Edward W. Piotrowski

STATYKA PORÓWNAWCZA À LA THERMODYNAMIQUE. ELEMENTY

(RePEc:sla:eakjkl:115PL 10-VII-2001)

„Indywidualny członek zbiorowości społecznej
często otrzymuje informacje wizualnymi
kanałami symbolicznymi”[1]

1. WSTĘP

Potencjał, *równanie stanu*, *zasady zachowania* – to charakterystyczne elementy, wywodzącego się z fizyki, zestawu powiązanych ze sobą terminów. Jego wyjaśniającą funkcję odkryli przed 150 laty twórcy w pełni dojrzałej matematycznie, a zarazem na wskroś fenomenologicznej teorii zjawisk cieplnych, zwanej *termodynamiką równowagową*. Z nowej metody opisu zjawisk zdołali bezbłędnie wysnuć prawa przyrody, których mechanizmy wyjaśniono dopiero 50 lat później. Termodynamika posługuje się tradycyjną geometrią różniczkową, w ramach której formułuje nierzadko zdumiewające swą prostotą tożsamości i twierdzenia. Równolegle z wywodem rachunkowym ówcześni eksperymentatorzy często weryfikowali otrzymywane przez siebie wzory.

Jeżeli równowagę ekonomiczną scharakteryzujemy jako brak niedoborów i nadwyżek, to z punktu widzenia rachunkowego mamy do czynienia z pewnym (stwierdzającym ten fakt) równaniem bilansu zapisanym w postaci różniczkowej (czy różnicowej). Rozwiązanie tego równania pozwala wyeliminować spośród parametrów ekonomicznych jeden z nich i przedstawić go jako funkcję pozostałych. Zwykle redukcji tej można dokonać przez wyróżnienie dowolnego z parametrów, co nie ma wpływu na geometryczne własności podprzestrzeni $\mathcal{B}$ (stanu równowagi opisywanego równaniem bilansu) przestrzeni parametrów ekonomicznych. W ten sposób geometria odzwierciedla ekonomiczne własności przedmiotu badań statyki równowagowej. Sytuacja ta przypomina do złudzenia termodynamikę, w której równaniu bilansu infinitezymalnych przepływów odpowiada pierwsza zasada termodynamiki, a równaniu bilansu skumulowanych dzięki przepływom środków – równanie stanu. Dlatego intencją autora tej pracy jest próba nowego ujęcia pewnych zagadnień, znanych ze statyki równowagowej, przez posługiwanie się metodologią i techniką rachunkową charakterystyczną dla termodynamiki.

Większość pojawiających się w opracowaniu równań opisujących prawa zachowania i algebraicznych tożsamości to równania bilansu przepływów (takich, jak: operacja kupna, spłata kredytu, wypłata dywidendy, zmiana wartości obligacji spowodowana ruchem stóp procentowych, reorientacja funkcji produkcji, komasacja, arbitraż cenowy, przemieszczenie wzdłuż krzywej obojętności itp.) bądź środków, których poziom jest wypadkową przepływów. Tego typu równania autor starał się zapisywać w jednolitej konwencji. I tak, w przypadkach równań różniczkowych (przepływy) wpływy (mające jednakowe znaki) uwzględniamy zawsze z przeciwnymi znakami w stosunku do wydatków. W przypadkach równań funkcyjnych (środków) aktywa (o jednakowych znakach) wliczamy z przeciwnymi znakami niż pasywa.

[1] [1] Feynman R.P., *„Pan raczy żartować, panie Feynman!”*, Znak, Kraków 1996.

Oczywiście ujemny znak może dotyczyć zarówno wpływów (czy aktywów), jak wydatków (czy pasywów) – wszystko zależy od punktu widzenia sporządzającej bilans osoby (zysk, czy strata) oraz od przyjętej zasady uwzględniania kierunku upływu czasu (np. oprocentowanie, czy dyskonto). W opisywanej tu klasie procesów kategoria czasu nie występuje explicite, jednak jest nieodzowna dla uściślenia kierunku opisywanych zmian. Szerszą analizę zagadnień dotyczących uwag poczynionych w ostatnich zdaniach można odnaleźć w innym opracowaniu [10].

Kluczową rolę w poniższej analizie gra przekształcenie Legendre'a, bowiem daje receptę poprawnego sformułowania odpowiednika bilansu księgowego właściwego konkretnemu modelowi. Przy tym nieodzowne okazuje się znalezienie transformaty Legendre'a wyróżnionej wielkości ekonomicznej, która jako funkcja określona na przestrzeni pozostałych parametrów znana jest w geometrii różniczkowej jako potencjał. Idea transformacji Legendre'a wywodzi się jeszcze od G. W. Leibniza [5] i prawdopodobnie przed zastosowaniami termodynamicznymi z powodzeniem używano jej w statyce, która w tamtych czasach była jedynie gałęzią mechaniki. Jednak potem, zapominając o owych aplikacjach, zaadoptowano to przekształcenie dla potrzeb dynamiki. Obecnie, przy okazji omawiania transformacji Legendre'a, nawet tacy luminarze mechaniki jak Herbert Goldstein [6] odwołują się do przykładów termodynamicznych. Teorii ciepła zawdzięczamy przede wszystkim uwydatnienie roli, jaką różne typy potencjałów grają w analizie układów pozostających w stanie równowagi.

Prócz praw zachowania parametrów ekonomicznych i towarzyszących prawom terminów w końcowej partii tekstu pojawiają się odpowiadające im *kwazipojęcia.* Są to obiekty teorii podobne do swych nieułomnych odpowiedników, jednak ich istnienie ma charakter wtórny. Nabierają znaczenia dopiero po określeniu prawa zachowania charakteryzującego model ekonomiczny. Kwazipojęcia można zidentyfikować w kontekście zasad (praw zachowania) opisujących stan równowagi, które przyjmujemy poprzez wybór modelu, a więc apriorycznie. Ułomne w jednym, mogą stać się pełnoprawnymi składnikami innego modelu.

