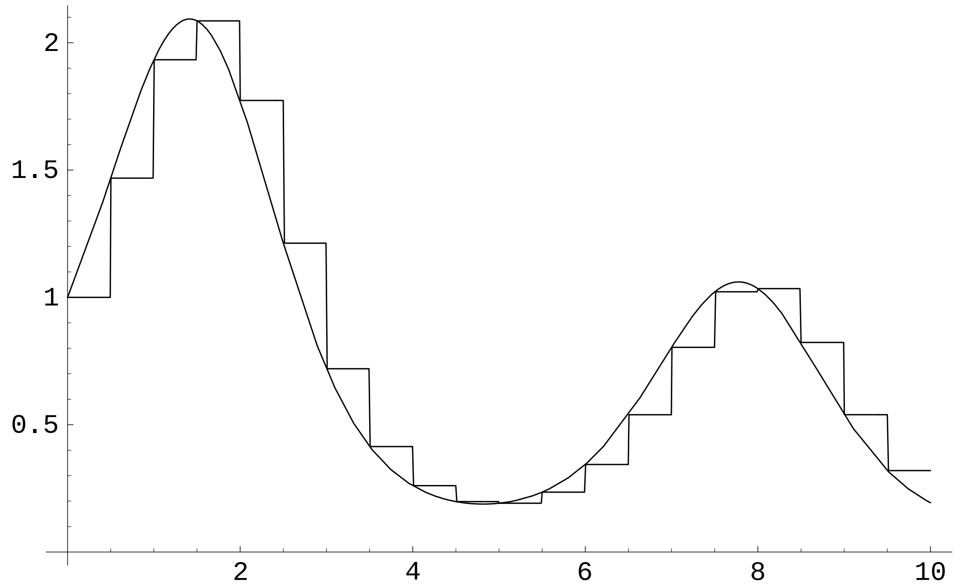
3. Funkcje schodkowe na $\mathbb{R}_+$

Niech, zgodnie z konwencją Iversona [10], wyrażenie [*zdanie*] ma wartość 1 w przypadku gdy *zdanie* jest prawdziwe, a 0 gdy tak nie jest. Ponieważ dziedziną funkcji omawianych w tym opracowaniu jest $\mathbb{R}_+$, więc we wszystkich rozważanych wyrażeniach prawdziwą jest nierówność $0 \le t$, czyli $[0 \le t] = 1$. Dlatego możemy zamiennie używać symboli $\{[0 \le t]\}_k$ oraz $\{1\}_k$. W celu generowania wyrażeń w rachunku Mikusińskiego potrzebne będą prócz funkcji stałej jedynie funkcje zdaniowe [11] postaci $\{[\tau \le t]\}$. Zwykło się je nazywać funkcjami *theta Heaviside'a* bądź, ze względu na kształt ich wykresów, *funkcjami skoku* [7]. Dowolną kombinację liniową funkcji skoku, czyli funkcję postaci $\sum_k \{p_k \cdot [\tau_k \le t]\}$, o współczynnikach liczbowych $p_1, p_2, \ldots$, nazywamy *funkcją schodkową*. Funkcje skoku są najprostszym rodzajem funkcji schodkowych.

Ustalmy parametr $\Delta \in \mathbb{R}_+$. Niech określenie *funkcja ciągła prawie wszędzie na* $\mathbb{R}_+$ oznacza funkcję ciągłą na zbiorze $\mathbb{R}_+$, z wyjątkiem co najwyżej punktów, których liczba w każdym przedziale skończonym jest skończona. Dla danej funkcji $\{f(t)\}$ ciągłej na $\mathbb{R}_+$ prawie wszędzie, możemy skonstruować następującą funkcję schodkową

$$\{f_\Delta(t)\} := \{f(0) \cdot [0 \le t]\} + \sum_{k=1}^{\infty} \{(f(k \cdot \Delta) - f((k-1) \cdot \Delta)) \cdot [k \cdot \Delta \le t]\}$$

Rysunek przedstawia wykres takiej konstrukcji otrzymanej dla pewnej funkcji gładkiej $\{f(t)\}$ i $\Delta = 0.5$. Wykres funkcji aproksymującej $\{f_\Delta(t)\}$ odpowiada poziomym częściom wspartej na krzywej $\{f(t)\}$ linii łamanej w kształcie schodków o stopniach różnej wysokości. Różnica $\{f(t)\} - \{f_\Delta(t)\}$ mierzy wzrost, bądź spadek funkcji $\{f(t)\}$ względem jej wartości w najbliższym z punktów z lewej, na którym wsparta jest łamana.



Obserwujemy, że dla $\Delta \to 0$ funkcja $\{f_\Delta(t)\}$ zbiega do $\{f(t)\}$ w tym sensie, że dla dowolnej funkcji $\{g(t)\}$ zachodzi

$$\lim_{\Delta\to 0} (\{f_\Delta(t)\} \bullet \{g(t)\}) = \{f(t)\} \bullet \{g(t)\}$$

Zmiany kapitałowe modelowane funkcją $\{f(t)\}$ można aproksymować przy pomocy funkcji schodkowej $\{f_\Delta(t)\}$. Stosowanie takiego zabiegu jest często wykorzystywane w życiu codziennym. W praktyce finansowej dostrzeżemy go np. w przeprowadzaniu okresowych bilansów przedsiębiorstwa, w zaokrąglaniu kwot do ustalonego miejsca po przecinku, czy w komputerowej wizualizacji wykresów funkcji zmian cenowych. Aproksymacja ta posiada jednak poważne mankamenty. Arbitralny wybór punktów $k{\cdot}\Delta \in \mathbb{R}_+$ prowadzi do dużej nieefektywności – w prawie każdym z nich nie zachodzą żadne skokowe zmiany kapitałowe, a miejsca dziedziny czasowej w których takie zmiany zachodzą zwykle nie odpowiadają dokładnie owym punktom. Przy okazji tracimy także możliwość opisu wzrostu za pomocą stopy chwilowej, gdyż powyższa aproksymacja nie odtwarza pochodnej funkcji. Sama idea funkcji schodkowych okazuje się jednak przydatna do precyzyjnego przedstawiania chwilowych zmian kapitałowych. Odpowiednio zaadoptowana umożliwia skonstruowanie hiperstopy, opisanej w paragrafie 6.

