Cisi i gracze. Kanoniczne zespoły portfeli

(RePEc:sla:eakjkl:116PL 1-VI-2000)

Edward W. Piotrowski[1]
(Uniwersytet w Białymstoku)

Rechte Waage, rechtes Gewicht, rechter Scheffel
und rechtes Maß sollen bei euch sein[2]

Streszczenie

Autor proponuje reprezentowanie różnych portfeli inwestycyjnych za pomocą równoważnych im z punktu widzenia wysokości generowanego zysku tzw. kanonicznych portfeli urnowych. Ujęcie takie pozwala przenieść bogaty formalizm termodynamiki na będącą także wariantem teorii potencjału statykę równowagi. Pojawia się propozycja nowego sposobu porównywania efektywności portfeli inwestycyjnych.

1. Wstęp

W tle zmieniającego ceny rynku specjaliści zarządzający portfelami inwestycyjnymi odnoszą porażki, bądź sukcesy. Wartość owych poczynań oceniamy zwykle post factum. Wtedy jednak brakuje nam obiektywnego ilościowego miernika jakości ich decyzji, który w sposób poprawny i subtelny różnicowałby wyniki całej gamy „średniaków" dominujących np. na rynku funduszy inwestycyjnych, czy emerytalnych. Potrzeba umiejętnej oceny efektywności inwestowania jest szczególnie istotna, gdy, dla określenia jakości zarządzania portfelem, zamierzamy odnieść się do różnych okresów czasowych. Sukces łatwo jest osiągnąć w dobie koniunktury rynkowej. Przy niesprzyjających warunkach trudno „utrzymać swoje". Jaka część wzrostu wartości kapitału jest jedynie efektem ogólnej prosperity? Jak wyodrębnić zysk zawdzięczany wyłącznie profesjonalizmowi inwestora? Jak zmierzyć spadek czy wzrost

---

[1] ep@alpha.uwb.edu.pl.
[2] Biblia Lutra, Trzecia Księga Mojżeszowa 19,36.

umiejętności analitycznych (czy prognostycznych) konstruującego portfel inwestycyjny, czy porównać jakość sformułowanej przez bank polityki kredytowej w różnych okresach jego działalności?

Dla oceny jakości zarządzania portfelami inwestycyjnymi w praktyce wykorzystuje się miary Sharpe'a, Treynora czy Jensena[3]. Wszystkie one bazują na modelu CAPM, który wymaga spełnienia wielu rygorystycznych i trudnych do zweryfikowania założeń. Ze względu na brak takich ograniczeń, algorytmicznie znacznie łatwiejszą technikę rachunku oraz oparcie w uniwersalnych koncepcjach teorii informacji niżej proponowana metoda wydaje się jakościowo lepszym narzędziem porównawczym. Zamiast bezpośredniej oceny portfela inwestycyjnego autor sugeruje badanie tzw. portfela kanonicznego o takiej samej wartości. Przedstawia formalizm rachunkowy pozwalający wyodrębnić część zmiany wartości portfela, która jest efektem jakości decyzji inwestycyjnej. Rachunek ten stanowi rozszerzenie metod statyki porównawczej na dziedzinę procesów statystycznych. Uzupełnia on metody termodynamiczne zaadoptowane do potrzeb ekonomii[4] o charakterystyczny w dziedzinie fizyki czynnik opisujący wpływ zjawisk chaotycznych na obserwowane zmiany parametrów modeli. Wydaje się, że pojęcie temperatury, zidentyfikowanej przed wiekiem przy pomocy narzędzi statystycznych jako odwrotność odpowiedniego mnożnika Lagrange'a dla zagadnienia maksymalizacji entropii[5], ma równie uzasadnioną rację bytu w statystycznych modelach ekonomicznych. Pojawienie się ciepła w problemach statyki równowagowej pozwala wprowadzić nowe, globalne mierniki stanu modelu dualne np. do wartości użyteczności, czy zysku. Odkrywanie roli tych funkcji (zwanych w tradycji metod matematycznych potencjałami) pozwoli dogłębnie zrozumieć znaczenie statystycznych uogólnień modeli równowagi ekonomicznej.

W nagłówku artykułu autor świadomie dokonał trawestacji tytułu satyry politycznej Janusza Szpotańskiego uważając, że powstałe dzięki temu skojarzenia niezwykle celnie oddadzą specyfikę jego subiektywnych poglądów dotyczących rozpatrywanego niżej tematu.