2. HIPERPOWIERZCHNIA STANU RÓWNOWAGI

Rozważmy $N+1$ wymiarową rzeczywistą przestrzeń $\mathbb{R}^{N+1}$ *parametrów ekonomicznych* $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_N$. Mogą nimi być np. składniki majątku, ceny rynkowe, różnookresowe stopy procentowe, wysokości świadczeń emerytalnych, wydatki konsumenta, wielkości nakładów i produkcji itd. Zdefiniujmy przestrzeń *stanu równowagi* $\mathcal{B}$ jako N–wymiarową hiperpowierzchnię zadaną w $\mathbb{R}^{N+1}$ równaniem Pfaffa, czyli liniowym równaniem różniczkowym pierwszego rzędu (tzw. *prawem zachowania* parametru p_0) o postaci:

$$\sum_{\mu} \pi_\mu (p_1, \ldots, p_N) dp_\mu = 0 . \tag{2.1}$$

Dla jednoznaczności rozwiązania uzupełniamy je stosownym warunkiem brzegowym $(p_0^*, p_1^*, \ldots, p_N^*) \in \mathcal{B}$. W powyższym zapisie i w dalszym tekście przyjęliśmy konwencję, że wskaźnik będący grecką literą (np. μ) przebiega wartości $0,1,2,\ldots,N$, w odróżnieniu od wskaźnika łacińskiego przyjmującego tylko wartości $1,2,\ldots,N$. Równanie (2.1) ma szczególną cechę. Współczynniki $\pi_\mu (p_1, \ldots, p_N)$ nie są funkcjami jednego z parametrów ekonomicznych, który figurując w nazwie prawa zachowania wyróżniony jest indeksem zerowym. Ten parametr p_0 nazywamy *potencjałem.* Pozostałe parametry $p_1, \ldots, p_N$ nazywamy *parametrami* stanu. Interesującym nas obszarem dociekań ekonomistów będą teorie, które po odpowiednim wyborze parametrów ekonomicznych, często poprzedzonym ich stosowną nieliniową transformacją, prowadzą do równania (2.1).

W modelach statyki porównawczej zajmujemy się różnymi możliwościami zmiany parametrów w równowadze, prowadzącymi od jednego dopuszczalnego zbioru parametrów ekonomicznych do drugiego. Posługując się opisem zmian zadanych równaniem (2.1) generujemy, przy pomocy rachunku całkowego, krzywe (trajektorie) zawarte w $\mathcal{B}$, przebiegające przez dozwolone w równowadze zestawy parametrów ekonomicznych. Wychodząc od aspektów lokalnych zanurzenia hiperpowierzchni $\mathcal{B}$ w $\mathbb{R}^{N+1}$, dochodzimy do poziomu pośredniego, na którym możemy porównywać warunki ekonomiczne panujące na trajektoriach dozwolonych zmian czynników ilościowych. Opis globalny możliwych zmian parametrów jest zazwyczaj zbędny. Ekonomistów nie interesuje, czy przestrzeń $\mathcal{B}$ jest spójna, jak wygląda jej brzeg, czy posiada dziury, bądź rączki. Ekonomiczne modele dotyczą raczej aspektów zanurzenia $\mathcal{B}\rightarrow\mathbb{R}^{N+1}$, a nie wewnętrznych właściwości przestrzeni $\mathcal{B}$. Dlatego globalne własności hiperpowierzchni $\mathcal{B}$ możemy zignorować, przyjmując upraszczające założenie, że jest ona homeomorficzna (topologicznie równoważna) z $\mathbb{R}^N$. Wyłączywszy z $\mathcal{B}$ punkty osobliwe, równanie (2.1) możemy przepisać w następującej postaci

$$dp_0 + \sum_k c_{k0}(p_1,\dots,p_N)dp_k = 0\,, \tag{2.2}$$

gdzie

$$c_{k0}(p_1,\dots,p_N) := \frac{\pi_k(p_1,\dots,p_N)}{\pi_0(p_1,\dots,p_N)}\ . \tag{2.3}$$

Postać (2.2) równania (2.1) separująca zmienną p_0 po całkowaniu daje jej jawny opis jako funkcji zależnej od pozostałych parametrów stanu. W ten sposób scałkowanie równania (2.2) (zawsze wykonalne, gdyż $\mathcal{B}$ jest homeomorficzna z $\mathbb{R}^N$) prowadzi do wyznaczenia przestrzeni stanu równowagi przy pomocy równania więzów (równania funkcyjnego) zwanego *równaniem stanu*. Równanie to najprościej przedstawić w następującej formie, eliminującej potencjał p_0 ze zbioru parametrów niezbędnych do jednoznacznego określenia dozwolonego położenia modelowanego układu w stanie, w jakim się on znajduje

$$p_0 + f(p_1,\dots,p_N) = 0\,. \tag{2.4}$$

Prawo zachowania (2.2), będąc równaniem lokalnym (różniczkowym), opisuje infinitezymalne zmiany w otoczeniu każdego z punktów przestrzeni stanu równowagi. Z ekonomicznego punktu widzenia jest ono bilansem przepływów pomiędzy rezerwuarami środków (np. dóbr, cen, stóp procentowych itd., ale też długów, czy podatków, gdyż przyjmujemy tu, że zobowiązania należy kwalifikować jako ujemne środki), których ilości charakteryzują parametry p_μ. Funkcje $c_{k0}(p_1,\dots,p_N)$ są *współczynnikami intensywności* informującymi, jaka ilość środka wyznaczającego potencjał równoważy przepływ jednostki środka o indeksie k. Natomiast równanie stanu (2.4) opisujące dozwoloną ekonomicznie podprzestrzeń parametrów w $\mathbb{R}^{N+1}$ ma charakter globalny, jest bilansem stanu rezerwuarów nagromadzonych w wyniku przepływów środków cechujących proces ekonomiczny.

3. TOŻSAMOŚCI DLA WSPÓŁCZYNNIKÓW INTENSYWNOŚCI

Jeżeli na potencjał spojrzymy jak na funkcję parametrów stanu p_k, to równanie (2.2), określające różniczkę zupełną p_0, wyznacza kolejne pochodne cząstkowe tej funkcji

$$c_{k0}(p_1,\dots,p_N) := \frac{\pi_k}{\pi_0} = -\frac{\partial p_0(p_1,\dots,p_N)}{\partial p_k}\ . \tag{3.1}$$

Zadają one wartości współczynników kierunkowych hiperpłaszczyzny w zadanym punkcie stycznej do rozmaitości $\mathcal{B}$ stanu równowagi. Dlatego hiperpłaszczyzny te wyznaczają w przestrzeni parametrów ekonomicznych dopuszczalne kierunki zmian tych parametrów przy przejściu z jednego do drugiego zbioru ich równowagowych wartości.