4. Ułamki funkcyjne

Podobnie jak w znanej ze szkolnych podręczników algebrze, w rachunku Mikusińskiego można wprowadzić, patrz [7], dla każdej uporządkowanej pary funkcji $\{f(t)\}$ i $\{g(t)\} \neq \{0\}$ ułamek $\frac{\{f(t)\}}{\{g(t)\}}$ (zwany dalej także *hiperfunkcją*) o własności $\{f(t)\} = \frac{\{f(t)\}}{\{g(t)\}} \bullet \{g(t)\}$. W całym bieżącym tekście pozioma kreska ułamkowa używana jest jedynie w takich specyficznych „ułamkach”, symbolizując działanie odwrotne do splotu $\bullet$, zaś dla oznaczania tradycyjnych ułamków stosowany jest znak „/”. Z twierdzenia Titchmarsha [7] wynika, że jeżeli $\{f(t)\}$, $\{g(t)\}$ i $\frac{\{f(t)\}}{\{g(t)\}}$ są funkcjami ciągłymi na $\mathbb{R}_+$, to funkcja $\frac{\{f(t)\}}{\{g(t)\}}$ jest unikalna (ułamek $\frac{\{f(t)\}}{\{g(t)\}}$ ma tylko jedno przedstawienie w tej klasie funkcji). Nie zawsze funkcja $\frac{\{f(t)\}}{\{g(t)\}}$ istnieje (stąd nazwa hiperfunkcja), w tym samym sensie jak nie istnieje liczba naturalna $10/11$ (choć liczba naturalna $4/2$ istnieje, tak jak np. istnieje na $\mathbb{R}_+$ funkcja ciągła $\frac{\{t^3-6\cdot t\}}{\{6t+6\}}$ równa $\{t-1\}$). Jednak w każdym przypadku istnieje para funkcji $\{f(t)\}$ i $\{g(t)\}$, tak jak istnieje para liczb naturalnych 10 i 11. Znane nam operacje na ułamkach funkcyjnych są następujące

- dodawanie

$$\frac{\{a(t)\}}{\{b(t)\}}+\frac{\{c(t)\}}{\{d(t)\}}:=\frac{\{a(t)\}\bullet\{d(t)\}+\{b(t)\}\bullet\{c(t)\}}{\{b(t)\}\bullet\{d(t)\}}$$

- splot (mnożenie)

$$\frac{\{a(t)\}}{\{b(t)\}}\bullet\frac{\{c(t)\}}{\{d(t)\}}:=\frac{\{a(t)\}\bullet\{c(t)\}}{\{b(t)\}\bullet\{d(t)\}}$$

- porównywanie

$$\frac{\{a(t)\}}{\{b(t)\}}=\frac{\{c(t)\}}{\{d(t)\}}\ \text{wtedy i tylko wtedy, gdy}\ \{a(t)\}\bullet\{d(t)\}=\{b(t)\}\bullet\{c(t)\}$$

Łatwo zauważyć, że ułamki $\frac{\{c\}}{\{1\}}$, gdzie $\{c\}$ jest funkcją o stałej wartości równej liczbie c, są *de facto* liczbami, gdyż

$$\frac{\{a\}}{\{1\}}+\frac{\{b\}}{\{1\}}=\frac{\{a\cdot t+b\cdot t\}}{\{1\}_1}=\frac{\{1\}\bullet\{a+b\}}{\{1\}\bullet\{1\}}=\frac{\{a+b\}}{\{1\}}$$

oraz

$$\frac{\{a\}}{\{1\}}\bullet\frac{\{b\}}{\{1\}}=\frac{\left\{\int_0^t a\cdot b\,d\tau\right\}}{\{1\}_1}=\frac{\{1\}\bullet\{a\cdot b\}}{\{1\}\bullet\{1\}}=\frac{\{a\cdot b\}}{\{1\}} \tag{4.1}$$

Dlatego możemy napisać, że dla dowolnej liczby (rzeczywistej, czy zespolonej) zachodzi możliwość reprezentowania jej ułamkiem funkcyjnym

$$c=\frac{\{c\}}{\{1\}}$$

Splot wykazuje własność jaką posiada mnożenie funkcji przez liczby, mamy bowiem

$$c\bullet\{f(t)\}=\frac{\{c\}\bullet\{f(t)\}}{\{1\}}=\frac{\left\{\int_0^t c\cdot f(\tau)\,d\tau\right\}}{\{1\}}=\frac{\{1\}\bullet\{c\cdot f(t)\}}{\{1\}}=\{c\cdot f(t)\}$$

a w szczególności

$$1\bullet\{f(t)\}=\frac{\{1\}}{\{1\}}\bullet\{f(t)\}=\frac{\{[0\le t]\}}{\{[0\le t]\}}\bullet\{f(t)\}=\{f(t)\}$$

Liczba 1 jest więc jedynką pierścienia ułamków Mikusińskiego.

Posługując się własnością (4.1) możemy w obliczeniach zastąpić mnożenia liczb odpowiednimi splotami, co prowadzi do wniosku, że elementarnymi operacjami rachunku Mikusińskiego są splot i dodawanie, a wszystkie pozostałe konstrukcje algebraiczne mają względem nich wtórny charakter.

Splot $\{f(t)\}$ z funkcją $\{1\}$ pozwala wyznaczyć całkę funkcji $\{f(t)\}$

$$\{1\} \bullet \{f(t)\} = \left\{ \int_0^t f(\tau)\, d\tau \right\}$$

Rozważmy dowolną funkcję ciągłą $\{f(t)\}$, która posiada pochodną $\{f^{(1)}(t)\}$ ciągłą prawie wszędzie na $\mathbb{R}_+$ (symbolem $\{f^{(k)}(t)\}$ będziemy oznaczać k-tą pochodną $\{f(t)\}$). Wtedy splot $\{f(t)\}$ z hiperfunkcją $\frac{1}{\{1\}}$, która jest odwrotnością $\{1\}$, prowadzi do wyznaczenia tej pochodnej, gdyż

$$\{1\} \bullet \{f^{(1)}(t)\} = \left\{ \int_0^t f'(\tau)\, d\tau \right\} = \{f(t)\} - \{f(0)\}$$

więc

$$\{f^{(1)}(t)\} = \frac{\{f(t)\} - \{f(0)\}}{\{1\}} = \frac{\{f(t)\}}{\{1\}} - \frac{\{f(0)\}}{\{1\}} = \frac{\{f(t)\}}{\{1\}} - f(0)$$

czyli

$$\frac{1}{\{1\}} \bullet \{f(t)\} = \{f^{(1)}(t)\} + f(0) \tag{4.2}$$

Pamiętać należy, że wyrażenie $f(0)$ nie jest funkcją stałą o wartości równej wartości funkcji $\{f(t)\}$ w punkcie $t = 0$, lecz jedynie liczbą $f(0)$. Warto zwrócić uwagę, że ułamek $\frac{1}{\{1\}}$, splatanie z którym prowadzi do wyznaczenia pochodnej, występuje w mianowniku ułamka (4.7). Dokonując kolejny raz splotu funkcji $\{f(t)\}$ z ułamkiem $\frac{1}{\{1\}}$ otrzymamy formułę

$$\left(\frac{1}{\{1\}}\right)^2 \bullet \{f(t)\} = \frac{1}{\{1\}} \bullet \frac{1}{\{1\}} \bullet \{f(t)\} = \frac{1}{\{1\}} \bullet \{f^{(1)}(t)\} + f(0) \bullet \frac{1}{\{1\}} =$$

$$= \{f^{(2)}(t)\} + f^{(1)}(0) + f(0) \bullet \frac{1}{\{1\}} \tag{4.3}$$

która pozwala zauważyć prawidłowość prowadzącą do ogólnego wzoru na n-tą pochodną funkcji $\{f(t)\}$

$$\left(\frac{1}{\{1\}}\right)^n \bullet \{f(t)\} = \{f^{(n)}(t)\} + f^{(n-1)}(0) + f^{(n-2)}(0) \bullet \frac{1}{\{1\}} + \cdots + f(0) \bullet \left(\frac{1}{\{1\}}\right)^{n-1} \tag{4.4}$$