2. Kim są cisi i gracze?

Załóżmy, że chcemy zmierzyć preferencje specjalisty inwestującego np. w spółki giełdowe. Możemy wyróżnić dwa typy decyzji inwestycyjnych podejmowanych w nie ulegającej zmianom sytuacji zewnętrznej, gdy ustalone są ceny oraz pozostałe parametry gospodarcze. Pierwszą z nich jest decyzja zdeterminowana, będąca jedynie funkcją sytuacji zewnętrznej. Inwestor

[3] E. J. Elton, M. J. Gruber, *Nowoczesna teoria portfelowa i analiza papierów wartościowych*, WIG-Press, Warszawa 1998.

[4] E. W. Piotrowski, *Statyka porównawcza à la thermodynamique. Elementy*, Optimum Nr 3, 2002.

[5] A. Isihara, *Statistical physics*, Academic Press, New York 1971.

działający w ten sposób w jednakowych warunkach zawsze tak samo (mechanicznie) lokuje swój kapitał, rozpraszając go na różnego rodzaju aktywa, bądź nie. Zachowanie to jest w pełni przewidywalne. Odpowiednio zaprogramowany i przyczynowo uwarunkowany automat mógłby zastąpić jednoznacznie działającego specjalistę. Informacja o jego przyszłych decyzjach jest w pełni określona jego wcześniejszymi działaniami. Absorbujący naszą uwagę przekaz, dotyczący tego, co on zamierza zrobić w znanych nam okolicznościach, jest zerowy. Takiego inwestora nazwiemy *cichym*. O jego portfelu powiemy, że zawiera informację zerową, gdyż jest w pełni wyznaczony przez ilości wchodzących w jego skład aktywów kapitałowych.

Prócz zachowań zdeterminowanych, określających portfele o informacji zerowej, możemy mieć do czynienia z decyzjami indeterministycznymi, gdy w jednakowej sytuacji zewnętrznej ten sam inwestor decyduje się na różne posunięcia. Nie zmienia przy tym własnej metody postępowania gdyż my, obserwując jego działanie, nie odnotowujemy żadnych zmian w statystyce jego poczynań. Jednak nie do końca potrafimy przewidywać jego posunięcia, część jego wiedzy nie jest nam dostępna przez samą obserwację jego decyzji inwestycyjnych. Pomiar owej decyzyjnej nieokreśloności wyznacza ilość niedostępnej wiedzy inwestycyjnej. W oparciu o znane zależności pomiędzy statystyką, a termodynamiką jesteśmy w stanie określić ilościowe zasady rządzące wpływem niejednoznaczności decyzji na zyski osiągnięte z portfela kształtowanego przez takiego inwestora, który zasługuje na miano *gracza*. By szczegółowo opisać ową sytuację zdefiniujemy *portfel urnowy*.

3. Portfel urnowy

Rozważmy loterię opartą na generatorze losowym, który z ustalonymi prawdopodobieństwami p_k, $k = 0, \ldots, N$, w kolejnych losowaniach, przejawiających brak jakichkolwiek korelacji, wskazuje numer jednej z $N+1$ urn. Niech wybór k-tej urny oznacza zakup w_k jednostek pewnego dobra rynkowego. Wielkość w_k, ustaloną w konkretnej loterii, będziemy nazywać *wagą* k-tego dobra w portfelu. Nie należy jej mylić z odpowiadającym jej dodatkowym parametrem portfela urnowego, jakim jest prawdopodobieństwo p_k. Specyfikację $N+1$ dóbr objętych losowaniem będziemy nazywać *sektorem rynku*. W dowolnej chwili po losowaniu wartość określonego tym sposobem portfela urnowego wynosi $-c_{00\kappa}$ (użyte w tekście oznaczenia zostały ujednolicone z symbolami występującymi we wcześniejszej pracy[6], przez wzgląd

[6] E. W. Piotrowski, Statyka porównawcza à la thermodynamique. Elementy, Optimum Nr 3, 2002.

na kontynuację pewnych rozpoczętych tam wątków), gdzie $c_{00\kappa}$ spełnia następujące równanie bilansu

$$c_{00\kappa}(c_0,\ldots,c_N)+\sum_{k=0}^{N}[\kappa=k]\cdot c_k\cdot w_k=0\,. \tag{3.1}$$