Dekompozycji zbioru parametrów ekonomicznych na potencjał i parametry stanu często możemy dokonać na wiele sposobów, więc decyzja o tym, który z parametrów nie zostanie uwzględniony w zbiorze niezależnych wielkości opisujących stan równowagi jest arbitralna i podyktowana jedynie wygodą opisu modelowanych zjawisk. W sytuacji wyboru innego parametru ekonomicznego p_μ jako potencjału, należy uogólnić definicję (2.3) na pary indeksów k,μ. Uogólnienie to na postać

$$c_{k\mu} := \frac{\pi_k}{\pi_\mu} = -\frac{\partial p_\mu(p_0,\ldots,p_{\mu-1},p_{\mu+1},\ldots,p_N)}{\partial p_k}$$

gdzie indeks k przebiega wskaźniki różne od wskaźnika μ numerującego aktualny potencjał. Definiując $c_{\mu\mu} := 1$ otrzymamy ciąg tożsamości spełnianych przez funkcje $c_{\mu\nu}$, zwanych *regułami łańcuchowymi* [4]

$$c_{\mu\nu} = c_{\mu\rho} c_{\rho\nu}, \tag{3.2}$$

których szczególnym przypadkiem jest własność

$$c_{\mu\nu} = c_{\nu\mu}^{-1}.$$

Reguły tożsame z (3.2) pojawiły się także jako konsekwencja własności liniowej funkcji użyteczności [11].

Jeżeli pochodne cząstkowe $\frac{\partial c_{\mu\rho}}{\partial p_\nu}$ oraz $\frac{\partial c_{\nu\rho}}{\partial p_\mu}$ są funkcjami ciągłymi na hiperpłaszczyźnie stanu równowagi sparametryzowanej zmiennymi $p_0,\ldots,p_{\mu-1},p_{\mu+1},\ldots,p_N$, to na mocy twierdzenia Younga [4] są one równe (bowiem odpowiadające im pochodne mieszane są przemienne). Tak więc możemy wypisać cały ciąg tożsamości dotyczących pochodnych cząstkowych funkcji intensywności

$$\frac{\partial c_{\mu\rho}}{\partial p_\nu} = \frac{\partial c_{\nu\rho}}{\partial p_\mu}, \tag{3.3}$$

które w termodynamice noszą nazwę równań Maxwella [1].

Tożsamości (3.2) i (3.3) warto stosować w przypadkach, gdy czynniki π_μ czy intensywności $c_{\mu\nu}$ mają bezpośrednią interpretację ekonomiczną. W prezentowanym tekście autor zamieścił jedynie przykład o stałych intensywnościach.

4. NOWE WARIANTY PRAWA ZACHOWANIA

Przy opisie przestrzeni $\mathcal{B}$ parametr stanu p_m może zostać zastąpiony parametrem określonym wartościami funkcji intensywności c_{m0}. Jest to możliwe dzięki *transformacji Legendre'a* [2]

$$(p_1,\ldots,p_N) \to (p_1,\ldots,p_{m-1},c_{m0},p_{m+1},\ldots,p_N).$$

Polega ona na wprowadzeniu nowego potencjału $\overline{p}_0(\ldots,c_{mo},\ldots)$, zwanego *transformatą Legendre'a* funkcji $p_0(\ldots,p_m,\ldots)$, o następującej postaci

$$\overline{p}_0 = \overline{p}_0(p_1,\ldots,p_{m-1},c_{m0},p_{m+1},\ldots,p_N) := -p_0(p_1,\ldots,p_N) - c_{m0}p_m, \tag{4.1}$$

który dzięki takiej konstrukcji nie zależy bezpośrednio od zmiennej p_m (choć jest funkcją m.in. zmiennej niezależnej c_{m0}). Ową niezależność od p_m można dostrzec wyznaczając pochodną prawej strony (4.1) po p_m (dla stosownie wybranej wartości zmiennej c_{m0})

$$-\frac{\partial\left(p_0(p_1,\ldots,p_N)+c_{m0}p_m\right)}{\partial p_m}\Bigg|_{c_{m0}=c_{m0}(p_1,\ldots,p_N)} = -\left(\frac{\partial p_0}{\partial p_m}+c_{m0}\right)\Bigg|_{c_{m0}=c_{m0}(p_1,\ldots,p_N)} = 0\,,$$

gdzie ostatnia z powyższych równości jest bezpośrednią konsekwencją definicji (3.1). Równość (3.1) traktowana jako uwikłana postać funkcji $p_m = p_m(p_1,\ldots,p_{m-1},c_{m0},p_{m+1},\ldots,p_N)$ pozwala wyrugować zmienną p_m w wyrażeniu (4.1) definiującym potencjał $\overline{p}_0$.
Zróżniczkowanie stron równania (4.1) prowadzi do nowego odpowiednika prawa zachowania (2.2), tym razem będącego zasadą zachowania potencjału $\overline{p}_0$

$$\begin{aligned} d\overline{p}_0 &= \sum_k c_{k0}dp_k - c_{m0}dp_m - p_m dc_{m0} = \\ &= -p_m(p_1,\ldots,p_{m-1},c_{m0},p_{m+1},\ldots,p_N)dc_{m0} + \sum_{k\neq m} c_{k0}dp_k\,. \end{aligned}$$

Dzięki takiej zamianie współrzędnych przy parametryzowaniu stanu równowagi możemy posługiwać się innym układem N zmiennych wybranych spośród elementów zbioru $\{p_1,\ldots,p_N,c_{10},\ldots,c_{N0}\}$. Ważne jest, aby żadna para zmiennych p_m, c_{m0} o jednakowych indeksach nie występowała w nim jednocześnie. Transformację Legendre'a możemy przeprowadzić przy wyborze potencjału spośród zbioru wszystkich parametrów ekonomicznych p_μ.