Formuła (4.4) sprowadza zagadnienia wyznaczania rozwiązań równań różniczkowych zwyczajnych o zadanych warunkach początkowych do mechanicznych manipulacji na ułamkach, czego przykład jest przedstawiony niżej w bieżącym paragrafie. Jeżeli odwrócimy porządek składników sumy w prawej stronie tej formuły, po czym spleciemy jej strony z wielomianem $\{1\}_{n-1} = \{1\}^n$, to otrzymamy wzór Taylora z resztą w postaci całkowej [6]

$$\{f(t)\} = \{f(0)\} + \sum_{k=1}^{n-1} f^{(k)}(0) \bullet \{1\}_k + \{1\}^n \bullet \{f^{(n)}(t)\} = \tag{4.5}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ f^{(k)}(0) \cdot t^k/k! \right\} + \left\{ \int_0^t f^{(n)}(\tau) \cdot \tau^{n-1}/(n-1)!\, d\tau \right\}$$

Uniwersalne znaczenie operacji splotu dla matematyki finansowej ujawniło się w trakcie badań własności reszty w skończonym szeregu Taylora, omówionych w opracowaniach [2],[3]. Jeżeli przypomnimy sobie formułkę szkolną głoszącą, że *równanie nie ulegnie zmianie, gdy pomnożymy jego strony przez liczbę różną od zera*, to stwierdzimy, że wzór Taylora jest tożsamy ze wzorem wielokrotnego różniczkowania funkcji!

Dowolną funkcję gładką możemy wyrazić przy pomocy sumy splotów funkcji stałych. Takie przedstawianie funkcji umożliwia granica szeregu (4.5)

$$\{f(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(0) \bullet \{1\}_k \tag{4.6}$$

Wyznaczmy sploty stron formuły (4.6) dla funkcji $\{e^{p \cdot t}\}$, gdzie p jest dowolną liczbą, z hiperfunkcją $(1 - p \bullet \{1\})$. Pamiętając, że k -ta pochodna funkcji $\{e^{p \cdot t}\}$ w zerze wynosi p^k otrzymamy

$$(1 - p \bullet \{1\}) \bullet \{e^{p \cdot t}\} = \sum_{k=0}^{\infty} p^k \bullet \{1\}_k - \sum_{k=0}^{\infty} p^{k+1} \bullet \{1\}_{k+1} = \{1\}_0 = \{1\}$$

czyli

$$\{e^{-p \cdot t}\} = \frac{\{1\}}{1 + p \bullet \{1\}} = \frac{1}{p + \frac{1}{\{1\}}} \tag{4.7}$$

Stwierdziliśmy, że funkcja obrazująca najbardziej rozpowszechniony w zagadnieniach ekonomicznych wzrost wykładniczy ma w rachunku Mikusińskiego postać szczególnie prostego ułamka.

Przejdźmy do przedstawienia metody manipulacji ułamkami funkcyjnymi na przykładzie rozwiązywania równań różniczkowych. Zajmiemy się równaniami oscylatora, których fundamentalne znaczenie dla wyjaśnienia źródeł problemów w zarządzaniu kapitałem, właściwych dla liniowych procesów kapitałowych, autor omówił wartykule [12]. Mają one następującą postać

$$\begin{array}{rcr} \{f^{(1)}(t)\} & = & -b \bullet \{g(t)\} \\ \{g^{(1)}(t)\} & = & b \bullet \{f(t)\} \end{array} \tag{4.8}$$

gdzie b jest liczbą rzeczywistą. Różniczkując pierwsze z równań sprowadzimy powyższy układ do jednego równoważnego mu równania drugiego rzędu

$$\{f^{(2)}(t)\} = -b^2 \bullet \{f(t)\} \tag{4.9}$$

które, zgodnie ze wzorem (4.3), ma w rachunku Mikusińskiego postać

$$\left(\left(\frac{1}{\{1\}}\right)^2 + b^2\right) \bullet \{f(t)\} = f^{(1)}(0) + \frac{1}{\{1\}} \bullet f(0) \tag{4.10}$$

Dzieląc strony (4.10) przez wyrażenie zawarte w największych nawiasach otrzymamy ogólne rozwiązanie równania (4.9) zależne od dwóch liczb $f(0)$ i $f^{(1)}(0) = -b \cdot g(0)$, stanowiących warunki początkowe tego równania

$$\{f(t)\} = f(0) \bullet \frac{\{1\}}{1 + (b \bullet \{1\})^2} - g(0) \bullet \frac{b \bullet \{1\}^2}{1 + (b \bullet \{1\})^2} \tag{4.11}$$

Brakującą część rozwiązania układu (4.8) uzyskamy wstawiając do pierwszego z równań (4.8) rozwiązanie (4.11) dla $\{f(t)\}$

$$g(t) = -b^{-1} \bullet \left(\frac{\{f(t)\}}{\{1\}} - f(0) \right) = \frac{f(0)}{b} \bullet \left(1 - \frac{1}{1+(b \bullet \{1\})^2} \right) +$$

$$+ g(0) \bullet \frac{\{1\}}{1+(b \bullet \{1\})^2} = g(0) \bullet \frac{\{1\}}{1+(b \bullet \{1\})^2} + f(0) \bullet \frac{b \bullet \{1\}^2}{1+(b \bullet \{1\})^2} \tag{4.12}$$

Należy jeszcze wyjaśnić, czym są tajemnicze ułamki występujące w rozwiązaniu (4.11),(4.12) układu (4.8). Wprowadzając jednostkę urojoną $i^2 = -1$ możemy napisać następującą tożsamość

$$\frac{1}{x^2+y^2} = \frac{1}{(x+i \bullet y) \bullet (x - i \bullet y)} =$$

$$= \frac{1}{2 \bullet x} \bullet \left(\frac{1}{x - i \bullet y} + \frac{1}{x + i \bullet y} \right) = \frac{1}{2 \bullet i \bullet y} \bullet \left(\frac{1}{x - i \bullet y} - \frac{1}{x + i \bullet y} \right)$$