Symbol κ oznacza zmienną losową przyjmującą wartości równe numerom wylosowanych urn. Nawias $[zdanie]$ ma wartość 1 bądź 0 w zależności od tego, czy *zdanie* nim objęte jest prawdziwe, czy nie. Rachunek posługujący się takimi nawiasami zwany jest konwencją Iversona[7]. Liczby $c_0,\ldots,c_N$ są aktualnymi cenami jednostkowymi dóbr należących do sektora rynku, odniesionymi do ich początkowych wartości pieniężnych. Tak więc dla k-tego dobra mamy $c_k:=\frac{u_k}{\bar{u}_k}$, gdzie u_k jest aktualną ceną tego dobra, a $\bar{u}_k$ jest jego ceną występującą w stanie rynku jaki istniał w chwili losowania (gdy zakupiono składniki portfela). Przy pomocy wagi w_k można wyznaczyć ilość jednostek dobra o numerze k, która wchodzi w skład portfela. Jest ona równa ilorazowi $\frac{w_k}{\bar{u}_k}$.

Przyjmujemy, że jedna z urn (np. zerowa) odpowiada składnikowi pieniężnemu portfela gracza, więc w całym procesie zmieniających się cen mamy $c_0=1$. Wartość oczekiwana wielkości $w_0\cdot[\kappa=0]$ pieniężnego składnika portfela jest transformatą Legendre'a średniej wartości portfela[8]. Spostrzeżenie to pozwala rozwinąć formalizm dualnego (do przedstawionego w tej pracy) opisu portfela urnowego. Jest on przydatny w sytuacjach, gdy przy nie zmieniających się cenach $c_1,\ldots,c_N$ zamierzamy zmodyfikować wielkości poszczególnych wag portfela $w_0,\ldots,w_N$. Można wykazać[9], że ceny u_k, a także względne ceny c_k, są współrzędnymi niejednorodnymi cenników stanowiących punkty N-wymiarowej rzeczywistej przestrzeni rzutowej. Dualne do nich hiperpłaszczyzny portfeli są parametryzowane jednorodnymi współrzędnymi rzutowymi – wagami $w_0,\ldots,w_N$. Momentowi losowania odpowiada następująca postać równania bilansu (3.1):

$$c_{00\kappa}(1,\ldots,1)+\sum_{k=0}^{N}[\kappa=k]\cdot w_k=0\,. \tag{3.2}$$

---

[7] R. L. Graham, D. E. Knuth, O. Patashnik, *Matematyka konkretna*, PWN, Warszawa 1996.
[8] E. W. Piotrowski, *Statyka porównawcza à la thermodynamique. Elementy*, Optimum Nr 3, 2002.
[9] E. W. Piotrowski, *Geometria rynku*, Optimum Nr 1, 2000.

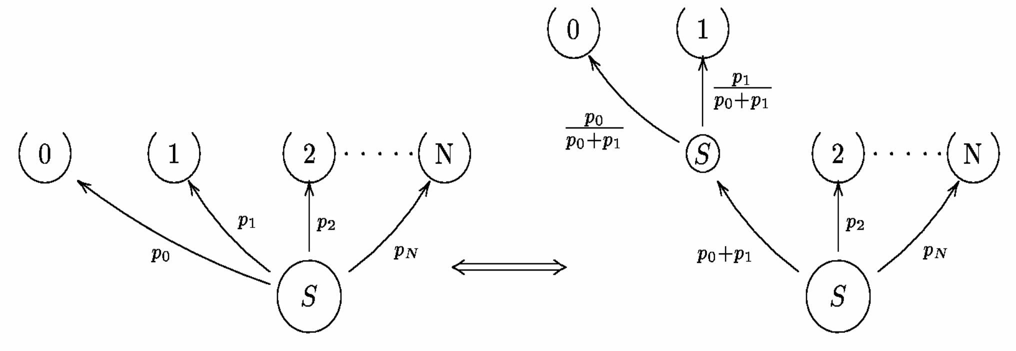
Łatwo zauważyć, że portfel urnowy o wagach $w_0, \ldots, w_N$ i o rozkładzie jednostajnym $p_0 = p_1 = \ldots = p_N = \frac{1}{N+1}$ ma, po dowolnej zmianie cen, wartość oczekiwaną $E(c_{00\kappa})$ równą wartości portfela cichego określonego wagami $\frac{w_0}{N+1}, \ldots, \frac{w_N}{N+1}$ (dla rachunkowej wygody zakładamy doskonałą podzielność dóbr). Warto byłoby eksperymentalnie zbadać jak wielu inwestorów posiadających portfele o takiej strukturze jest de facto zdeterminowanymi cichymi uczestnikami rynku. Może niemała ich część to gracze, których działalność inwestycja przypomina raczej wielokrotnie powtarzany dobór aktywów o wartościach $w_0, \ldots, w_N$ pochodzących z sektora rynkowego, gdy prawdopodobieństwa wyboru każdego z aktywów są jednakowe.

