

Edward W. Piotrowski
ep@alpha.uwb.edu.pl

OSIĄGALNOŚĆ INSTRUMENTU FINANSOWEGO, A RYZYKO KAPITAŁOWE

(RePEc:s1a:eakjk1:114PL 12-iv-2000)

Dies nostri quasi umbra
super terram et nulla est mora¹

1. WSTĘP

Przyzwyczajiliśmy się do sytuacji, w której analityk finansowy podając średnie odchylenie kwadratowe zysku względem jego wartości oczekiwanej wskazuje stopień ryzyka związanego z posiadaniem instrumentu finansowego. Czasy rozwoju teorii portfela, w których sceptycznie odnoszono się do teorii Harryego M. Markowitza należą już do historii. Obowiązujący dziś standard ilościowego określania ryzyka finansowego wyznaczył paradygmat badawczy analityków i do tego stopnia zdominował świat finansów, że trudno jest rozwijać alternatywne narzędzia służące badaniu ryzykowności rynkowych aktywów kapitałowych. Jednak ryzyko finansowe jest na tyle ważną kategorią ekonomiczną, próbującą uchwycić przyczyny różnicowania się kosztów formalnie podobnych przedsięwzięć kapitałowych [1], że warto się do niej odnieść z pozycji nierównoważnych, aczkolwiek uzasadnionych metod rachunkowych.

Wzorując się na pochodzących z opracowanych dla celów nauk fizycznych, klasycznych newtonowskich metodach analizy zjawisk mechanicznych autor opisał w pracy [2] deterministyczną reinterpretację ryzyka finansowego. Zostało

¹ *Nasz czas, podobnie jak cień na ziemi, nigdy się nie zatrzymuje* - motto zegara słonecznego na kościele Mariackim w Krakowie.

tam wykazane, że przy pewnych dodatkowych założeniach jest ona formalnie równoważna standardowemu sposobowi objaśniania ryzyka. Jednak i w takim przypadku pozostaje wiele wariantów rachunkowych, dających różne liczbowe oceny ryzyka, a wynikających z odmiennych subiektywnych ocen przyszłych zysków osiąganych z inwestowania w aktywa finansowe, czy wyboru teorii definiujących sposoby określania optymalnego przepływu kapitałowego. Dla podmiotów preferujących emocje, czy przywiązujących szczególną wagę do pewnych chwil związanych z istotnymi składnikami portfela (np. terminy bilansu okresowego spółki giełdowej) optymalne przepływy będą różne. Scharakteryzowaną ułomność interesująco parafrazuje następująca uwaga Hugona Steinhausa [3]: *Te długości, które podaje praktyk (np. na bilecie kolejowym) odnoszą się raczej do definicji osi toru kolejowego, podanej matematycznie, niż do realnego toru.* Jak bliski związek może zachodzić pomiędzy długością krzywych a ryzykiem ukazuje treść prezentowanego artykułu.

Interesujące są powody, dla których statystyczna nieokreśloność zysku odzwierciedla niebezpieczeństwa na jakie narażony jest właściciel wycenianego na rynku dobra. Jeżeli racje te wiążą się z ilością możliwości utracenia instrumentu (np. na skutek sceptycznych ocen dotyczących przyszłych zysków generowanych w oparciu o to dobro) to miarę takiego ryzyka lepiej oddaje proponowana niżej przez autora definicja *osiągalności* instrumentu finansowego.

Jeżeli założymy, że miara prostych przecinających krzywą całkową posiada symetrię euklidesową, to jest nią euklidesowa długość krzywej. Spostrzeżenie to znamy jako formułę Croftona, która zapoczątkowała w XIX wieku rozwój geometrii całkowej i badanie geometrycznych aspektów rachunku prawdopodobieństwa [4], [5].

2. FINANSOWE UKŁADY ODNIESIENIA

Określmy mianem *zbioru instrumentów finansowych* I wszelakie płynne, permanentnie wyceniane jednostki dóbr, bądź zobowiązań. Do zbioru tego

należą więc również portfele, będące zestawieniami określonych ilości instrumentów finansowych notowanych bezpośrednio na rynku, czy dowolne, płynne instrumenty pochodne.

Wycena instrumentu finansowego zawsze musi się odnosić do pewnej ilości wyróżnionego dobra (także instrumentu, zwykle jest nim jednostka pieniężna), w relacji do którego instrument ten jest wyceniany. Dobra to nazwiemy **pieniądzem**. Poza tym w zbiorze I wyróżnijmy dowolny instrument finansowy różny od pieniądza i nazwijmy go **instrumentem wzorcowym**.

Układ odniesienia to uporządkowana para wyróżnionych instrumentów, czyli para (*pieniądz*, *instrument wzorcowy*).

Niech τ oznacza czas astronomiczny, wyznaczany w dowolnych jednostkach (rok, tydzień, sekunda). Przez $r(\tau)$ będziemy oznaczać funkcję, będącą tzw. chwilową stopą wzrostu instrumentu wzorcowego względem pieniądza, określoną w jednostce będącej odwrotnością jednostki czasu τ wzorem

$$r(\tau) := \frac{1}{c_s(\tau)} \frac{dc_s(\tau)}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} \ln c_s(\tau) \quad (2.1)$$

gdzie $c_s(\tau)$ jest ceną w chwili τ instrumentu wzorcowego wyrażoną w jednostkach pieniężnych, a \ln jest funkcją logarytm naturalny.