Podstawiając $1 \to x$ oraz $b \bullet \{1\} \to y$ otrzymamy

$$\frac{\{1\}}{1+(b \bullet \{1\})^2} = \frac{1}{2} \bullet \left(\frac{\{1\}}{1 - i \bullet b \bullet \{1\}} + \frac{\{1\}}{1 + i \bullet b \bullet \{1\}} \right) =$$

$$= \left\{ 1/2 \cdot \left(e^{i \cdot b \cdot t} + e^{-i \cdot b \cdot t} \right) \right\} = \{\cos(b \cdot t)\}$$

$$\frac{b \bullet \{1\}^2}{1+(b \bullet \{1\})^2} = \frac{1}{2 \bullet i} \bullet \left(\frac{\{1\}}{1 - i \bullet b \bullet \{1\}} - \frac{\{1\}}{1 + i \bullet b \bullet \{1\}} \right) =$$

$$= \left\{ 1/(2 \cdot i) \cdot \left(e^{i \cdot b \cdot t} - e^{-i \cdot b \cdot t} \right) \right\} = \{\sin(b \cdot t)\}$$

gdzie wykorzystana została formuła (4.7) oraz wzór Eulera, który zapisany przy pomocy ułamków funkcyjnych ma banalną do wykazania jego poprawności postać

$$\frac{\{1\}}{1 - i \bullet b \bullet \{1\}} = \frac{\{1\}}{1+(b \bullet \{1\})^2} + i \bullet \frac{b \bullet \{1\}^2}{1+(b \bullet \{1\})^2}$$

W rachunku Mikusińskiego funkcje trygonometryczne są prostymi ułamkami. Jeśli zamiast rzeczywistego parametru w równaniach oscylatora użyjemy czynnika urojonego, czego dokonamy podstawiając $b \to i \cdot b$ w powyższych wzorach począwszy od (4.8), to otrzymamy ułamki, które są funkcjami hiperbolicznymi

$$\{\cosh(b \cdot t)\} = \frac{\{1\}}{1-(b \bullet \{1\})^2}$$

$$\{\sinh(b \cdot t)\} = \frac{b \bullet \{1\}^2}{1-(b \bullet \{1\})^2}$$

W ten sposób każdy ulamek, który jest ilorazem wielomianów o współczynnikach zespolonych, zbudowanych na bazie funkcji $\{1\}_k$, daje się, przez rozkład na ułamki proste, sprowadzić do wyrażenia będącego kombinacją liniową potęg funkcji wykładniczych $\{e^{z \cdot t}\}^m$ o zespolonych parametrach z i całkowitych m.

W przypadku funkcji $\{f(t)\}$ niezachowującej warunku ciągłości, który to przypadek interesuje nas z powodu rozważenia zagadnienia skokowych operacji kapitałowych, wzór (4.2) wymaga modyfikacji. Zanim ją wprowadzimy, powinniśmy uprzednio zbadać „pochodną" funkcji skoku, czyli ułamek $\frac{1}{\{1\}} \bullet \{[\tau \leq t]\}$.

5. Ułamek przesunięcia δ_τ

Przejdźmy do przykładu ułamków mniej trywialnych w swej formie od prezentowanych w poprzednim paragrafie. Dla dowolnej funkcji $\{f(t)\}$ i $\tau \geq 0$ definiujemy ułamek δ_τ nazywany *deltą Diraca* [7] jako następujący iloraz dwóch funkcji zdaniowych

$$\delta_\tau := \frac{\{[\tau \leq t]\}}{\{[0 \leq t]\}} \tag{5.1}$$

.Splatając deltę Diraca z wyrażeniem $\{1\} \bullet \{f(t)\}$, gdzie $\{f(t)\}$ jest dowolną funkcją na $\mathbb{R}_+$, otrzymamy

$$\{1\} \bullet \delta_\tau \bullet \{f(t)\} = \{[\tau \leq t]\} \bullet \{f(t)\} = \left\{ \int_0^t [\tau \leq t-\theta] \cdot f(\theta) d\theta \right\} =$$

$$= \left\{ [\tau \leq t] \cdot \int_0^t [\theta \leq t-\tau] \cdot f(\theta) d\theta \right\} = \left\{ [\tau \leq t] \cdot \int_0^{t-\tau} f(\theta) d\theta \right\} =$$

$$= \left\{ \int_{-\tau}^{t-\tau} [0 \leq \theta] \cdot f(\theta) d\theta \right\} = \left\{ \int_0^t [\tau \leq \theta] \cdot f(\theta-\tau) d\theta \right\} = \{1\} \bullet \{[\tau \leq t] \cdot f(t-\tau)\}$$

dzieląc powyższe wyrażenia przez $\{1\}$ dochodzimy do wniosku, że dla dowolnej funkcji $\{f(t)\}$ zachodzi równość

$$\delta_\tau \bullet \{f(t)\} = \{[\tau \leq t] \cdot f(t-\tau)\} \tag{5.2}$$

Ta więc hiperfunkcja δ_τ przesuwa wykres funkcji $\{f(t)\}$ w prawo o τ, uzupełniając go na odcinku $\langle 0, \tau)$ wykresem funkcji zerowej $\{0\}$. Zgodnie z przyjętą w paragrafie 4 konwencją, w której w przypadku tworzenia liczb operacja dzielenia funkcji stałych przez funkcję $\{1\}$sprowadzała się do opuszczenia w oznaczeniu funkcji stałej nawiasów $\{\}$, możemy ułamek δ_τ występujący w definicji (5.1) zapisać zwięźle w postaci

$$\delta_\tau = [\tau \leq t]$$

Rozszerzmy definicję delty Diraca na ujemne wartości parametru τ [7] kładąc

$$\delta_{-\tau} := \frac{1}{\delta_\tau} = [\tau \leq t]^{-1} = \frac{\{[0 \leq t]\}}{\{[\tau \leq t]\}}$$

co nie wychodzi poza ramy dziedziny hiperfunkcji $\mathbb{R}_+$. Ujemny czas wiąże się tu z odpowiednią operacją odwrotnego przesunięcia, a nie z chwilami poprzedzającymi moment $t = 0$. Własność przesunięcia wykresu funkcji zawarta w definicji ułamka δ_τ oznacza, że

$$\delta_a \bullet \delta_b = \delta_{a+b} \tag{5.3}$$

dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$. Formuła (5.3) z warunkiem $\delta_0 = 1$ nasuwa skojarzenia z funkcją wykładniczą opartą na stałej Nepera. W istocie, można wykazać, zob. [7], że delta Diraca ma postać

$$\delta_a = e^{-\frac{a}{\{1\}}}$$

Tak więc podzbiór ułamków będących deltami Diraca tworzy dobrze wszystkim znaną grupę $(\mathbb{R},+)$. Każdą liczbę rzeczywistą możemy przedstawić jako różnicę liczb nieujemnych $\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R}_+$ i to na wiele różnych sposobów, więc wzór

$$\delta_{\tau_1-\tau_2} = \frac{\{[\tau_1 \le t]\}}{\{[\tau_2 \le t]\}} = \frac{[\tau_1 \le t]}{[\tau_2 \le t]}$$

będący konsekwencją formuły (5.3) stanowi jeszcze jeden sposób reprezentowania ułamka δ_a.