Dla pełnego opisu procesu zmian wartości portfela urnowego określimy teraz entropię portfela, a następnie odniesiemy się do jej zmian spowodowanych ruchem cen rynkowych.

4. Miara informacji o graczu

W prezentowanym opracowaniu będzie nas interesować jedynie ilość informacji bez wgłębiania się w jej aspekty jakościowe. Warto to podkreślić, gdyż w minionych latach odnosiły prestiżowe sukcesy w ekonomii badania nad mechanizmami skłaniającymi do ujawniania informacji[10], zaś mierzenie ilości danych pozostawiono informatykom. Zacznijmy od rozważenia informacji o zachowaniach gracza (czyli o działaniu loterii), która dotyczy części spośród $N+1$ urn. Wystarczy nam analiza sytuacji dotyczącej dowolnych dwóch urn, gdyż poniższe rozumowanie można rozszerzyć metodą indukcyjną na większą ich ilość. Określmy, w jaki sposób miarę takiej ograniczonej informacji należy uwzględnić w mierze dotyczącej całości informacji o graczu. Naturalne jest przyjęcie zasady, że miara informacji o dwóch urnach powinna addytywnie uzupełniać miarę informacji dotyczącej pozostałych urn, z wagą równą sumarycznemu prawdopodobieństwu wylosowania tych urn przez gracza.

[10] S. Wellisz, *Gdy brak pełnej informacji*, Wiedza i Życie 2(1997) cd-rom 1999.
E. W. Piotrowski, *Podział kapitału, czyli o cenie rezygnacji i sile pieniądza*, Optimum Nr 3, 1999.



Taką właściwość miary S, zilustrowaną na powyższym rysunku, możemy zapisać w postaci równania funkcyjnego

$$S(p_0, p_1, p_2, \ldots, p_N) = \\ = S(p_0 + p_1, p_2, \ldots, p_N) + (p_0 + p_1) \cdot S(\frac{p_0}{p_0 + p_1}, \frac{p_1}{p_0 + p_1}) \ , \qquad (4.1)$$

gdzie liczby $p_k = E([k = \kappa])$, $k = 0, \ldots, N$ są prawdopodobieństwami wylosowania k-tej urny. Ze względu na zamieszczone niżej uogólnienie formuły (4.1) załóżmy, że p_k są nieujemnymi liczbami rzeczywistymi ($p_k \in \mathbf{R}_+$), czyli że dziedziną funkcji S jest suma zbiorów $(\mathbf{R}_+)^n$ będących iloczynami kartezjańskimi $\bigcup_{n=1}^{N+1} (\mathbf{R}_+)^n$. Miarę informacji o graczu spełniającą wyżej zobrazowaną własność (4.1) nazywamy *entropią*. W ten sam sposób definiował entropię Claude Shannon – twórca teorii informacji. W jego pracy[11] odnajdziemy liczne pozaformalne, acz fundamentalne, uwagi dotyczące tej funkcji. W przypadku miary regułą jest poszukiwanie rozwiązania równania (4.1), które spełniałoby następującą własność:

$$S(p_0, p_1, \ldots, p_N) = S(p_0) + S(p_1, \ldots, p_N) \, , \qquad (4.2)$$

gdzie funkcje występujące po prawej stronie równania (4.2) nie są miarą pełnej informacji o zachowaniu gracza, lecz jedynie miarą informacji o składnikach jego urnowego portfela (argumenty tych funkcji nie są unormowane do jedności). Dzięki założeniu (4.2) zmienne $p_2, \ldots, p_N$, po odseparowaniu, zostają

[11] C. E. Shannon, *A mathematical theory of communication*, Bell System Techn. J. Nr 27, 1948.

wyeliminowane z równania (4.1), co prowadzi do następującej własności funkcji $S(p)$:

$$S(p_0 + p_1) = \\ = S(p_0) + S(p_1) - (p_0 + p_1) \cdot \left(S(\frac{p_0}{p_0 + p_1}) + S(\frac{p_1}{p_0 + p_1}) \right) . \tag{4.3}$$

Możemy podać szczególną postać równania (4.3) dla $p_0 = p_1 = p$

$$2S(p) - S(2p) = 4p \cdot S(1/2) . \tag{4.4}$$

Podstawiając do formuły (4.4) wartości $p = \frac{1}{2}$ oraz $p = 0$ otrzymamy wartość funkcji informacji dla zdarzeń zdeterminowanych $S(1) = S(0) = 0$. Nie trzeba nic wiedzieć, by przewidzieć rezultat „przemyśleń” cichego. Każda informacja przed jej zdobyciem musi być dla nas tajemnicą, a gdy ją uzyskamy to de facto przestaje być interesującą nas informacją. Z tego powodu, odchodząc nieco od tradycji, entropię powinniśmy nazywać raczej miarą tajemnicy, a nie informacji.