Z powyżej przedstawionych przyczyn parametry $c_{m\mu}$ nazywamy *parametrami kanonicznie sprzężonymi* do odpowiadających im parametrów stanu p_m. Transformacja Legendre'a jest inwolucją, tzn. ponowne jej wykonanie na parametrze o niezmienionym indeksie jest transformacją odwrotną. Łatwo obliczyć, że w ten sposób możemy otrzymać nawet $(N+1)\times 2^N$ różnych, choć równoważnych sobie modeli statyki porównawczej. Jest tak, gdyż dla każdego z $N+1$ możliwych wyborów potencjału (spośród parametrów ekonomicznych) mamy N możliwych inwolucji Legendre'a dla kolejnych parametrów stanu, które możemy wykonywać w różnych kombinacjach. W termodynamice wykorzystuje się transformację Legendre'a osobno dla każdego z parametrów termodynamicznych w celu sformułowania wygodnych wariantów obowiązującego tam prawa zachowania energii. Jest nim zapisana w postaci jednego równania pierwsza i druga zasada termodynamiki. Zastosujemy tu jedynie najdalej idący wariant transformacji, zastępujący wszystkie parametry stanu parametrami do nich sprzężonymi. Odpowiednikiem potencjału (4.1) będzie wtedy funkcja c_{00} zadana wyrażeniem

$$c_{00} = c_{00}(c_{10},\ldots,c_{N0}) := -p_0(p_1,\ldots,p_N) - \sum_k c_{k0}p_k\,. \tag{4.2}$$

Różniczkując strony równości (4.2) i korzystając z prawa (2.2) otrzymamy jego alternatywną wersję w postaci prawa zachowania potencjału c_{00}:

$$dc_{00} = \sum_k c_{k0}dp_k - \sum_k\left(c_{k0}dp_k + p_k dc_{k0}\right) = -\sum_k p_k(c_{10},\ldots,c_{N0})dc_{k0}\,.$$

Rozwiązanie układu N równań funkcyjnych (3.1) ze względu na każdą zmienną p_k, które ma postać $p_k = p_k(c_{10},\dots,c_{N0})$, pozwala z użyciem formuły (4.2) otrzymać zależność funkcyjną nowego potencjału c_{00} od nowych parametrów stanu c_{k0} (czyli od parametrów sprzężonych do parametrów stanu p_k). Zależność ta jest nową formą równania stanu (2.4). Układ równań (3.1) może nie mieć rozwiązania, bądź mieć ich wiele. W pierwszym przypadku inwolucja Legendre'a $(p_1,\dots,p_N) \leftrightarrow (c_{10},\dots,c_{N0})$ nie istnieje. W drugim wystarczy wybrać do eliminacji zmiennych p_k dowolne z tych rozwiązań. Część intensywności c_{k0} w równaniach (3.1) może być stała (skrajny wariant takiego przypadku jest szczegółowo omówiony w następnym paragrafie). Uzmienniając te stałe (jak niżej) otrzymamy przejście do opisu za pomocą współczynników intensywności, jednak nie będą one parametryzować,· lecz opisywać przekształcenia $\mathcal{B}$ wewnątrz $\mathbb{R}^{N+1}$ spowodowane egzogenicznymi zmianami parametrów intensywności. Dlatego inwolucję Legendre'a $\mathcal{T}_\mathrm{L}$ powinniśmy traktować nie jako automorfizm $\mathcal{T}_\mathrm{L}:\mathcal{B}\leftrightarrow\mathcal{B}$, lecz jako odwzorowanie zadane formułą (4.2) pomiędzy dwoma strukturami kontaktowymi

$$\mathcal{T}_\mathrm{L}:\mathbb{R}^{2N+1}_{p_0} \leftrightarrow \mathbb{R}^{2N+1}_{c_{00}},$$

gdzie strukturę kontaktową $\mathbb{R}^{2N+1}_{p_0}$ definiujemy jako zbiór parametrów rzeczywistych $(p_0,\dots,p_N,c_{01},\dots,c_{0N})$ wraz z włożeniem hiperpowierzchni $\mathcal{B}_{p_0} \to \mathbb{R}^{2N+1}_{p_0}$ zadanym potencjałem $p_0(p_1,\dots,p_N)$ przy pomocy równania

$$dp_0(p_1,\dots,p_N) + \sum_k c_{k0}dp_k = 0\,.$$

W analogiczny sposób określamy dualną strukturę kontaktową $\mathbb{R}^{2N+1}_{c_{00}}$. Należy przypomnieć, że tylko jedna z funkcji jest określona niezależnie, bowiem są one, jedna do drugiej, transformatami Legendre'a. Poniższy diagram obrazuje opisywaną sytuację:

$$\begin{tikzcd}
(p_0,\dots,c_{10},\dots)\in\mathbb{R}^{2N+1}_{p_0} \arrow[rr, leftrightarrow, "\mathcal{T}_\mathrm{L}"'] & & \mathbb{R}^{2N+1}_{c_{00}} \ni (c_{00},\dots,p_1,\dots) \\
(p_1,\dots,p_N)\in\mathcal{B}_{p_0} \arrow[u, "dp_0(p_1,\dots,p_N)"] & & \mathcal{B}_{c_{00}} \ni (c_{10},\dots,c_{N0}) \arrow[u, "dc_{00}(c_{10},\dots,c_{N0})"']
\end{tikzcd}$$

Inwolucja Legendre'a umożliwia stosowanie w modelach równowagi dwoistego opisu zjawisk, w którym, z formalnego punktu widzenia, czynniki intensywności mogą pełnić rolę parametrów stanu i vice versa. Swobodny wybór między zestawami parametrów ekonomicznych $(p_0,\dots,p_N)$ i $(c_{0\mu},\dots,c_{N\mu})$ pozwala dogłębnie wnikać w charakterystyczne właściwości takich modeli. Przekształcenie Legendre'a jest często użyteczne w rachunkach mających na celu znalezienie równania stanu (jawnej postaci potencjału) przez efektywne wycałkowanie prawa zachowania, prawa występującego w formie uproszczonej dzięki tej inwolucji. Znacznie łatwiej jest zaobserwować i opisać lokalnie prawo zachowania, niż zbudować potencjał odpowiadający przepływom zgodnym z tymi, które zamierzaliśmy uwzględnić w modelu skonstruowanym przez zadanie potencjału.