6. Hiperstopa procentowa

Rozważmy obecnie zmiany kapitałowe reprezentowane na $\mathbb{R}_+$ funkcją $\{f(t)\}$ nie zmieniającą swego znaku i zawsze różną od zera. Typową dla wielu opisów finansowych jest sytuacja, gdy kapitał prawie zawsze zmienia się zgodnie z różniczkowalnym czynnikiem dyskontowym $\{U(t,0)\} = \left\{e^{\int_0^t r(\tau)d\tau}\right\}$, tak że stan kapitału w chwili t określony jest równaniem $\{f(t)\} = \{U(t,0)\cdot f(0)\}$, por. [14],[12]. Wyrażenie $r(t)$ będące stopą różniczkową (chwilową) jest pochodną funkcji $\{\ln(f(t)/f(0))\}$ równej zero dla $t = 0$. Zgodnie z formułą (4.2) otrzymamy dla stopy zwrotu następujące wyrażenie

$$\{r(t)\} = \frac{\{\ln(U(t,0))\}}{\{1\}} = \frac{\{\ln(f(t)) - \ln(f(0))\}}{\{1\}} = \frac{\{\ln(f(t)\}}{\{1\}} - \ln(f(0))$$

Jest ono jednak prawdziwe jedynie w przypadkach ciągłego czynnika dyskontowego $\{U(t,0)\}$. Jeżeli funkcja kapitałowa $\{f(t)\}$ będzie prawie wszędzie ciągła (z prawie wszędzie ciągłą pierwszą pochodną), posiadając skończoną ilość miejsc nieciągłości stanowiących „wpłaty” bądź „wypłaty” następujące w momentach $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$, to możemy funkcję logarytmu czynnika dyskontowego $\{\ln(f(t)/f(0))\}$ rozbić na sumę dwóch funkcji składowych. Pierwszą składową będzie funkcja ciągła $\{\ln(U(t,0))\}$ o różniczkowej stopie wzrostu $\{r(t)\}$, a drugą funkcja schodkowa $\sum_{k=1}^n \{p_k \cdot [\tau_k \le t]\}$, gdzie p_k jest liczbą równą logarytmicznej zmianie kapitału w chwili $t = \tau_k$, co możemy precyzyjnie wyrazić przy pomocy granic z góry i z dołu logarytmu funkcji kapitałowej $\{\ln(f(t))\}$ wyznaczonych dla chwil τ_k

$$p_k := \lim_{t\to\tau_k^+} (\ln(f(t))) - \lim_{t\to\tau_k^-} (\ln(f(t)))$$

Wielkości p_k nazywane są *skokami* funkcji $\{\ln(f(t))\}$ w punktach τ_k, zob. [13]. Możliwość rozbicia logarytmicznych zmian kapitału na sumujące się niezależne składowe wynika z addytywnych własności logarytmu czynnika dyskontowego, por. [12], więc własność ta nie zachodzi np. dla górnych czy dolnych stóp procentowych [14]. Gdy funkcja $\{f(t)\}$ nie opisuje wartości kapitału, lecz obiekt do niego dualny, czyli cenę rynkową dobra, zob. [15], wtedy skoki odnotowują zmianę wycenianej jednostki dobra (np. w chwilach denominacji, splitu, wypłaty dywidendy). Prawie wszędzie ciągła logarytmiczna zmiana kapitału wyraża się więc następującym wzorem

$$\{\ln(f(t)/f(0))\} = \left\{\int_0^t r(\tau)d\tau\right\} + \sum_{k=1}^n \{p_k \cdot [\tau_k \le t]\} =$$

$$= \{1\} \bullet \{r(t)\} + \sum_{k=1}^n p_k \bullet \{[\tau_k \le t]\} \tag{6.1}$$

Jeżeli w analogii do przypadku ciągłego zdefiniujemy stopę wzrostu kapitałowego prawie wszędzie ciągłego jako „pochodną” powyższego wyrażenia

$$r := \frac{1}{\{1\}} \bullet \{\ln(f(t)/f(0))\} \tag{6.2}$$

wtedy porównując (6.1) i (6.2) otrzymamy następującą, pozwalającą wyznaczyć tą stopę-hiperfunkcję, formułę

$$r = \{r(t)\} + \sum_{k=1}^{n} p_k \bullet [\tau_k \le t] \tag{6.3}$$

Wynikający z definicji (6.2) wzór odwrotny, dzięki któremu na podstawie ułamka hiperstopy r otrzymamy bieżącą wartość funkcji kapitału $\{f(t)\}$ ma postać

$$\{\ln(f(t))\} = \{\ln(f(0)\} + \{1\} \bullet r$$

czyli

$$\{f(t)\} = f(0) \bullet \left\{e^{z(t)}\right\}$$

gdzie $\{z(t)\} := \{1\} \bullet r$.

Hiperstopa nie jest funkcją w znaczeniu klasycznym, więc nie sposób obrazować ją wykresem. Są dwa sposoby informowania o niej. Pierwszy polega na podaniu odrębnie jej części ciągłej (z ewentualnym jej zobrazowaniem) oraz poinformowaniu o terminach τ_k i skokach p_k logarytmu kapitału w tych chwilach. W drugim możemy posłużyć się jej całką $\{1\} \bullet r$, która, będąc funkcją prawie wszędzie ciągłą, nadaje się do zobrazowania.

7. Renta wieczysta

Interesującą własność ma hiperfunkcja $[\tau > t]^{-1}$. Jeżeli zapiszemy ją w postaci ułamka, otrzymamy

$$[\tau > t]^{-1} = \frac{\{1\}}{\{[\tau > t]\}} = \frac{\{1\}}{\{1\} - \{[\tau \le t]\}} = \frac{1}{1 - [\tau \le t]} =$$

$$= 1 + [\tau \le t] + [\tau \le t] \bullet [\tau \le t] + [\tau \le t] \bullet [\tau \le t] \bullet [\tau \le t] + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} [\tau \le t]^k$$

więc, zgodnie z wnioskiem paragrafu 5, splot wyrażenia $[\tau > t]^{-1}$ z dowolną funkcją-wzorcem $\{w(t)\}$ daje sumę funkcji o kształcie identycznym jak $\{w(t)\}$, przesuniętych w prawo kolejno o 0, τ, 2τ, $\ldots$. Wzorzec zostaje powielony na całej półosi $\mathbb{R}_+$. Dlatego hiperstopa postaci

$$-p \bullet \frac{[\tau \le t]}{[\tau > t]} \tag{7.1}$$

określa trwające w nieskończoność wypłaty stałego procentu w wysokości $1 - e^{-p}$ części bierzącej wartości kapitału. Ułamkiem (7.1) można opisywać renty wieczyste, czy inne podobne formy przynoszącego dywidendy kapitału.