5. Rozwiązanie równania kumulowania informacji

W szczególności zależność (4.4) prowadzi do niejednorodnego równania różnicowego, gdyż przyjmując $p = \frac{1}{2^{k+1}}$ i oznaczając $S_k := S(2^{-k})$ otrzymamy

$$2S_{k+1} - S_k = 2^{1-k} S_1 . \tag{5.1}$$

Przekształcenie

$$\tilde{S}_k := 2^k S_k \tag{5.2}$$

trywializuje równanie (5.1) sprowadzając go do następującej formy

$$\tilde{S}_{k+1} - \tilde{S}_k = \tilde{S}_1 ,$$

która jest popularną rekurencją określającą szereg arytmetyczny o postaci $\tilde{S}_k = k \cdot \tilde{S}_1$. Stosując transformację odwrotną do (5.2) otrzymujemy rozwiązanie rekurencji (5.1) . Tym sposobem mamy następującą jawną postać miary $S(p)$ w punktach $\frac{1}{2^k}$, dla $k = 2,3,\dots$

$$S(2^{-k}) = S_k = k \cdot 2^{-k} \cdot 2S_1 = -2S_1 \cdot 2^{-k} \cdot \log_2 2^{-k} . \qquad (5.3)$$

Po przedłużeniu funkcji (5.3) z dziedziny złożonej z punktów $\frac{1}{2^k}$ na cały odcinek $[0,1]$ dostajemy:

$$S(p) = -2S(1/2) \cdot p \cdot \log_2 p \qquad (5.4)$$

Możemy łatwo sprawdzić, że ma ona własność (4.4). Ogólnymi, a zarazem naturalnymi warunkami wystarczającymi na to, by powyższe rozwiązanie równania (5.1) było jednoznaczne są: ciągłość funkcji $S(p)$ oraz monotoniczny wzrost wartości $S(p_0,\ldots,p_N)\Big|_{p_0=\ldots=p_N=\frac{1}{N+1}}$ na skutek zwiększającej się liczby $N+1$ argumentów[12]. Wstawiając do rekurencji (4.2) postać (5.4) funkcji $S(p)$ otrzymujemy jawne wyrażenie entropii

$$S(p_0, p_1, \ldots, p_N) = -\sum_{k=0}^{N} p_k \ln p_k \qquad (5.5)$$

określonej wcześniej własnością (4.1).

Rozważmy zbiór zdarzeń elementarnych będący iloczynem kartezjańskim dwóch zbiorów złożonych z $N+1$ i $M+1$ zdarzeń elementarnych, wzajemnie niezależnych statystycznie. Wtedy ze wzoru (5.5) bezpośrednio wynika, że entropia rozkładu statystycznego określonego na takim zbiorze jest sumą entropii rozkładów wyznaczonych z osobna dla każdego składnika iloczynu

$$S_{(M+1)\times(N+1)} = -\sum_{k=0}^{M}\sum_{l=0}^{N} p_k p_l' \ln(p_k p_l') = -\sum_{k=0}^{M}\sum_{l=0}^{N} p_k p_l' \ln p_k - \sum_{k=0}^{M}\sum_{l=0}^{N} p_k p_l' \ln p_l' =$$
$$= -\sum_{k=0}^{M} p_k \ln p_k - \sum_{l=0}^{N} p_l' \ln p_l' = S_{M+1} + S_{N+1} .$$

W powyższym sensie entropia posiada własność addytywnośści.

Równanie (4.1), jak każda inna definicja miary, wyznacza funkcję S z dokładnością do dowolnej stałej multiplikatywnej. Ponieważ tematy wiążące się z entropią dotyczą zwykle problemów optymalizacyjnych badanych z pomocą rachunku różniczkowego, dlatego we wzorze (5.5) przyjęliśmy, że wartość stałej

[12] A. Y. Khinchin, *Ponyatie entropii v teorii veroyatnostej*, Uspekhi Mat. Nauk, Nr 8, 1953.