Zdefiniujmy **czas wzorcowy** $t = t(\tau)$ jako całkę oznaczoną z chwilowej stopy wzrostu instrumentu wzorcowego $r(\tau)$ wziętą względem pewnej chwili początkowej τ_0

$$t(\tau) := \int_{\tau_0}^{\tau} r(\tau') d\tau' \quad (2.2)$$

Moment τ_0 jest dowolnie wybraną, lecz ustaloną chwilą czasu astronomicznego, wyznaczającą punkt zerowy czasu wzorcowego, bo

$$t(\tau_0) = \int_{\tau_0}^{\tau_0} r(\tau') d\tau' = 0. \text{ Zwróćmy uwagę, że czas wzorcowy jest definiowany}$$

relatywnie – zależy od wyboru pieniądza i instrumentu wzorcowego. Gdy dobra

określające pieniądź i instrument wzorcowy w układzie odniesienia zamienimy miejscami chwilowa stopa wzrostu nowego instrumentu wzorcowego względem nowego pieniądza będzie równa $-r(\tau)$, więc czas wzorcowy zdefiniowany formułą (2.2) zmieni znak na przeciwny. Dlatego taką zamianę ról instrumentów definiujących finansowy układ odniesienia będziemy nazywać *inwersją czasu wzorcowego*.

Dla dowolnego instrumentu finansowego o cenie $c(\tau)$ **wykresem instrumentu** nazwiemy krzywą w w \mathbb{R}^2 , określoną parametrycznie następująco

$$w := (t(\tau), y(\tau) = \ln c(\tau) - \ln c(\tau_0))$$

Krzywa w jest sparametryzowana czasem astronomicznym τ , bądź jakkolwiek inną zmienną rzeczywistą, będącą ciągłą i różnowartościową funkcją czasu τ . Przedstawienie wykresu instrumentu finansowego w skali logarytmicznej względem cen pozwala m.in. uniezależnić prezentowany opis ryzyka od jakichkolwiek splitów jednostek opisywanych instrumentów (takich jak waluta, akcja, opcja itp.). Oczywistym wnioskiem z powyższej definicji jest spostrzeżenie, że na wykres instrumentu możemy patrzeć jak na trajektorię (krzywą) zakreśloną przez wektor należący do przestrzeni liniowej, będącej iloczynem kartezyjańskim zbioru wartości logarytmu ceny instrumentu wzorcowego i zbioru wartości logarytmu ceny instrumentu, którego wykres nas interesuje. Drugi czynnik iloczynu kartezyjańskiego jest zatem wspólnym zbiorem wartości logarytmów cen względem pieniądza wszystkich instrumentów finansowych. Przywykliśmy do obrazowania zmian cenowych na wykresach semilogarytmicznych, których kształt odpowiada wykresom tych instrumentów w układzie odniesienia, w którym pieniądź jest obowiązującą walutą, a instrumentem wzorcowym jest dowolny płynny walor o stałej (w czasie astronomicznym) chwilowej stopie wzrostu względem waluty, nazywany instrumentem pozbawionym ryzyka. Czas wzorcowy jest wielkością bezwymiarową, gdyż chwilowa stopa wzrostu ma wymiar będący odwrotnością

astronomicznej jednostki czasowej. Własność ta umożliwia m.in. późniejsze przyjęcie założenia o niezmienniczości osiągalności instrumentów finansowych przy obrotach ich wykresów względem ustalonego układu odniesienia.

Ponieważ z definicji (2.1) i (2.2) wynika, że

$$t(\tau) = \ln c_s(\tau) - \ln c_s(\tau_0)$$

więc np. wykresy

- instrumentu wzorcowego,
- pieniądza,
- instrumentu zmieniającego swą cenę w specyficznym okresie stałej ceny instrumentu wzorcowego,
- pieniądza w układzie odniesienia, w którym zamieniliśmy role instrumentów określonych jako pieniądź i instrument wzorcowy,

będą leżeć odpowiednio na prostych

- $y - t = 0$,
- $y = 0$,
- $t = 0$,
- $y + t = 0$.

Postać ostatniego z przytoczonych równań prostych wynika z symetrii względem inwersji czasu wzorcowego tzn. ze spostrzeżenia, że gdy cena instrumentu wzorcowego wyrażona w jednostkach pieniężnych jest c_s , to odpowiadająca jej cena pieniądza wyrażona w jednostkach instrumentu wzorcowego wynosi $\frac{1}{c_s}$, oraz z własności logarytmu liczby odwrotnej

$\ln \frac{1}{c_s} = -\ln c_s$. Prosta ta jest także symetryczna do prostej $y - t = 0$ względem

osi $t = 0$ co oznacza, że wykresy na niej leżące obrazują zyski z pozycji krótkiej zajętej względem instrumentu wzorcowego, a rozliczanej w pieniądzu.

3. OSIĄGALNOŚĆ INSTRUMENTU FINANSOWEGO

Nic nie stoi na przeszkodzie, aby prócz wykresów instrumentów finansowych rozważać wykresy dowolnych dóbr, dla których znamy ewolucję czasową ich funkcji użyteczności o własnościach omówionych w pracy [6]. Instrumenty finansowe mają jednak tę zaletę, że są wyceniane przez rynek, więc kształt ich wykresów ma charakter obiektywny – ich ceny są wynikiem funkcjonowania mechanizmów rynkowych, niezależnych od subiektywnych emocji i poglądów.

Nazwijmy *zbiorem instrumentów prostych* I_0 rodzinę tych instrumentów finansowych $w_p(\tau) \in I$, których wykres w ustalonym układzie odniesienia jest odcinkiem prostej opisanej równaniem

$$a \cdot t + b \cdot y + 1 = 0 \quad (3.1)$$

gdzie $t = t(\tau)$ i $y = y(\tau)$.

Uwzględniamy także proste przechodzące przez początek układu współrzędnych, jednak ich każdorazowe odrębne omawianie powoduje utratę przejrzystości rozważań, pozostając bez wpływu na końcowe wnioski. Wystarczy więc zauważyć, że podpadanie tego pęku prostych pod własności, jakie zostaną wykazane dla pozostałych (prawie wszystkich) prostych instrumentów finansowych, wynika choćby z założenia o symetrii euklidesowej, narzuconego na przestrzeń wykresów instrumentów finansowych, obserwowaną z wybranego układu odniesienia. Tak więc, abstrahując od parametrów czasowych charakteryzujących okres posiadania instrumentu prostego przez podmiot rynkowy, instrument ten możemy scharakteryzować parą liczb reprezentujących w określonym układzie odniesienia jego współrzędne $w_p := (a, b)$. To czy dany instrument finansowy jest prosty, czy nie, zależy od wyboru układu odniesienia.