5. KOSZYKI I CENNIKI

Dla przedstawienia omówionego sposobu badania modeli, w trzech kolejnych paragrafach tego opracowania zostanie zanalizowany podstawowy, a jednocześnie najprostszy nietrywialny przykład, którym jest prawo zachowania o wszystkich intensywnościach c_{k0} stałych (lub o stałych dualnych do intensywności parametrach). Przykłady pozornie bardziej skomplikowanych potencjałów przytoczone są w paragrafie ósmym.

Gdy współczynniki c_{k0} nie zależą od parametrów p_k równanie (2.2) przybiera następującą postać

$$dp_0 + \sum_k c_{k0} dp_k = 0 . \tag{5.1}$$

Wybierając warunek początkowy $p_\mu = p_\mu^*$ po scałkowaniu separujących się wszystkich składników równania (5.1) otrzymamy następujące równanie stanu:

$$p_0 - p_0^* + \sum_k c_{k0}\left(p_k - p_k^*\right) = 0 , \tag{5.2}$$

czy, po pomnożeniu (5.2) przez π_0

$$\sum_\mu \pi_\mu \left(p_\mu - p_\mu^*\right) = 0 .$$

Równanie (5.1) możemy interpretować jako równanie bilansu przepływów dóbr opisującego koszyk N+1 dóbr. Występują one w koszyku odpowiednio w ilościach $p_0, \ldots, p_N$. Jeżeli dodatnie środki p_μ symbolizują aktywa, to ujemne wartości p_μ dotyczą zobowiązań (bądź odwrotnie). Niech ceny rynkowe określa relacja wymiany dóbr rynkowych na dowolne (zawarte, bądź nie zawarte w koszyku) arbitralnie wyróżnione dobro. Ceny te mają charakter egzogeniczny i nie zależą od parametrów koszyka. Wtedy jednostka μ-tego dobra jest wymieniana za (kosztuje) π_μ jednostek wyróżnionego dobra. Przyjmujemy konwencję, że $p_\mu \in \mathbb{R}$ i $\pi_\mu \in \mathbb{R}_+$, czyli że ceny zawsze są dodatnie (lecz równie dobrze moglibyśmy założyć, że $p_\mu \in \mathbb{R}_+$ i $\pi_\mu \in \mathbb{R}$). Warto w tym miejscu uczynić jedną dygresję. Założenie o niezależności cen od współrzędnych koszyka wydaje się uniwersalne na rynkach zabezpieczonych przed mechanizmami dyktatu cenowego. Jednak wówczas też nic nie przeszkadza konstruować portfeli, których zawartość jest kształtowana w oparciu o zmiany kursów cenowych, a jeżeli p_μ są nietrywialnymi funkcjami π_μ (zob. [11]), to i funkcje odwrotne π_μ zależą od p_μ. Niemożność wpływania na ceny (czy, w słabszym wariancie, ich przewidywania) oznacza, że przyjmując pewien algorytm kształtowania składu koszyka jedynie w zależności od ruchów cenowych tracimy możliwość bezpośredniego (niezależnego od cen) wpływania na wielkości p_μ. Zależność funkcyjna czynników ilościowych nie określa ich wzajemnej relacji przyczynowo skutkowej. Na przykład stwierdzenie: „złoto potroi swą cenę wtedy, gdy stanę się bogaty”, mimo zaskakującej treści, może jedynie oznaczać, że ulokowałem poważną część swojego majątku w tym kruszcu.

Opis koszyka nie ulegnie zmianie, gdy ceny jego dóbr przedstawimy w stosunku do arbitralnie wyróżnionego dobra z koszyka (oznaczanego dalej indeksem zerowym i nazywanego jedynie z tego powodu pieniądzem). Wybór ten oznacza, że potencjałem jest ilość pieniądza w koszyku. Kursy (relatywne ceny) $c_{k0} = \frac{\pi_k}{\pi_0}$ są intensywnościami przepływu pozostałych dóbr w koszyku względem pieniądza. Zbiór intensywności c_{k0} nazwiemy *kursem rynku* względem pieniądza. Gdy koszyk nie jest dziurawy, a rynek jest zrównoważony, to wyznaczona wartość przepływów w ramach koszyka musi bilansować się do zera – strumień pieniądza dp_0 jest skompensowany strumieniem środków niepieniężnych $\sum_k c_{k0} dp_k$. Stwierdza to prawo zachowania strumienia kapitału (5.1) wyrażone w jednostkach pieniężnych.

Wyznaczony w jednostkach pieniężnych bilans aktualnego stanu skumulowanych w koszyku przepływów (bilans środków) przedstawia równanie (5.2).

Równanie stanu (5.2) ma skutkującą ekonomicznymi konsekwencjami symetrię: transformacja skalowania oraz zamiana współrzędnych koszyka z odpowiednimi współrzędnymi cennika

$$\begin{aligned} \lambda p_\mu &\leftrightarrow p_\mu \\ \pi_\mu &\leftrightarrow p_\mu \end{aligned} \tag{5.3}$$

nie zmieniają samego równania. Z tego powodu portfele (będące klasami proporcjonalnych do siebie koszyków) tworzą przestrzeń rzutową $\mathbb{R}\mathrm{P}^{\mathrm{N}}$ [3], a kursy (proporcjonalne cenniki) przestrzeń dualną do niej. Więc modelem dualnym, mającym identyczne własności rachunkowe jak wyżej prezentowany, będzie model opisany równoważnym równaniu (5.1) prawem zachowania wartości portfela

$$dc_{00} + \sum_k p_k dc_{k0} = 0, \tag{5.4}$$

w którym potencjałem c_{00} (wielkość ta nie była jeszcze definiowana) okaże się bieżąca wartość (wartość księgowa, deficyt bilansowy) portfela. Na niepieniężne komponenty portfela możemy spojrzeć jako na intensywności przepływów wartości odpowiednich składników portfela wywołanych ruchami cen.

6. PODWÓJNA KSIĘGOWOŚĆ

Nietrudno zauważyć, że zamiana parametrów fizycznych stanowiąca drugie z przekształceń (5.3) jest inwolucją Legendre'a. Podstawiając bowiem do wyrażenia (4.2) potencjał p_0 określony równaniem stanu (5.2) otrzymamy nowy potencjał o następującej postaci

$$c_{00}(c_{10},\dots,c_{N0}) = -p_0^* + \sum_k c_{k0}\left(p_k - p_k^*\right) - \sum_k c_{k0} p_k ,$$

$$\text{czyli} \qquad c_{00} + p_0^* + \sum_k p_k^* c_{k0} = 0 . \tag{6.5}$$

Ponieważ parametry p_μ^* są teraz stałe (komponenty koszyka nie ulegają zmianie), więc transformatę Legendre'a $c_{00}(c_{10},\dots,c_{N0})$ stanu rezerwuaru pieniężnego portfela $p_0(p_1,\dots,p_N)$ należy w oparciu o równanie (6.5) zinterpretować jako bieżącą wartość koszyka.