$2S(1/2)=S(1/2,1/2)$ jest równa granicy szeregu anharmonicznego $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots=\ln 2$. Nie wpływając na charakterystykę opisywanych entropią modeli podstawa naturalna logarytmu pozwala otrzymywać najprostszą postać pochodnej tej funkcji. Wzoru (5.5) nie należy mylić z logarytmem funkcji wiarygodności, która jest centralnym obiektem metody największej wiarygodności[13].

6. Entropia koniunkcji niezależnych cech gracza

Nawiązując do addytywności entropii warto zwrócić uwagę, że definiujące entropię równanie (4.3) można traktować jako jej własność, określoną za pomocą warunku Leibniza[14], znanego z wyznaczania pochodnej iloczynu funkcji:

$$S(p\cdot q)=p\cdot S(q)+q\cdot S(p)\ . \tag{6.1}$$

Korzystając z tego warunku uzyskamy następujące równanie funkcyjne:

$$\begin{aligned}S(p_0,p_1)&=S(p_0)+S(p_1)=S(\frac{p_0}{p}\cdot p)+S(\frac{P_1}{p}\cdot p)=\\&=\frac{p_0+p_1}{p}S(p)+p\cdot\left(S(\frac{p_0}{p})+S(\frac{p_1}{p})\right)\ ,\end{aligned} \tag{6.2}$$

które, przy dowolnym parametrze $p\in\mathbf{R}_+$, stanowi uogólnienie równania (4.3), gdyż tamto otrzymamy z (6.2) po narzuceniu więzu $p_0+p_1=p$. W przypadku warunku Leibniza problem unikalności rozwiązania (5.5) jest prostszy. Oznaczając

$$f(x):=\frac{S(e^x)}{e^x} \tag{6.3}$$

sprowadzamy (6.1) do funkcyjnego równania liniowego

$$f(x_0+x_1)=f(x_0)+f(x_1)\ ,$$

[13] G. C. Chow, *Ekonometria*, PWN, Warszawa 1995.
[14] *Encyclopaedia of Mathematics on cd-rom*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht 1997.

którego wszystkie rozwiązania, w klasie funkcji ciągłych, mają postać $f(x) = c \cdot x$, gdzie c jest stałą[15]. Funkcja $S(p)$ wyraża się przy pomocy funkcji $f(x)$ zdefiniowanej równaniem (6.3) następująco:

$$S(p) = p \cdot f(\ln p) = c \cdot p \cdot \ln p \quad ,$$

co prowadzi do formuły (5.5) stanowiącej jawny wzór na entropię. Ciągłość funkcji $S(p)$ jest teraz wystarczającym warunkiem istnienia jednoznacznego (z dokładnością do stałej multiplikatywnej) rozwiązania równania (6.1) w postaci wzoru (5.5). Warunek Leibniza (6.1) możemy zinterpretować jako własność miary tajemniczości portfela gracza, określający sposób jej wyznaczenia w sytuacjach, gdy jego składnik jest wskazywany przez koniunkcję dwóch losowo niezależnych czynników, występujących z prawdopodobieństwami odpowiednio p i q. Interesującą interpretację wynikającego stąd uogólnienia przedstawionego graficznie warunku (4.3) w postaci wzoru (6.2) autor pozostawia wyobraźni czytelnika.

7. Kanoniczny portfel urnowy

Chcąc mierzyć poziom niewiedzy (czy dezorientacji) inwestora musimy odnieść jego wynik inwestycyjny do rezultatów uzyskanych przez innych uczestników gry rynkowej. Dlatego pogrupujemy inwestorów w klasy cechujące się jednakową wartością ich portfeli. Pozwoli to przeprowadzić w następnym paragrafie dekompozycję zmian wartości szczególnego portfela-reprezentanta klasy na część będącą efektem zmiany wiedzy inwestycyjnej, oraz resztę powstałą jedynie na skutek zmiany koniunktury rynkowej manifestującej się ruchem cen. Dla reprezentowania klasy inwestora wybierzmy, spośród portfeli urnowych osiągających na zmianach kursów rynkowych jednakowe zyski, portfel o takich prawdopodobieństwach wylosowania poszczególnych urn, aby ich łączna entropia była maksymalna, czyli by tajemnica dotycząca potencjalnego wyniku losowania była możliwie największa. Obserwator takiej loterii niczego nie docieknie prócz informacji o oczekiwanej wartości osiągniętego na jej podstawie wyniku finansowego. Zakładamy brak korelacji pomiędzy wynikami losowań oraz efektywność samego rynku. Wartości zmiennej losowej κ raczej nie symbolizują pojedynczych dóbr (które mogą być skorelowane np. ze względu na wspólną branżę, czy zależności kapitałowe), lecz odpowiadają wzajemnie zortogonalizowanym, rzeczywistym kombinacjom liniowym jednostek tych dóbr, tj. ortogonalnym koszykom[16]. Owa ortogonalizacja opiera się na iloczynie skalarnym zadanym macierzą korelacji notowań cenowych dla dóbr rynkowych.