Jako miarę *osiągalności instrumentu* na przedziale czasowym $[t_1, t_2]$ przyjmijmy ilość V przecięć jego wykresu ze zbiorem I_0

$$V = \int_{\leq 1} d\mu + \int_{\leq 2} d\mu + \int_{\leq 3} d\mu + \int_{\leq 4} d\mu + \dots \quad (3.2)$$

gdzie $\int_{\leq k} d\mu$ oznacza miarę (ilość) prostych przecinających wykres instrumentu finansowego przynajmniej k razy.

4. CO MIERZY OSIĄGALNOŚĆ INSTRUMENTU FINANSOWEGO?

Przy ustalonym *modus operandi* podmiotu rynkowego, będącego aktualnym właścicielem instrumentu finansowego, możliwość utracenia instrumentu w przyszłości jest wprost proporcjonalna do miary możliwości pozbycia się tego instrumentu w określonym przedziale czasowym, czyli zależy liniowo od jego osiągalności. Jeśli założymy, że podmiot działa racjonalnie, to wówczas taką miarę możliwości utracenia pożądanego dobra rynkowego możemy utożsamić z ryzykiem jego posiadania. Z tego powodu osiągalność stanowi naturalną miarę ryzyka finansowego.

W poszerzonym i zaktualizowanym wydaniu *Słownika wyrazów bliskoznacznych* [7] przymiotnik *osiągalny* zaopatrzony jest w odsyłacz do synonimu *tani*, zaś w analogicznej sytuacji tezaurus procesora tekstu *Word* firmy *Microsoft* odsyła nas do wyrazu *dostępny*. Jednakże zastąpienie *osiągalności* terminem *dostępność* nie wydaje się trafne, gdyż ten, choć częściej spotykany w słownikach, kojarzy się z *prostotą*, patrz [8], a proste wykresy okazują się najmniej osiągalne (co zostanie pokazane niżej w paragrafie 7). Ryzykowny (osiągalny) walor rynkowy nie jest w cenie, jest łatwy do zdobycia, lecz przez to niechciany. Słowo *osiągalność* oddaje więc dobrze sens wprowadzonej w bieżącym paragrafie definicji tego pojęcia w odniesieniu do instrumentu finansowego. Tak mierząca ryzyko wielkość ma relatywny charakter – zależy od

arbitralnego sposobu wskazania układu odniesienia służącego do opisu zachowań kursów cenowych dowolnych walorów finansowych.

Przypadkowo wylosowana prosta ma znacznie większą szansę przecinać wielokrotnie kawałek wykresu postrzępiony, czy o licznych zakolach, niż wygładzony, o przebiegu regularnym. Przy statystycznej interpretacji ryzyka jako dyspersji, zmiennej losowej o dużym rozrzucie (a więc dużej wariancji) przypisujemy duże ryzyko. Zgodnie z taką ideą większa osiągalność instrumentu powinna (przy niezmienionej stopie zwrotu) odpowiadać większemu ryzyku towarzyszącemu jego posiadaniu. Psychologicznie tłumaczy się to zwiększoną obawą aktualnego właściciela „siedzącego” na instrumencie przed jego „zrzuceniem”. Istnieje także następujący obiektywny powód takiej interpretacji ryzykownego instrumentu. Choć osiągalność czyli miara okazji wejścia w taki instrument (zamienienia innego instrumentu na właśnie ten) jest duża, to równa jest ona mierze wyjścia z niego, więc nie brakuje sposobności, by go utracić. Dlatego, jeśli instrument taki jest zyskowny, zwiększenie jego osiągalności powoduje zwiększenie ryzyka jego utraty, co ma negatywne konsekwencje dla właściciela. Dla określonego inwestora instrument o dwukrotnie większej osiągalności stwarza dwa razy więcej pokus jego sprzedaży. Należy podkreślić, że własność ta jest unikaną cechą osiągalności, nie występującą w przypadku standardowego określania ryzyka przy użyciu dyspersji. W przypadku strat których nie potrafimy uniknąć duża osiągalność instrumentu jest pożądanym zjawiskiem. Wydaje się, że w okresach hossy dobrze jest posiadać instrumenty o małej osiągalności w pozycji długiej, bądź (jeżeli to konieczne) w pozycji krótkiej instrumenty łatwo osiągalne. Inwersja układu odniesienia daje odpowiednio transponowane spostrzeżenia dla okresów bessy. I tak np. w trakcie bessy na WGPW, gdy niemożliwy był zakup odpowiednich warrantów, czy krótka sprzedaż, najmniej stratnymi na parkiecie inwestorami okazali się posiadacze ryzykownych akcji – trudność z utrzymaniem ich posiadania stała się w czasach dominacji rynku niedźwiedzia zaletą tych papierów.

5. EUKLIDESOWA NIEZMIENNICZOŚĆ MIARY PROSTYCH

Znajdźmy miarę, której wartość pozostaje niezmienna w trakcie zmiany stóp wszystkich prostych instrumentów finansowych o dowolną stałą, oraz przy zmianie momentu czasu τ_0 , względem którego instrumenty te były określone. Dla dwuwymiarowego zbioru prostych (3.1) rozważymy w tym opracowaniu klasę miar różniczkowych postaci

$$d\mu(a, b) = \rho(a, b)dad b$$

Parametryzacja (3.1) nie obejmuje prostych przechodzących przez środek układu współrzędnych, lecz nie ma to wpływu na uzyskane rezultaty, gdyż zbiór tych prostych, będący zbiorem jednowymiarowym, posiada miarę zerową.