Posługując się formułą inwolucji Legendre'a (4.2) dla $p_\mu = p_\mu^*$ i $c_{\mu 0} = c_{\mu 0}^*$ równanie (6.5) możemy zapisać w postaci

$$\left(c_{00} - c_{00}^*\right) + \sum_k p_k^*\left(c_{k0} - c_{k0}^*\right) = 0 . \tag{6.6}$$

Przedstawione w tej postaci równanie stanu jest ewidentnie dualne do (5.2).

Przepiszmy jeszcze raz niezwykle istotną formułę inwolucji Legendre'a (4.2) uwydatniając liczbowe wartości występujących w niej funkcji

$$c_{00} + p_0 + \sum_k p_k c_{k0} = 0 .$$

Z ekonomicznego punktu widzenia równanie to jest **równaniem bilansu koszyka**, które w odróżnieniu od równań stanu (czy ich różniczkowych odpowiedników, tj. praw zachowania przepływów) nie bilansuje względnych zmian (przepływów), lecz wiąże ze sobą absolutne wartości dwóch dualnych względem siebie zestawów parametrów ekonomicznych. Jest ono warunkiem koniecznym zachowania konsystencji pomiędzy różnymi obrazami zmian cenowo-koszykowych, niezależnym od konkretnej postaci praw zachowania. Narzucenie tej spójności stanowi istotę procedury bilansu finansowego. Może nieprzypadkowo twórca podwójnej księgowości Fra Luca Pacioli będąc nauczycielem mistrzów perspektywy stworzył podwaliny dla geometrii rzutowej – teorii, w której centralną rolę gra dwoistość, będąca w powyżej przedstawionym sensie efektem inwolucji Legendre'a. Można wykazać, że dwoistość algebry kredytów, szczegółowo analizowana przez autora w artykule poświęconym klasyfikacji kredytowania [9], stanowi konsekwencję istnienia pewnej szczególnej transformacji Legendre'a. Więc, zgodnie z przedstawionymi tam sugestiami autora, inwolucja owa stanowi efektywne narzędzie odkrywania nieznanych jeszcze metod kredytowania, tworzenia nowych instrumentów finansowych, czy formułowania nieznanych dotąd form warunków ubezpieczeniowych. Głębsze wyjaśnienie geometrycznych aspektów przedstawionego w tym paragrafie tematu jest zawarte w pracy [11].

Zamiast podsumowania rozważań dotyczących modeli o stałych współczynnikach intensywności autor proponuje tabelę zestawiająca wyróżnione obiekty tych dualnych typów przypominając o często ignorowanym relatywizmie przedstawionego obrazu, który jest konsekwencją sytuacji, że dowolne wyróżnione dobro rynkowe zostało nazwane pieniądzem.

OBIEKTY TEORII	STAŁE CENY	STAŁE SKŁADNIKI KOSZYKÓW
Potencjał	zasoby pieniężne koszyka	wartość koszyka
parametry niezależne	niepieniężne składniki koszyka	ceny dóbr wyrażone względem pieniądza
Intensywności	ceny dóbr wyrażone względem pieniądza	niepieniężne składniki koszyka
prawo zachowania	dla przepływów kapitałowych	dla zmian wartości kapitałowych
transformata Legendre'a	wartość koszyka	zasoby pieniężne koszyka
inwolucja Legendre'a	równanie bilansu stanu koszyka	

W niektórych wierszach dualne pozycje mogą wydawać się tożsame. Oprócz samodualnego równania opisującego inwolucję Legendre'a tak nie jest, o czym świadczą dobitnie rachunki zamieszczone w tym paragrafie.

7. ZYSK

Infinitezymalny zysk (stopa zwrotu) z kapitału ulokowanego w koszyku to przyrost wartości portfela wyrażony w stosunku do tej wartości

$$dr_{00} := \frac{dc_{00}}{c_{00}} = sign(c_{00})\ d\ln\left|c_{00}\right| , \tag{7.1}$$

gdzie funkcja $sign(x)$ ma wartość znaku liczby x będącej jej argumentem. Ograniczmy rozważania do takiej części przestrzeni równowagi $\mathcal{B}_{c_{00}}$, na której potencjał c_{00} posiada stały znak. Wtedy stopa zwrotu z koszyka wynosi

$$\int_{c_{00}^*}^{c_{00}} dr_{00} \ = \ r_{00}(c_{00}) - r_{00}(c_{00}^*) \ = \ sign(c_{00})\ \ln\left|c_{00}\right| \ - \ sign(c_{00}^*)\ \ln\left|c_{00}^*\right| .$$

Zysk $r_{00}(c_{00})$, będący tzw. stopą kapitalizacji ciągłej [7], jest określony z dokładnością do stałej (jak każdy potencjał wyznaczający jedynie prawa zachowania przepływów). Korzystając z prawa (5.4) otrzymamy następujący wynik

$$dr_{00} = -\sum_k \frac{p_k}{c_{00}} dc_{k0} ,$$

czyli

$$dr_{00} + \sum_k \frac{p_k}{c_{00}} c_{k0} dr_{k0} = 0 , \tag{7.2}$$

gdzie stopa $dr_{k0} := \frac{dc_{k0}}{c_{k0}}$, określona analogicznie jak w definicji (7.1), jest stopą zmiany ceny k-tego dobra wyrażanej w pieniądzu.

Równania (7.2) nie można nazwać prawem zachowania stopy zwrotu gdyż, zgodnie z założoną postacią każdego prawa zachowania, intensywności $w_k := p_k \frac{c_{k0}}{c_{00}}$ nie powinny być funkcjami wartości koszyka c_{00}.