[15] zob. G. M. Fichtenholz, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, PWN, Warszawa 1972.
[16] E. W. Piotrowski, *Geometria rynku*, Optimum Nr 1, 2000.

Reasumując, poszukujemy ekstremum funkcji $S(p_0,\dots,p_N)$ o unormowanych do jedynki prawdopodobieństwach $\sum_{k=0}^{N} p_k = 1$ i przy ustalonej wartości portfela[17]:

$$-c_{00}(c_0,\dots,c_N) = E(\sum_{k=0}^{N}[\kappa = k]\cdot c_k \cdot w_k) \ .$$

Jest to osłabiony warunek bilansu (3.1). Zamiast ścisłego spełnienia równania (3.1) wymagamy, aby było ono spełnione dopiero na poziomie wartości oczekiwanych. Głębszą analizę poprawności takiego postępowania można znaleźć w pracy autora[18], w związku z analizą ekonomicznego odpowiednika trzeciej zasady dynamiki w postaci popularnego stwierdzenia o rynkach finansowych, głoszącego nieistnienie zjawiska darmowego obiadu (*no free lunch theorem*). Stosując metodę Lagrange'a wyznaczania ekstremum warunkowego[19] znajdujemy warunki zerowania się następującej formy różniczkowej

$$dS(p_0,\dots,p_N) + \beta\cdot dE(\sum_{k=0}^{N}[\kappa = k]\cdot c_k \cdot w_k) + \gamma\cdot d\sum_{k=0}^{N} p_k =$$

$$= \sum_{k=0}^{N}\left(-\ln p_k - 1 + \beta\cdot c_k \cdot w_k + \gamma\right)\cdot dp_k = 0 \ ,$$

gdzie β i γ są *mnożnikami Lagrange'a*. Z powyższej równości wynika, że przy dowolnych niezależnych przyrostach dp_k sumy $-\ln p_k - 1 + \beta\cdot c_k \cdot w_k + \gamma$ powinny znikać dla $k = 0,\dots,N$. Przekształcając równanie

$$-\ln p_k - 1 + \beta\cdot c_k \cdot w_k + \gamma = 0$$

otrzymujemy jawną zależność prawdopodobieństw p_k (cechujących portfel urnowy o maksymalnej entropii) od cen c_k

$$p_k = e^{\beta\cdot c_k \cdot w_k + \gamma - 1} ,$$

którą możemy zapisać w poniższy sposób, eliminując mnożnik γ przez wprowadzenie warunku unormowania

[17] por. (3.1).
[18] E. W. Piotrowski, Zapomniany pierwowzór definicji ryzyka kapitałowego, w Modelowanie preferencji a ryzyko'99, t.1, prace naukowe AE, Katowice 1999.
[19] *Słownik matematyki i cybernetyki ekonomicznej*, PWE, Warszawa 1985.

$$p_\kappa(c_0,\ldots,c_N)=\frac{e^{\beta\sum_{k=0}^{N}[\kappa=k]c_k\cdot w_k}}{\sum_{k=0}^{N}e^{\beta\cdot c_k\cdot w_k}}\ .$$

Powyższy rozkład prawdopodobieństwa w literaturze fizycznej nosi nazwę *rozkładu Gibbsa*[20]. W tym miejscu warto zrobić dygresję. Otóż nieco bardziej skomplikowana postać rozkładu prawdopodobieństwa pojawia się w przypadku uwzględnienia w bilansie portfela kosztów związanych z operacją zmiany jego struktury (która wymaga kupna, bądź sprzedaży dóbr). Otrzymujemy wtedy model statystyczny izomorficzny z jednowymiarowem łańcuchem Isinga cząstek o spinie $s=\frac{N}{2}$ w zmiennym polu magnetycznym[21]. Model Isinga[22] odegrał ważką rolę w rozwoju fizyki statystycznej ze względu na jego związki ze zjawiskami zmian nieciągłych (tzw. przejścia fazowe).