Dowolną globalną zmianę stopy, polegającą na zmianie kąta nachylenia prostych instrumentów finansowych do osi odciętych, przesunięcie początku układu współrzędnych w prawo, bądź w lewo, oraz zmianę aktywa-pasywa możemy uzyskać dzięki następującej zamianie zmiennych:

$$t = \cos(\alpha) \cdot t' - \sigma \cdot \sin(\alpha) \cdot y' + \beta \quad , \quad y = \sin(\alpha) \cdot t' + \sigma \cdot \cos(\alpha) \cdot y'$$

wyznaczonej rodziną parametrów σ , α , β takich, że $\sigma = \pm 1$, $\alpha \in [0, 2\pi)$, $\beta \in \mathbb{R}$. Pociąga ona za sobą transformację współrzędnych prostej

$$w_p = (a, b) \rightarrow (a', b')$$

gdzie związek pomiędzy nowymi a starymi współrzędnymi ma postać

$$a' = \frac{a \cdot \cos(\alpha) + b \cdot \sin(\alpha)}{1 + a \cdot \beta} \quad , \quad b' = \sigma \cdot \frac{b \cdot \cos(\alpha) - a \cdot \sin(\alpha)}{1 + a \cdot \beta}$$

Jakobian tej transformacji wynosi

$$\frac{\partial (a', b')}{\partial (a, b)} = \sigma \cdot (1 + a \cdot \beta)^{-3}$$

Ponieważ spełniona jest następująca tożsamość

$$1 + a \cdot \beta = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a'^2 + b'^2}}$$

więc niezmienniczość miary

$$\begin{aligned} d\mu(a', b') &= \rho(a', b') da' db' = (1 + a \cdot \beta)^{-3} \cdot \rho(a', b') dadb = \\ &= \rho(a, b) dadb = d\mu(a, b) \end{aligned}$$

wymaga, aby

$$(a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}} \rho(a, b) = (a'^2 + b'^2)^{\frac{3}{2}} \rho(a', b') \quad (5.1)$$

co implikuje poniższą postać euklidesowo niezmienniczej miary prostych

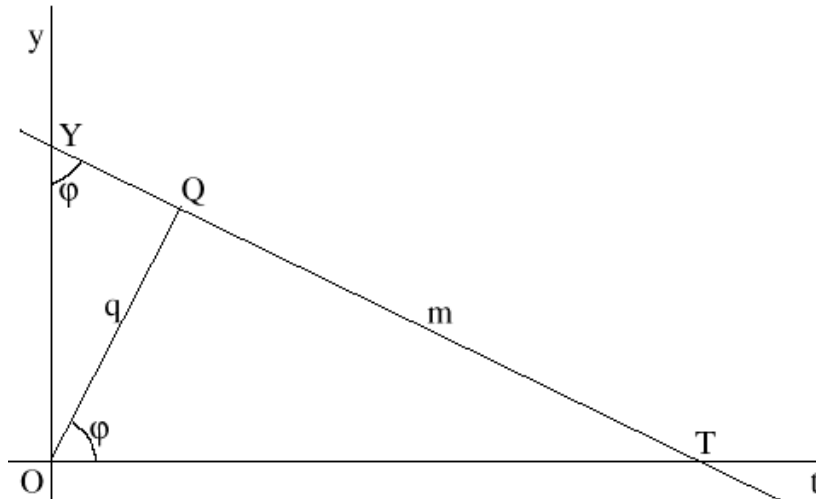
$$d\mu(a, b) = (a^2 + b^2)^{-\frac{3}{2}} dadb \quad (5.2)$$

bowiem tylko taka miara $d\mu$ z dokładnością do nieistotnej stałej multiplikatywnej spełnia warunek (5.1).

6. WSPÓLRZĘDNE BIEGUNOWE PROSTYCH

Sparametryzujemy prostą m (patrz poniższy rysunek), której parametry określają jej równanie (3.1), przy pomocy biegunowego układu współrzędnych. Zazwyczaj w oznaczeniach współrzędnych biegunowych występuje para liter r, φ . W celu uniknięcia kolizji ze standardem symbolizowania stopy procentowej, niech litera $q = |OQ|$ oznacza odległość prostej m od środka układu współrzędnych O (tzn. euklidesową długość odcinka prostopadłego do m i zaczepionego w środku układu), zaś φ niech będzie kątem pomiędzy osią

odciętych a odcinkiem OQ . Tak określone współrzędne biegunowe prostych, w kontekście obrazowania krzywych jako zbiorów prostych które krzywe te przecinają, nazywane są współrzędnymi Croftonowskimi.



Tworzą one *rukę Croftona*, czyli zbiór będący iloczynem kartezjańskim otwartej półprostej i okręgu $-\mathbb{R}_+ \times S^2$.