Periodyczne procesy kapitałowe o skończonej liczbie n cykli posiadają część hiperstopy w postaci splotu wzorcowego skoku $-p \bullet [\tau \le t]$ (periodyczne skoki), czy odpowiedniej funkcji-wzorca $\{w(t)\}$ (periodyczne zmiany ciągłe), z następującą hiperfunkcją

$$\left(\frac{[\tau \le t]}{[\tau > t]} - \frac{[(n+1)\cdot\tau \le t]}{[\tau > t]}\right) \bullet [\tau \le t]^{-1} = \frac{[\tau \le t] - [(n+1)\cdot\tau \le t]}{[\tau > t] \bullet [\tau \le t]}$$

8. Przykład wyznaczania hiperstopy

Załóżmy, że 1-go stycznia 1996 roku wpłaciłem na konto oprocentowane liniowo stopą 30% rocznie, z kapitalizacją odsetek na koniec roku, 1000 zł. 1-go stycznia 1997 pomniejszyłem stan konta o połowę jego pełnej (wraz z odsetkani) aktualnej wysokości, w połowie roku 1997 podwoiłem, zaś 1-go stycznia 1998 potroiłem jego stan. Interesuje mnie kształtowanie się hiperstopy w okresie do końca roku 1998. Dla wygody oznaczeń wprowadźmy funkcję *podłoga* $\{\lfloor t \rfloor\}$ [10], równą niewiększej od wartości argumentu t największej liczbie całkowitej. Podłoga jest funkcją schodkową, dlatego potrafimy wyrazić ją przy pomocy funkcji skoku

$$\{\lfloor t \rfloor\} = \sum_{k=1}^{\infty} \{[k \le t]\} = \frac{\{1\}}{1 - [1 \le t]} - \{1\} = \frac{\{[1 \le t]\}}{[1 > t]} = \{1\} \bullet \frac{[1 \le t]}{1 - [1 \le t]}$$

Ostatnie wyrażenie można interpretować jako całkę ułamka $\frac{[1 \le t]}{[1 > t]}$, lub jako sumę funkcji skoku otrzymanych z poprzesuwanej do kolejnych liczb naturalnych funkcji stałej $\{1\}$.

Przyjmując datę 1996-01-01 za chwilę zerową i mierząc czas w jednostkach rocznych mogę odnotować następujące dane o historii stanu konta:

- niekorygowany skokowymi ingerencjami liniowy wzrost odsetek daje stan konta (z odsetkami) w dowolnej chwili t w ciągu roku większy, w stosunku do jego stanu na początku roku, o czynnik dyskontowy $\{1 + 0.3 \cdot t\}$
- logarytm ciągłej części przyrostu kapitałowego odnotowywany w trakcie roku wynosi $\{\ln(1 + 0.3 \cdot t)\}$
- pochodna tej funkcji, stanowiąca chwilową stopę wzrostu w przeciągu roku, jest następującą funkcją $\{0.3/(1 + 0.3 \cdot t)\}$.
- Z powyższych danych wynika, że niekorygowany wypłatami, czy wpłatami, logarytm kapitału znajdującego się na koncie w trakcie kolejnych lat opisuje funkcja

$$\{\ln(f(t))\} = \{\ln(f(\lfloor t \rfloor))\} + \{\ln(1 + 0.3 \cdot (t - \lfloor t \rfloor))\}$$

- której stopa chwilowa, czyli pochodna części ciągłej wzrostu wynosi

$$\{r(t)\} = \{0.3/(1 + 0.3 \cdot (t - \lfloor t \rfloor)\}$$

- Jeżeli uwzględnimy zmiany nieciągłe kapitału, otrzymamy następujące wyrażenie na hiperstopę

$$r = \{0.3/(1 + 0.3 \cdot (t - \lfloor t \rfloor)\} - \ln(2) \bullet [1 \le t] + \ln(2) \bullet [1.5 \le t] + \ln(3) \bullet [2 \le t]$$

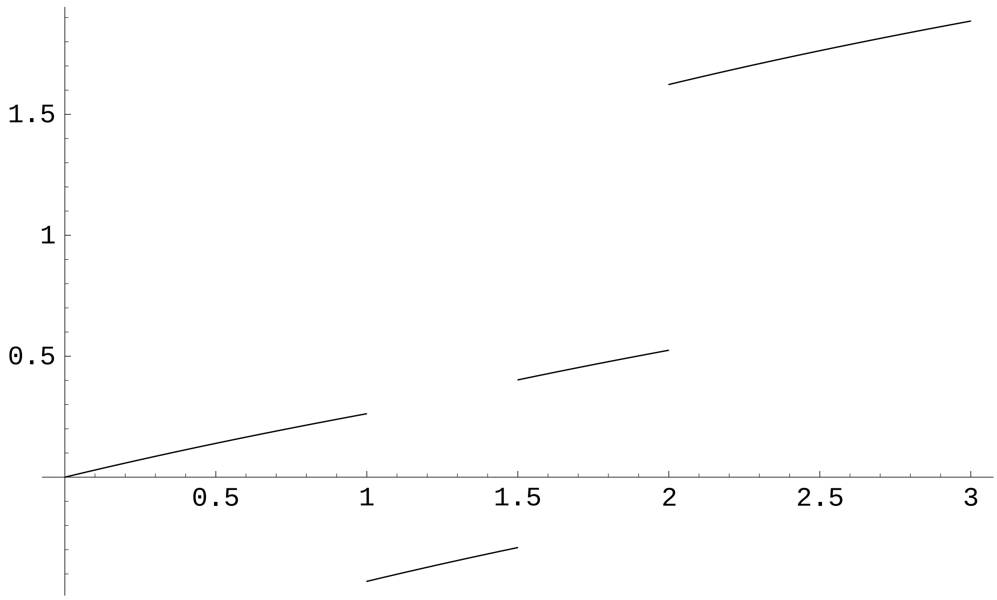
Na zakończenie przykładu wyznaczymy na podstawie hiperstopy funkcję logarytmu przyrostu $\{1\} \bullet r$ i zobrazujemy wartość konta w interesującym nas okresie czasowym. Całka z hiperstopy ma postać

$$\{1\} \bullet r = \ln(1.3) \bullet \{\lfloor t \rfloor\} + \{\ln(1 + 0.3 \cdot (t - \lfloor t \rfloor))\} - \ln(2) \bullet \{[1 \le t]\} +$$

$$+ \ln(2) \bullet \{[1.5 \le t]\} + \ln(3) \bullet \{[2 \le t]\} =$$

$$= \ln(1.3) \bullet \{\lfloor t \rfloor\} + \{\ln(1 + 0.3 \cdot (t - \lfloor t \rfloor))\} - \ln(2) \bullet \{[1 \le t < 1.5]\} + \ln(3) \bullet \{[2 \le t]\}$$

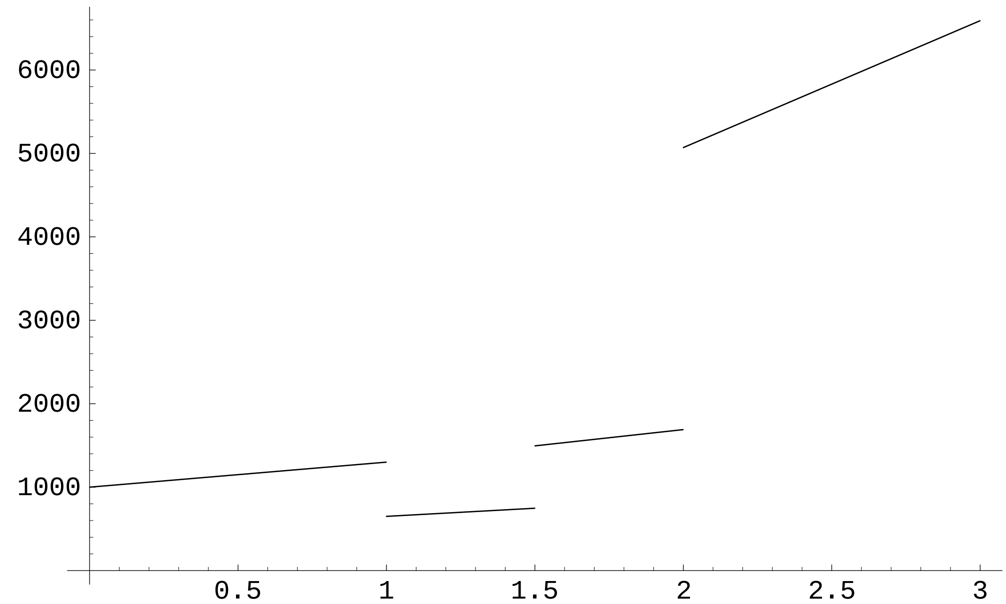
co przedstawia poniższy rysunek.