Oczywiście, wewnątrz obszaru $\mathcal{B}_{c_{00}}$, gdzie potrafimy wyrugować potencjał c_{00} z wyrażeń określających „intensywności" w_k, równanie (7.3) będąc na $\mathcal{B}_{c_{00}}$ tożsamością, przybierze postać przypominającą (2.2). Nazwiemy tego typu „prawo zachowania" *kwaziprawem*, – jest ono tożsamościowo spełnione na hiperpowierzchni $\mathcal{B}_{c_{00}}$, lecz jej nie wyznacza. Konsekwentnie stopę zwrotu z koszyka r_{00} powinniśmy w tym modelu nazwać *kwazipotencjałem*, a współczynniki w_k *kwaziintensywnościami*, które są *kwazisprzężone* względem odpowiednich stóp zmian cenowych r_{k0}. Na podstawie kwaziprawa możemy wyznaczyć zysk osiągnięty przez posiadacza koszyka p_μ. Nie potrafimy jednak określić hiperpowierzchni stanu równowagi $\mathcal{B}_{c_{00}}$, ani – posługując się inwolucją Legendre'a – dualnej do niej przestrzeni $\mathcal{B}_{p_0}$.

Jednak, dzięki naszej wiedzy o przekształceniu Legendre'a, możemy otrzymać dualne do (7.3) (nie kwazidualne) kwaziprawo o następującej postaci

$$dr_0 + \sum_k \frac{p_k}{p_0} c_{k0} dr_k = 0 , \tag{7.3}$$

gdzie

$$dr_\mu := sign(p_\mu)\ d\ln|p_\mu| .$$

Jest ono tożsamościowo spełnione na hiperpowierzchni $\mathcal{B}_{p_0}$. Równanie (7.2) można interpretować jako formułę przedstawiającą zysk kredytodawcy r_{00} wynikający z niewielkiej modyfikacji wysokości stóp dyskontowych związanych z kolejnymi N okresami zwrotu rat zadłużenia. Natomiast (7.3) traktujemy np. jako wzór na stopę wzrostu r_0 kwoty kredytu (udzielonego w wysokości p_0), gdy nieznacznie ulegają zmianie wysokości kolejnych rat spłaty p_k mierzone stopami r_k, gdzie zmienne oprocentowanie kredytu wyrażają czynniki dyskontowe c_{k0}. Wypisane w tym paragrafie tożsamości mają charakter lokalny, więc są spełnione niezależnie od wcześniejszego założenia o stałej wartości odpowiednich czynników intensywności. Uwzględniając to założenie możemy wycałkować równania (7.2), (7.3), wstawiając zamiast dualnych pól p_0 i c_{00} odpowiednie równania stanu (5.2) i (6.6). Otrzymamy wtedy następujące wzory będące kwaziodpowiednikami równań stanu

$$r_{00} = r_{00}^{*} + sign(c_{00}^{*}) \ \ln\left| 1 - \sum_k p_k \left(e^{sign(c_{k0}^{*})\left(r_{k0}-r_{k0}^{*}\right)} - 1\right)\right|$$

oraz
$$r_0 = r_0^{*} + sign(p_0^{*}) \ \ln\left| 1 - \sum_k c_{k0} \left(e^{sign(p_k^{*})\left(r_k-r_k^{*}\right)} - 1\right)\right| .$$

W interpretacji dotyczącej kredytu formuły powyższe określają sposób obliczania zysku kredytodawcy i stopy zmiany kwoty kredytu przy wystąpieniu zmian warunków kredytowania na tyle dużych, że nie wystarcza użycie formuł uwzględniających jedynie liniową reakcję na modyfikację parametrów rat spłaty, czy stóp dyskontowych. Nie należy zapominać, że ostatnie wzory są słuszne jedynie w przypadku braku zmiany znaków parametrów cenowych i koszykowych.

Równane określające różniczkę dr_0 (czy dr_{00}) podobnie jak równanie (7.2) (czy (7.3)) może stanowić faktyczne prawo zachowania, ale w modelu innym niż tu omawiany.

8. PODRĘCZNIKOWE PRZYKŁADY

Dla dalszego zobrazowania zastosowania opisanego formalizmu możemy poddać reinterpretacji modele oparte na popularnych w podręcznikach akademickich funkcjach, takich jak funkcja produkcji Cobba-Douglasa, czy funkcja CES [4,14]. Z prezentowanego tam punktu widzenia funkcje te są potencjałami generującymi interesujące gospodarcze prawa zachowania.

Przypomnijmy, że definiujące funkcję produkcji Cobba-Douglasa równanie stanu (2.4) ma postać

$$p_0 - \kappa \ p_1^{\alpha} p_2^{1-\alpha} = 0 ,$$

gdzie $\alpha \in (0,1)$ i $\kappa > 0$ są stałymi parametrami modelu, zmienne p_1 i p_2 wyrażają odpowiednio nakłady kapitału i nakłady pracy, a dualne do nich wielkości c_{10} i c_{20} to krańcowe produktywności (odpowiednio) kapitału i pracy. Przeprowadzając elementarne rachunki łatwo jest zauważyć, że transformaty Legendre'a $\overline{p}_0(c_{10}, p_2)$ i $\overline{p}_0(p_1, c_{20})$ są w równowadze proporcjonalne do wartości produkcji i wynoszą odpowiednio $-(1-\alpha)p_0$ i $-\alpha \ p_0$. Szczególnie prostą postać przyjmuje wtedy potencjał $\overline{p}_0(c_{10}, c_{20})$, gdyż równy jest 0. Przejście do rachunku w logarytmach, polegające na posłużeniu się nowymi zmiennymi

$$p'_{\mu} = \ln p_{\mu} \ , \tag{8.1}$$

$\mu = 0,1,2$, sprowadza model Cobba-Douglasa do rodziny równań termodynamicznych (5.1) o stałych współczynnikach intensywności, którą szczegółowo omówiliśmy w poprzednich paragrafach. Liniową zależność logarytmu wartości produkcji od logarytmów nakładów zwykliśmy określać jako brak możliwości osiągania dodatkowych przychodów będących efektem skali produkcyjnego przedsięwzięcia. Tą właściwość modelu najłatwiej jest dostrzec w równaniu stanu (2.2) dla potencjału p'_0.