W nowych współrzędnych równanie prostej (3.1) jest następujące

$$t \cdot \cos(\varphi) + y \cdot \sin(\varphi) = q$$

więc taka zamiana zmiennych – parametrów prostych

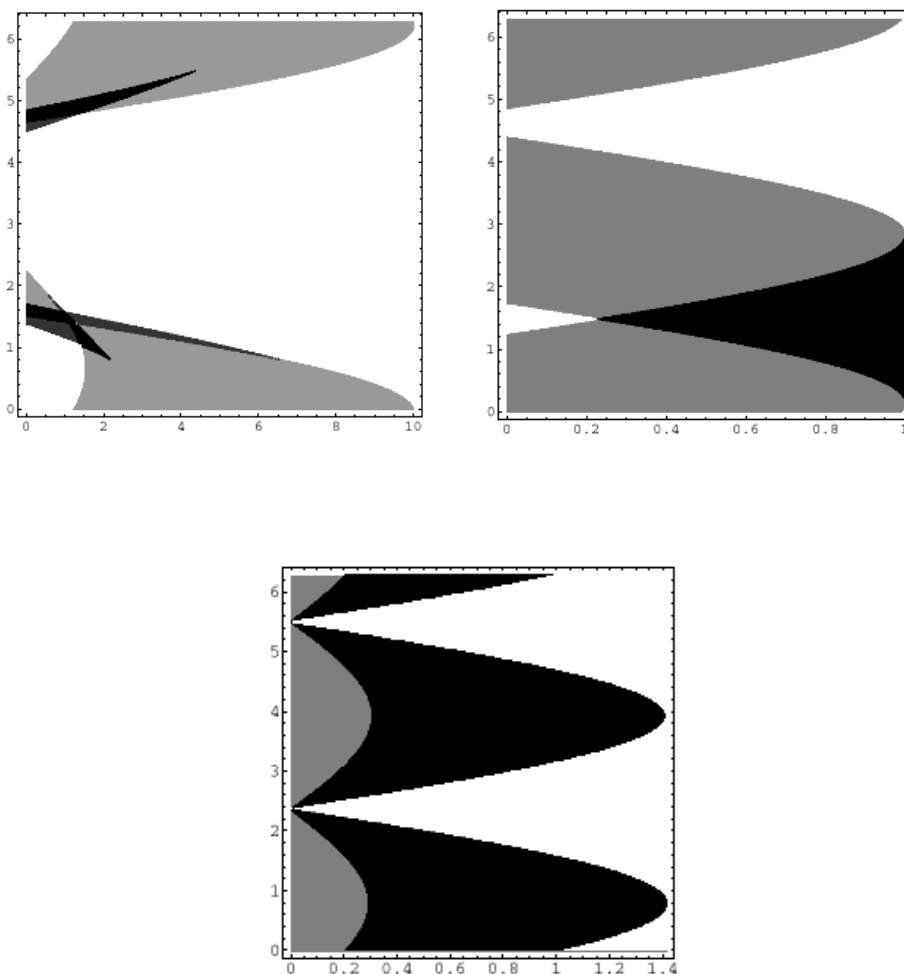
$$a = -q^{-1} \cdot \cos(\varphi) \quad , \quad b = -q^{-1} \cdot \sin(\varphi)$$

gdzie $q^{-1} = \sqrt{a^2 + b^2}$ o jakobianie $\frac{\partial(a,b)}{\partial(q,\varphi)} = q^{-3}$ daje na rurze Croftona

płaską postać miary niezmienniczej prostych, bowiem korzystając z zależności (5.2) otrzymamy poniższy rezultat

$$\begin{aligned} \mu(a,b) &= (a^2 + b^2)^{-\frac{3}{2}} da db = q^3 \frac{\partial(a,b)}{\partial(q,\varphi)} dq d\varphi = \\ &dq d\varphi = \mu(q,\varphi) \end{aligned} \quad (6.1)$$

Dla przykładu na kolejnych rysunkach przedstawiono obrazy trzech popularnych krzywych przedstawionych nie jak to zwykle bywa we współrzędnych (t, y) , lecz we współrzędnych croftonowskich (q, φ) . Są nimi kolejno: $\sin(x)$, $\sqrt{1-x^2}$ oraz lemniskata. By uwiarygodnić prezentowane portrety krzywych autor umieścił w Dodatku generujący je program napisany w języku *Mathematica*.

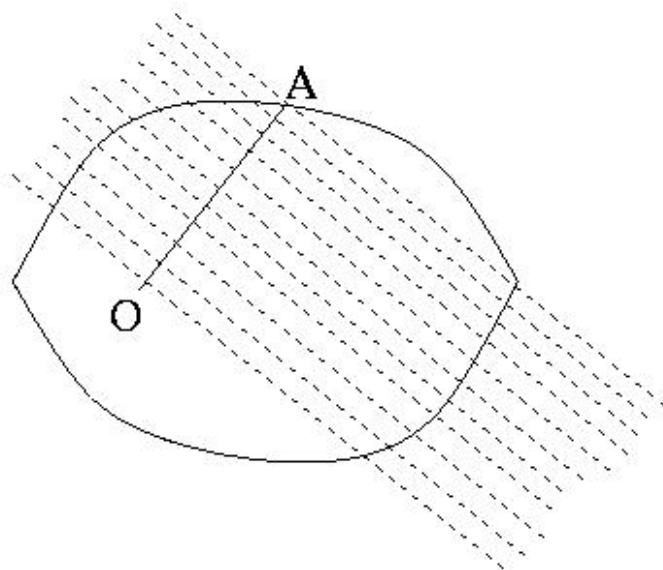


Ciemniejsze obszary powstały na skutek uwzględnienia wielokrotnych przecięć analizowanej krzywej z prostymi – punktami na rurze Croftona. Prawe

krawędzie rysunków są wynikiem obcięcia tej rury do obszaru w którym leżą wszystkie proste przecinające krzywą. Górne krawędzie rysunków należy utożsamić z dolnymi. Na tak sklezionej rurze Croftona przedstawionej na pierwszym rysunku możemy dostrzec obraz prostych przecinających funkcję $\sin(x)$ jedno, dwu, trzy i czterokrotnie. Przecięcia jedno i dwukrotne wyczerpują croftonowskie obrazy pozostałych dwóch krzywych.

7. FORMUŁA CROFTONA

Rozważmy różniczkowalny fragment wykresu instrumentu finansowego który jest łukiem, czyli ograniczoną, różną od prostej krzywą taką, że dowolna przecinająca ją prosta ma z nią najwyżej dwa punkty wspólne. Wyznamy osiągalność takiego obiektu. W tym celu uzupełnimy łuk doklejając do niego jego obraz otrzymany np. względem symetrii środkowej (jedna z symetrii grupy euklidesowej). Jeżeli do pomiaru osiągalności tak otrzymanego brzegu obszaru wypukłego użyjemy miary niezmienniczej względem grupy symetrii euklidesowych, wtedy osiągalność tego brzegu będzie dwa razy większa od osiągalności pojedynczego łuku. Wynika to z własności addytywności osiągalności. Dokonajmy transformacji euklidesowej tak, by środek układu współrzędnych O znajdował się we wnętrzu obszaru wypukłego. Wybierzmy dowolny punkt A na jego brzegu, o współrzędnych (q, φ) , gdzie $q = |OA|$ i rozważmy takie proste, których pierwsza ze współrzędnych biegunowych q' jest mniejsza niż q , a druga równa jest φ (na poniższym rysunku zaznaczono je liniami przerywanymi).