Stan konta wyraża się funkcją o wartościach równych wartościom funkcji eksponens na argumentach będących odpowiednimi wartościami funkcji $\{1\} \bullet r$, pomnożonych przez kwotę 1000 zł

$$f(t) = (1.3)^{\lfloor t \rfloor} \cdot (1 + 0.3 \cdot (t - \lfloor t \rfloor)) \cdot (2 - [1 > t] - [1.5 \le t])^{-1} \cdot (3 - 2 \cdot [2 > t]) \cdot 1000$$

Przebieg takich zmian kapitałowych wyglada następująco



9. Popadanie w długi

W paragrafie 6 przyjęliśmy założenie, że funkcja kapitałowa $\{f(t)\}$ nie zmienia na swej dziedzinie znaku. Oznacza to, że gdy opisywany kapitał jest zobowiązaniem (ma wartość ujemną) sposób wyznaczania hiperstopy jest taki sam, jak opisany powyżej. Zmianie ulega jedynie interpretacyjna ocena jej składowej określającej liczbowe wartości prędkości ciągłych przyrostów kapitałowych i skoków stojących przy występujących w niej deltach Diraca. W przypadku opisywania aktywów dodatni znak tych liczb oznacza pozytywną tendencję zmian dla właściciela aktywów i odwrotnie – ujemny znak dotyczy ponoszonych strat. Znaczenie znaków tych liczb występujących przy rozważaniu długu jest przeciwne. Dzięki składowej hiperstopy opisującej zmiany nieciągłe definicja hiperstopy (6.3) pozostaje poprawna także dla tych funkcji $\{f(t)\}$ zmieniających znak, w których zmiana ta przebiega skokowo – wystarczy, że funkcja posiada wszędzie wartości różne od zera, co umożliwia stosowanie na całej jej dziedzinie idei proporcji. Zmianę znaku kapitału w momencie τ uzyskamy wtedy, gdy pomnożymy jego wartość w tej chwili przez czynnik -1, co wystąpi, gdy do hiperstopy dodamy składnik $\pm i \bullet \pi \bullet [\tau \le t]$ (znak „$\pm$" możemy traktować jako „$+$", bądź „$-$", co nie ma wpływu na stan kapitału). Całkując, czyli splatając hiperstopę z funkcją $\{1\}$ otrzymamy dodatkowy czynnik postaci

$$\{1\} \bullet (\pm i \bullet \pi \bullet [\tau \le t]) = \pm i \bullet \pi \bullet \{[\tau \le t]\}$$

a że spełniona jest równość

$$\left\{e^{\pm i\pi[\tau \le t]}\right\} = \{1 - 2 \bullet [\tau \le t]\}$$

więc wykazaliśmy zachodzenie zamierzonego efektu zmiany znaku, bo funkcja $\{1 - 2 \bullet [\tau \le t]\}$ jest równa 1 dla $t < \tau$ a -1 dla $t \ge \tau$. Parzystość liczby występujących w hiperstopie składników postaci $\pm i \bullet \pi \bullet [\tau \le t]$ odnoszących się do minionych chwil

τ decyduje o tym, czy względem chwili początkowej $t = 0$ kapitał zmienił znak czy nie (czy pozostał, czy nie, dobrem, czy zobowiązaniem).

Z przydatnością użycia w zagadnieniach stopy procentowej liczb zespolonych (i taką samą jak wyżej dowolnością wyboru znaku przy czynniku urojonym i) spotykamy się w stochastycznej reprezentacji algebry stopy [3]. Dwuznaczność ta znika w analizie zmian kapitałowych polegającej na redukcji zagadnień modelowanych macierzową stopą wzrostu [12] do przypadków autonomicznej ewolucji w jednowymiarowych przestrzeniach liniowych.

10. Przykład hiperstopy zespolonej

Wyznaczmy hiperstopę, która z punktu widzenia zwierzającej się osoby opisuje ilościowo następującą fabułę:

Przez 10 lat wiodło mi się znakomicie, to co posiadałem, pomnażałem w tempie 20% rocznie. Niestety szczęście prysło i nagle znalazłem się w długach równych połowie stanu mej wczorajszej zamożności. Zobowiązania narastały dwa razy szybciej niż dawny majątek. Po pięciu latach wspaniałomyślny wierzyciel nie dość że umorzył mi cały dług, to jeszcze obdarował mnie dobrami o wartości równej 10% darowanego długu. Obecnie jestem rentierem i mimo upływu pięciu lat mój majątek nie zmienił jeszcze swej wartości.

Analogiczne jak w paragrafie rozważania prowadzą nas do hiperstopy w postaci

$$r = \ln(1.2) \bullet \{1\} + (\ln(1.4) - \ln(1.2)) \bullet \{[10 \leq t]\} - \ln(1.4) \bullet \{[15 \leq t]\}+$$

$$+(-\ln(2) + i \bullet \pi) \bullet [10 \leq t] + (-\ln(10) + i \bullet \pi) \bullet [15 \leq t] \tag{10.1}$$

Całka tej hiperstopy wynosi

$$\{z(t)\} = \{1\} \bullet r = (\ln(1.2) + (\ln(1.4) - \ln(1.2)) \bullet [10 \leq t] - \ln(1.4) \bullet [15 \leq t]) \bullet \{t\}+$$

$$+i \bullet \pi \bullet \{[10 \leq t < 15]\} - \ln(2) \bullet \{[10 \leq t]\} - \ln(10) \bullet \{[15 \leq t]\} =$$

$$= \ln(1.2) \bullet \{t \cdot [10 > t] + 10 \cdot [10 \leq t]\} + \ln(1.4) \bullet \{(t-10) \cdot [10 \leq t < 15] + 5 \cdot [15 \leq t]\}+$$