Zapisana w formie równania (2.4) funkcja produkcji CES

$$p_0 - \kappa(\alpha \ p_1^{\gamma} + (1-\alpha) \ p_2^{\gamma})^{\frac{1}{\gamma}} = 0 ,$$

gdzie $\gamma \in (0,1)$, pozwala na analogiczną reinterpretację modelu. Tym razem zamiana zmiennych ma postać

$$p'_\mu = p_\mu^\gamma \,, \tag{8.2}$$

$\mu = 0,1,2$.

Znajomość powierzchni więzów w stanie równowagi, tj. otoczenia każdego z punktów podprzestrzeni $\mathcal{B}$, pozwala nam w każdym z dwóch przykładów funkcji produkcji odtworzyć, po przejściu na powrót do pierwotnych współrzędnych, wartość dowolnej, ekonomicznie interesującej wielkości. Tak więc mozolnie studiowane przez adeptów ekonomii modele są w pełni sprowadzalne do prostej, acz pouczającej koncepcji koszyków i cenników. Zawikłane meandry książkowych opisów tych funkcji produkcji są jedynie konsekwencją poruszania się w geometrycznie niezbyt czytelnej konwencji „naturalnych" ekonomicznych współrzędnych. Używając w opisie produkcji jednolitej konwencji współrzędnych „koszyków i cenników"[2] możemy być zaciekawieni powodami, dla których autorzy podręczników ekonomii, symulując realnie istniejące procesy, wyróżniają jedynie dwa rodzaje „naturalnych" parametryzacji w postaci funkcji. (8.1) i (8.2). Niestety, poza pewną prostotą, autor nie doszukał się innego zadowalającego wyjaśnienia tej intrygującej prawidłowości.

9. ZAKOŃCZENIE

Powyżej poddano analizie jedynie lokalne własności pierwszego rzędu dla zanurzeń $\mathcal{B}\to\mathbb{R}^{N+1}$ zdefiniowanych odpowiednim dla wybranego modelu prawem zachowania. Niemniej interesujące są aspekty przestrzeni stanu równowagi zależne od wyrażeń drugiego rzędu względem infinitezymalnych zmian parametrów, na przykład związane ze strukturą metryczną. Dla prawidłowej konstrukcji takiej teorii należałoby szczegółowo zbadać aspekty metryczne popularnych modeli statyki równowagowej. Pewne sugestie jak to robić można odnaleźć w pracy [11], gdzie wykazano naturalność struktur nieeuklidesowych dla geometrycznego opisu modeli ekonomicznych.

Zasady termodynamiki fenomenologicznej zostały wyjaśnione przez wprowadzenie statystycznego opisu zjawisk cieplnych. Istnieje naturalna sposobność podobnego dopełnienia statyki procesów ekonomicznej równowagi o aspekt stochastyczny poprzez nawiązanie do idei kanonicznego rozkładu Gibbsa [1,8]. Takie podejście, w kontekście metody porównywania jakości prognoz inwestorów, którzy działają na różnych rynkach, czy przy różnych poziomach koniunktury, przedstawione zostało w artykule [12][3]. Okazało się ono skuteczne także w badaniu portfeli opartych na dźwigni finansowej [13], które wykazują unikalne cechy[4], niespotykane w ramach opisujących zjawiska termiczne modeli fizycznych. Dalsze uogólnienie tego tematu, polegające na globalnym uzupełnieniu modeli statyki o elementy niepewności odpowiadałoby współczesnemu paradygmatowi naukowemu i rozszerzyłoby zakres stosowalności niedynamicznych modeli w ekonomii. Zagadnienie to wymaga jednak odrębnego potraktowania, dlatego autor zaprezentuje je w innym opracowaniu.

---

[2] czyli takiej, w której równania (2.2) przybierają postać równań (5.1) o stałych współczynnikach

[3] warianty robocze prac [12] i [13] dostępne są w internecie pod adresem: http://alpha.uwb.edu.pl/ep/sj/index.shtml

[4] chodzi tu o konieczność rozszerzenia spektrum temperatur agresywnych portfeli inwestycyjnych na dziedzinę liczb zespolonych, zob. [13]

LITERATURA

[1] Anselm A.I., Podstawy fizyki statystycznej i termodynamiki, PWN, Warszawa 1978.

[2] Arnold W.I., Metody matematyczne mechaniki klasycznej, PWN, Warszawa 1981.

[3] Borsuk K., *Geometria analityczna wielowymiarowa*, PWN, Warszawa 1976.

[4] Chiang A.C., *Podstawy ekonomii matematycznej*, PWE, Warszawa 1994.

[5] *Encyclopaedia of Mathematics on CD-ROM*, Kluwer Academic Publishers,

Dordrecht 1997.

[6] Goldstein H, *Classical mechanics*, Addison-Wesley, 1957. [7] Karpio A., Piotrowski E.W., *Chwilowa stopa procentowa*, Przegląd Statystyczny 46(1999)67-77.

[8] Piotrowski E.W., *O logarytmie*, Penetrator – Wiadomości Gospodarcze 12(1995)34-36.

[9] Piotrowski E.W., *Algebra kredytów*, Przegląd Statystyczny 46(1999)297-313.

[10] Piotrowski E.W., *Zapomniany pierwowzór definicji ryzyka kapitałowego*, w Modelowanie preferencji a ryzyko'99, red. T. Trzaskalik, t.1, AE, Katowice 1999, 337-353.

[11] Piotrowski E.W., *Geometria rynku*, Optimum 1(2000)161-179.

[12] Piotrowski E.W., Sładkowski J., *The Thermodynamics of Portfolios*, Acta Physica Polonica B, 32(2001)597-604.

[13] Piotrowski E.W., Sładkowski J., *What Was the Temperature of the Bagsik Financial Oscillator?*, Physica A, 301(2001)441-448.

[14] Varian H.R., *Mikroekonomia*, PWN, Warszawa 1995.

STRESZCZENIE

Nawiązując do termodynamiki autor przedstawia formalizm statyki procesów równowagi, w którym kluczową rolę odgrywa inwolucja Legendre'a. Między innymi wykazuje, że wartość koszyka kapitałowego jest transformatą Legendre'a jego składnika pieniężnego. Każdemu równowagowemu modelowi towarzyszy dualny do niego odpowiednik. Proponowane ujęcie zawiera kryterium odróżniania prawa określającego stan równowagi od tożsamości wiążących parametry ekonomiczne w równowadze.