Wkład tych prostych, określonych dla infitezymalnego przyrostu współrzędnej φ , do osiągalności brzegu obszaru wypukłego wynosi

$$\int_{\leq 1} d\mu + \int_{\leq 2} d\mu = 2 \int_{\leq 2} d\mu = 2 \int_0^{q(\varphi)} dq' d\varphi = 2q(\varphi)d\varphi \quad (7.1)$$

ale $q(\varphi)d\varphi$ jest euklidesową długością fragmentu brzegu zawartego w kącie $d\varphi$, więc całka wyrażenia (7.1) po kącie φ od 0 do π (wtedy uwzględnimy wkład wszystkich prostych do osiągalności) jest długością brzegu obszaru wypukłego. Składając łuk krzywej z wypukłych kawałków i zauważając, że długość całego łuku równa jest sumie długości tych kawałków dochodzimy do wniosku, że osiągalność (2.1) takiego łuku równa jest jego długości

$$V = \int dl \quad (7.2)$$

Naturalnym staje się teraz wniosek że, spośród instrumentów dających na określonym przedziale czasowym jednakowe zyski, prosty instrument finansowy, który charakteryzuje się stałym (w tempie czasu wzorcowego) wzrostem wartości względem pieniądza, jest najmniej ryzykownym, bo

najtrudniej (najmniej) osiągalnym. Jest on ksenofobiczny – spośród walorów o takiej samej dochodowości najrzadziej dopuszcza do zmiany właściciela.

8. WYKRESY O NIESKOŃCZONEJ DŁUGOŚCI

Wzór Croftona (7.2) jest słuszny dla wszystkich łuków, dla których szereg (2.1) jest zbieżny – łuki o tej własności nazywamy prostowalnymi. Jeżeli w dowolnie małym ustalonym otoczeniu krzywej zmodyfikujemy jej kształt, to możemy doprowadzić do dowolnego wzrostu jej długości. Ów paradoks jest bezpośrednim wynikiem nieciągłości tego funkcjonału i stanowi przyczynę wielu praktycznych niedogodności [9],[10],[11]. Krzywymi o łukach nieprostowalnych są krzywe fraktalne. W skończonych obszarach ich osiągalność jest rozbieżna. Jednak i wtedy możemy określić skończoną miarę na krzywej modyfikując definicję osiągalności przez ustalenie rzędu n na którym decydujemy się obciąć szereg (3.2). Osiągalność V_n określona jest teraz wzorem

$$V_n = \int_{\leq 1} d\mu + \int_{\leq 2} d\mu + \int_{\leq 3} d\mu + \dots + \int_{\leq n} d\mu$$

W powyżej podanych przykładach obrazów krzywych jako obszarów na rurze Croftona osiągalności V_1 odpowiadałyby rysunki o jednakowym stopniu szarości zaznaczonych obszarów. Takie ograniczenie liczby zliczanych przecięć wykresu instrumentu finansowego z instrumentami prostymi jest praktyczne nie tylko z powodów rachunkowych. Wydaje się, że realistycznym jest uwzględnienie w definicji osiągalności takiej skończonej liczby możliwości zbycia instrumentu finansowego. W skończonych okresach czasowych mierzymy jedynie ograniczoną z góry ilość potencjalnych możliwości utraty (czy nabycia) instrumentu. Jednak nawet w przypadku rezygnacji z bezpośredniego posługiwania się obciętą osiągalnością możemy wybrać na wzorec długości krzywą fraktalną o szczególnych własnościach i choć dla niej

otrzymamy $\lim_{n \rightarrow \infty} V_n^{wzorzec} = \infty$, to wyznaczenie długości innych fraktali względem tego wzorca przez obliczenie granicy

$$v := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{V_n}{V_n^{wzorzec}}$$

może prowadzić do wyników skończonych. W ten sposób pojęcie osiągalności obejmuje dowolnie szeroką klasę wykresów instrumentów finansowych o jakkolwiek skomplikowanych kształtach krzywych.

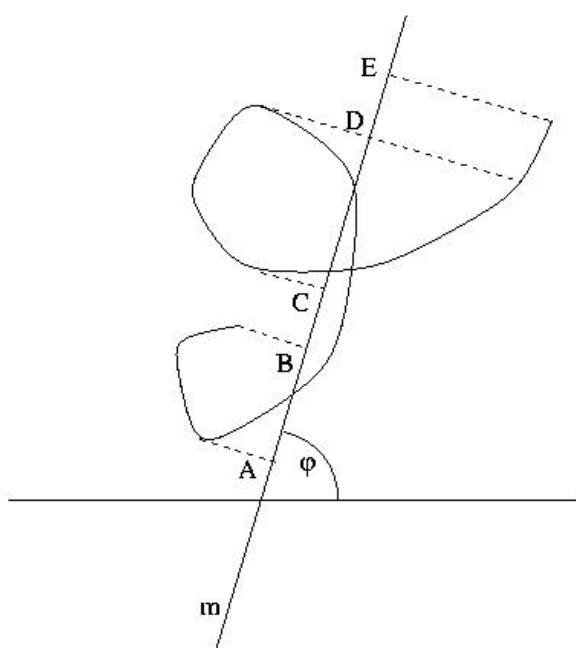
9. PRZECIĘTNA DŁUGOŚĆ RZUTU NA PROSTĄ

Hugo Steinhaus [9] zwrócił uwagę na związek formuły Croftona z zależnością między długością łuku, a przeciętną wartością długości jego cienia jaki tworzy przy rzucie prostopadłym na prostą. Doprowadziło go to do konstrukcji *longimetru* – przyrządu do pomiaru długości krzywych empirycznych (np. drogi czy rzeki na mapie, czy linii obserwowanej pod mikroskopem) [10], [11]. Na płaszczyźnie euklidesowej długość rzutu prostopadłego dowolnego odcinka o długości l na pewną prostą, z którą tworzy on kąt φ , wynosi $l|\cos(\varphi)|$, więc przeciętna długość jego cienia jest

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} l|\cos(\varphi)| d\varphi = \frac{2}{\pi} l$$

Składając krzywą z infinytezymalnie małych odcinków stwierdzamy, że np. na poniższym rysunku długość rzutu krzywej na prostą m wynosi

$$d(\varphi) = |AB| + |AD| + |CD| + |CE| = 2|AB| + |BC| + 3|CD| + |DE| \quad (9.1)$$



Wynikająca z powyższych rozważań długość łuku krzywej jest więc stałą częścią przeciętnej wartości długości jej cienia na przypadkowo wybranej prostej

$$V = \frac{\pi}{2} E(d(\varphi))$$

gdzie dla segmentów łuku, których cienie się nakładają, powinniśmy uwzględnić w rachunku ich krotność (analogicznie jak przy wyznaczaniu osiągalności), co zostało uwzględnione we wzorze (9.1).