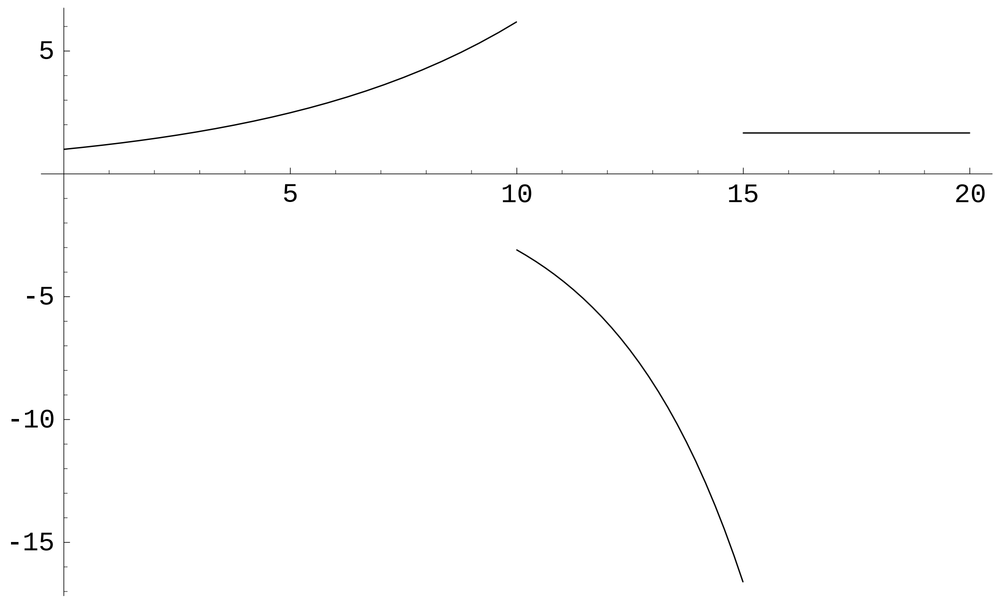
$$+(-\ln(2) + i \bullet \pi) \bullet \{[10 \leq t]\} + (-\ln(10) + i \bullet \pi) \bullet \{[15 \leq t]\}$$

gdzie $\{t\} = \{1\} \bullet \{1\} = \{1\}_1$. Stąd wartość opisanego kapitału w funkcji czasu wynosi

$$\{f(t)\} = f(0) \bullet \left\{e^{z(t)}\right\} = \left\{f(0) \cdot (1.2)^{t \cdot [10 > t] + 10 \cdot [10 \leq t]} \cdot (1.4)^{(t-10) \cdot [10 \leq t < 15] + 5 \cdot [15 \leq t]} \cdot\right.$$

$$\left. \cdot (1 - 0.5 \cdot [10 \leq t]) \cdot (1 - 0.9 \cdot [15 \leq t]) \cdot (1 - 2[10 \leq t < 15])\right\} \tag{10.2}$$

Warto zauważyć, że w omawianym przypadku łatwiej wypisać postać hiperstopy (10.1) niż wzór (10.2) zawierający historię zmian kapitałowych. Poniższy rysunek przedstawia wykres funkcji $\{f(t)/f(0)\}$.



11. Uwagi końcowe

Od z górą dwóch tysięcy lat używanie języka proporcji jest podstawą ilościowego opisu zarówno cen, jak i zasobów wszelkich dóbr oraz sposobów organizacji gospodarowania [16]. Ekonomiczne aspekty rzeczywistości są chętnie mierzone różnego rodzaju współczynnikami. Powyższy tekst próbował przekonać czytelnika, że metody rachowania ułamkami opartymi na dodawaniu i splocie stanowią obecnie potężne narzędzie metod matematycznych, choć jego proste operacje rachunkowe wymagają często zwykłych, szkolnych umiejętności.

Jak wykazano w paragrafie 4 rachunki na ułamkach zbudowanych z funkcji stałych obejmują swoim zasięgiem standardowe zagadnienia analizy matematycznej. Dlatego np. różne reprezentacje algebry stopy zwrotu, opisane w pracach [2],[3], możemy wyrazić przez operacje splatania z funkcją stałą $\{1\}$ i dzielenia przez nią. Dowody twierdzeń, takich jak np. o postaci rozkładu funkcji w szereg Taylora, polegają na pojedynczych przekształceniach wyrażeń posiadających liczbowe własności. Dodatkowe uwzględnienie w rachunku Mikusińskiego elementarnej, poza jednym punktem dziedziny wszędzie stałej, funkcji skoku pozwala konstruować modele matematyczne wykraczające znacząco poza zbiór funkcji ciągłych. Możliwe jest nawet, że geometryczne modele rynku, zob.[15], posiadają swoje uogólnienia, które w ramach analizy funkcjonalnej bazują na proporcjach funkcji kapitałowych, analogicznie jak modele geometrii skończeniewymiarowych na proporcjach cenowych, czy portfelowych.

Klasyczne metody matematyki finansowej w definicjach stopy procentowej nie uwzględniają przepływów na koncie, dlatego, chociaż przepływy kształtują stan konta, opisywane są odrębnie. Hiperstopa wyznaczana zgodnie z formułą (6.3) zawiera pełną historię zmian kapitałowych, którą można łatwo odczytać z jej konkretnej postaci.

Bibliografia

[1] Zawadowski W., *Ułamki nie z tej ziemi*, Gazeta Wyborcza, nr 251, 26 X 1998.

[2] Piotrowski E.W., *Operatorowa stopa zwrotu – zastosowania klasyczne*, oddane do druku w Przeglądzie Statystycznym.

[3] Piotrowski E.W., *Stochastyczna reprezentacja algebry stopy zwrotu*, oddane do druku w Przeglądzie Statystycznym.

[4] Yosida K., *Operatoinal Calculus*, Springer-Verlag, New York 1984.

[5] *Elementy nowoczesnej matematyki dla inżynierów*, pod red. H.Steinhausa, PWN, Wrocław 1971.

[6] *Encyclopaedia of Mathematics on CD-ROM*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht 1997.

[7] Mikusiński J., *Rachunek operatorów*, PWN, Warszawa 1957.

[8] Conway J.H., Guy R.K., *Księga liczb*, WNT, Warszawa 1999.

[9] Courant R., Robbins H., *Co to jest matematyka?*, Prószyński i S-ka, Warszawa 1998.

[10] Graham R.L., Knuth D.E., Patashnik O., *Matematyka konkretna,* PWN, Warszawa 1996.

[11] *Mała encyklopedia logiki*, pod red. W.Marciszewskiego, ZNiO-Wydawnictwo, Wrocław 1988.

[12] Piotrowski E.W., *Macierzowa stopa zwrotu*, Przegląd Statystyczny 46(1999)340-35.

[13] *Słownik matematyki i cybernetyki ekonomicznej*, wyd.2, PWE, Warszawa 1985.

[14] Karpio A., Piotrowski E.W., *Chwilowa stopa procentowa*, Przegląd Statystyczny 46(1999)67-78.

[15] Piotrowski E.W., *Geometria rynku*, Optimum 5(2000)161-179.

[16] Juszkiewicz A.P., *Historia matematyki*, t.1, PWN, Warszawa 1975.

Instytut Fizyki Teoretycznej, Uniwersytet w Białymstoku, Lipowa 41, 15-424 Białystok.

E-mail address: `ep@alpha.uwb.edu.pl`