Powyższą metodę wyznaczania długości krzywej zasugerował jeszcze w 1812 roku P.S. Laplace [9]. Pozwala ona na wyrażenie długości sparametryzowanej krzywej za pomocą podwójnej całki

$$\int_{\tau_0}^{\tau_1} \sqrt{\left(\frac{dx(\tau)}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dy(\tau)}{d\tau}\right)^2} d\tau = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \int_{\tau_0}^{\tau_1} \left| \frac{dx(\tau)}{d\tau} \cos(\varphi) + \frac{dy(\tau)}{d\tau} \sin(\varphi) \right| d\tau d\varphi$$

Powyższy wzór można znaleźć już w pracach Cauchy'ego, zob. [9]. Pamiętać jednak należy, że ten sposób wyznaczania osiągalności jest poprawny jedynie w przypadku euklidesowo symetrycznej miary prostych instrumentów finansowych.

10. KOMENTARZE

Niejasnym dla autora jest popularne przekonanie, że wzorzec astronomiczny stanowi naturalną miarę tempa upływu czasu w finansach. Jest niewątpliwie praktyczny (i praktykowany), choć nie na pewno charakterystyczny dla zjawisk finansowych. Oczywiście określa on wszelakie cykle fizyczne, chemiczne, czy biologiczne, jednak dla poszerzenia obszaru jego przydatności na procesy rynkowe należałoby za pomocą danych empirycznych wykazać, że np. parametry cen rynkowych posiadają specyficzną periodyczność w cyklach o jednakowej ilości godzin. Duża nieprzewidywalna zmienność wartości kontraktów terminowych prowadzi raczej do odmiennych wniosków. Ten powód, oraz próba geometryzacji przestrzeni parametrów notowań rynkowych [12] skłoniły autora do wprowadzenia pojęcia czasu wzorcowego.

Zasadę określania układu odniesienia dla wyznaczenia konkretnego ryzyka instrumentu finansowego można stosować niezależnie od pojęcia osiągalności, np. przy standardowym sposobie wyliczania ryzyka, gdyż przebieg funkcji zysku zależy od przyjętego układu odniesienia. W tych przypadkach proponowana metoda może wyjaśnić pozapsychologiczne mechanizmy odmiennej oceny ryzykowności tego samego instrumentu przez różne podmioty rynkowe. Słowo *recesja* oznacza cofanie się – dlaczegoż nie miałyby ono oznaczać cofania się w kierunku malejących wartości czasu gospodarczego (jako odpowiednio skonstruowanego czasu wzorcowego). Przy takiej interpretacji wykres cykli koniunkturalnych gospodarki prezentowałby funkcję zależności czasu gospodarczego od czasu astronomicznego. Pomiar upływu czasu wymaga

obserwacji cienia wywołanego interesującym nas typem mechanizmów, zaś od Platona wiemy, że badać możemy jedynie cienie idei.

Czas finansowy wcale nie musi być homeomorficzny z czasem astronomicznym. Jeżeli dać wiarę zwolennikom przekonań o skokowej naturze zmian czasowych podstawowych stóp procentowych, a zważywszy na mechanizmy powodujące te zmiany chyba mają oni rację, zależność pomiędzy tymi dwoma typami czasu ma charakter nieciągły. Zaproponowana wyżej definicja osiągalności jest przydatna i w takich przypadkach. Wystarczy ją stosować w ramach formalizmu opisanego w pracy [13]. W wariacie o euklidesowej symetrii osiągalność wykresów instrumentów finansowych jest wtedy ich długością mierzoną z pominięciem obszarów ich nieciągłości.

Warto tak wyskalować osiągalność, by najmniej ryzykowny instrument finansowy (czyli instrument prosty) miał wartość związanego z nim ryzyka posiadania V równą zero. Przy standardowym pomiarze ryzyka zabieg ów jest zbędny, gdyż dyspersja instrumentu prostego jest zerowa. W tym celu wystarczy posługiwać się miarą osiągalności względnej, będącej różnicą osiągalności instrumentu i osiągalności stosownego (przynoszącego taki sam zysk) instrumentu prostego. Osiągalność jest ekstensywnym parametrem instrumentu finansowego – podwojenie jego wykresu dwukrotnie zwiększa wartość tej wielkości. Dlatego wygodniej posługiwać się intensywnością osiągalności, tj. ilorazem osiągalności względnej do czasu wzorcowego, w jakim osiągalność ta wystąpiła. Dopiero ta liczba, będąca wskaźnikiem intensywnym, pozwala porównywać ryzyko instrumentów w różnych okresach czasowych.

Jako dualny do formalizmu oceny ryzyka instrumentów finansowych pojawia się opis pomiaru stopnia ryzyka algorytmów kupna-sprzedaży papierów wartościowych (w szczególności ryzyka portfeli).

W kontekście wyników autora dotyczących geometrii rynku [12] miara ryzyka kursowego winna być raczej konstruowana w przestrzeniach pseudoeuklidesowych. W przypadku geometrii Lorentza [14] uzasadnienie

rezultatów analogicznych do powyżej prezentowanych wymaga nietrywialnych modyfikacji, dlatego zostanie przedstawione w odrębnym opracowaniu.

Wprowadzona definicja osiągalności w naturalny sposób uogólnia się na wykresy w \mathbb{R}^n . Umożliwia to budowę konsystentnej teorii ryzyka dla wielowymiarowych, złożonych procesów kapitałowych [15]. Można dostrzec podobieństwo pomiędzy taką teorią, a zagadnieniami optyki geometrycznej i mechaniki klasycznej [16]. Najbliższym odpowiednikiem mechanicznym przypominającym prezentowane tu podejście jest problem osiągalności dla zagadnienia orbit Hohmanna [17] – podstawowego typu trajektorii podróży międzyplanetarnych. Są to elipsy określone prawami Keplera, łączące dwie inne orbity zamknięte. Podróż odbywająca się po nich jest najbardziej ekonomiczna pod względem wydatkowanej energii. Związane z energią *działanie* [16] jest funkcjonałem na trajektoriach, który odpowiada występującemu w tym opracowaniu funkcjonałowi długości. Dlatego badanie stosownych symetrii i zasad wariacyjnych może stworzyć realną perspektywę poznania fundamentalnych równań świata finansów.

W odrębnym opracowaniu, na przykładzie konkretnych papierów wartościowych notowanych na rynku, zostanie przedłożona analiza porównawcza pomiaru ryzyka: raz jako dyspersji, drugi raz jako osiągalności.

Uniwersytet w Białymstoku

DODATEK

Program w języku *Mathematica*, generujący obrazy krzywych na rurze Croftona.

```

Crofton[r_,phi_,table_]:=
Module[{count = 0, sn = Sin[phi], cs = Cos[phi], side = 1,
  lastside = Sign[ cs table[[1,1]] + sn table[[1,2]] - r}},
Do[ side = Sign[ cs table[[m+1,1]] +
  sn table[[m+1,2]] - r ] ;
If[lastside != side, count = count + 1];
lastside = side;
,{m, Length[table]-1}]; count]

CroftonPlot[f_]:= Module[{n = 50, delta=0., table={}},
  delta = If[Length[f]==2,N[(f[[2, 2]] - f[[2, 1]])/n],
  N[(f[[3]] - f[[2]])/n] ];
  x = If[Length[f]==2,f[[2, 1]],f[[2]]];
  Do[table = Append[table,If[Length[f]==2,{x, N[f[[1]][x]]},
  {N[f[[1]][x][[1]],N[f[[1]][x][[1]]} ]];
  x = x + delta, {n + 1}];
  ContourPlot[Crofton[r,phi,table],
  {r,0,N[Sqrt[Apply[Max,Map[(#[[1]]^2+#[[2]]^2)&, table]]]}},
  {phi,0,2 Pi},
  PlotPoints -> 500,
  ColorFunction -> (GrayLevel[1-#]&), ContourLines->False]]

Display["cr1.ps",CroftonPlot[{Sin, {1, 10}}],"EPS"];
fx[x_] := Sqrt[1 - x^2]

Display["cr2.ps",CroftonPlot[{fx, {-.99, 0.99}}],"EPS"];

lemniscate[t_]:= {t(1+t^2)/(t^4+1),t(1-t^2)/(t^4+1)}
Display["cr3.ps",CroftonPlot[{lemniscate, -5, 5}], "EPS"];

```

LITERATURA

- [1] Arrow K.J., *Eseje z teorii ryzyka*, PWN, Warszawa 1979.
- [2] Piotrowski E.W., *Zapomniany pierwowzór definicji ryzyka kapitałowego*, w *Modelowanie preferencji a ryzyko'99*, t.1, AE Katowice 1999.
- [3] Steinhaus H., *Autobiografia*, Wiadomości Matematyczne 17(1973)3-11.
- [4] *Encyclopaedia of Mathematics on CD-ROM*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht 1997.
- [5] Kendall, M.G., Moran P.A.P., *Geometric probability*, Griffin, London 1963.
- [6] Piotrowski E.W., *Algebra kredytów*, Przegląd Statystyczny 46(1999)297-313.
- [7] *Słownik wyrazów bliskoznacznych*, Wiedza Powszechna, Warszawa 1998.
- [8] *Słownik języka polskiego* pod red. W. Doroszewskiego, przedruk elektroniczny PWN, Warszawa 1963-1969.
- [9] Steinhaus H., *Length, shape and area*, Colloquium Mathematicum 3(1954)1-13.
- [10] Steinhaus H., *Kalejdoskop matematyczny*, WSiP, Warszawa 1989.
- [11] Perkal J., *O długości krzywych empirycznych*, Zastosowania Matematyki 3(1958)258-284.
- [12] Piotrowski E.W., *Geometria rynku*, Optimum 1(2000)161-179.
- [13] Piotrowski E.W., *Hiperstopa zwrotu*, wysłane do druku w Przeglądzie Statystycznym.
- [14] Beem J., Ehrlich P., *Global lorentzian geometry*, Dekker, New York 1981.
- [15] Piotrowski E.W., *Macierzowa stopa zwrotu*, Przegląd Statystyczny 46(1999)340-352.
- [15] Arnold W.I., *Metody matematyczne mechaniki klasycznej*, PWN, Warszawa 1981.
- [16] *Britannica® CD 99 Standard Edition*, © 1994-1999 Encyclopædia Britannica, Inc.

STRESZCZENIE

Jeżeli nieokreśloność zysku wiąże się z ilością możliwości utracenia dobra rynkowego, to ryzyko inwestycji możemy mierzyć proponowaną definicją osiągalności instrumentu finansowego, sformułowaną względem układu odniesienia wyznaczanego zwykle przez pieniądz i papier wartościowy o stałym oprocentowaniu. Dla układów odniesienia posiadających symetrię euklidesową XIX-wieczna formuła Croftona sprowadza osiągalność prostowalnego wykresu instrumentu do jego długości. Ten sposób wyznaczania ryzyka stosuje się także dla wykresów fraktalnych.