Zysk inwestora określa jedynie sumaryczna wartość oczekiwana składników jego portfela. Inwestorzy o których niczego nie wiemy prócz tego, że osiągnęli jednakowy wynik tworzą tzw. *kanoniczny zespół statystyczny*[23], stanowiący analogon podstawowego narzędzia używanego do opisu zjawisk fizycznych. W tym zespole mieści się także inwestor cichy, jeśli osiągnął zysk charakteryzujący zespół. Zespół kanoniczny opisywany urnowym portfelem o maksymalnej entropii (dlatego nazywany jest *portfelem kanonicznym*) charakteryzuje się rozkładem prawdopodobieństw $p_0,\ldots,p_N$ reprezentującym wszystkie algorytmy inwestycyjne – tak cichych (deterministyczne), jak i graczy (stochastyczne) – prowadzące do tego samego sukcesu rynkowego (w postaci osiągniętego zysku). Wskazanie innego reprezentanta tej klasy faworyzowałoby którąś z urn (czyli odpowiadające jej dobro inwestycyjne), zaś nasza informacja o takim zespole statystycznym byłaby większa (zmniejszyłaby się wartość entropii reprezentanta). Odwrotność mnożnika β nazywamy *temperaturą* zespołu kanonicznego[24] $T=\frac{1}{\beta}$. Portfel kanoniczny ma przy dowolnych cenach

[20] A. Isihara, *Statistical physics*, Academic Press, New York 1971.
[21] E.W. Piotrowski, *O logarytmie*, Penetrator Nr 12, 1995.
[22] R. P. Feynman, *Wykłady z mechaniki statystycznej*, PWN, Warszawa 1980.
[23] A. Isihara, *Statistical physics*, Academic Press, New York 1971.
K. Zalewski, Wykłady z termodynamiki fenomenologicznej i statystycznej, PWN, Warszawa 1978.
K. Huang , Mechanika statystyczna, PWN, Warszawa 1978.
[24] A. Isihara, *Statistical physics*, Academic Press, New York 1971.
K. Zalewski, *Wykłady z termodynamiki fenomenologicznej i statystycznej*, PWN, Warszawa 1978.

rynkowych taką wartość oczekiwaną $E(c_{00\kappa})$, jak wartość portfela cichego o składnikach $w_{0c}, w_{1c}, \ldots, w_{Nc}$, gdzie

$$w_{kc} = w_k \frac{e^{\beta \cdot c_k \cdot w_k}}{\sum_{k=0}^{N} e^{\beta \cdot c_k \cdot w_k}} \; .$$

Odpowiedniość ta stanowi uogólnienie rozważań kończących trzeci paragraf tego opracowania. Łatwo możemy się przekonać, że omawiany w tamtym miejscu portfel urnowy, o jednakowo prawdopodobnych komponentach, odpowiada portfelowi kanonicznemu z zerową wartością mnożnika Legendre'a β (niżej zostanie wykazane, że T jest ceną, więc punkty dla których $T = \pm\infty$ są punktami niewłaściwymi przestrzeni rzutowej).

Można zauważyć, że wartość oczekiwaną $E(c_{00\kappa})$ otrzymamy różniczkując względem mnożnika β funkcję tworzącą dla momentów rozkładu Gibbsa $\ln Z$ (gdzie $Z(c_0, \ldots, c_N, T) := \sum_{k=0}^{N} e^{\beta \cdot c_k \cdot w_k}$ nazywamy *sumą statystyczną*[25]), czyli

$$\begin{aligned} -c_{00} &:= -E(c_{00\kappa}) = \frac{\partial}{\partial \beta} \ln \sum_{k=0}^{N} e^{\beta \cdot c_k \cdot w_k} = \frac{\sum_{k=0}^{N} c_k \cdot w_k \cdot e^{\beta \cdot c_k \cdot w_k}}{\sum_{k=0}^{N} e^{\beta \cdot c_k \cdot w_k}} = \\ &= E(c_\kappa \cdot w_\kappa) = E(\sum_{k=0}^{N} [\kappa = k] \cdot c_k \cdot w_k) = \sum_{k=0}^{N} \overline{w}_k \cdot c_k \quad , \end{aligned} \tag{7.1}$$

gdzie symbol $\overline{w}_k$ oznacza przeciętną ilość k-tego dobra w portfelu kanonicznym.

Nawiązując do teorii informacji można wykazać, że entropia (5.5) jest proporcjonalna do minimalnej długości (czyli złożoności) zapisu komputerowego zawierającego informację o portfelu urnowym, zapisu który został skompresowany przy pomocy algorytmu zachłannego zwanego kodowaniem Huffmana[26]. Maksymalną złożoność potencjalnie możliwych wyników loterii, które prowadzą do jednakowej wartości oczekiwanej portfela określa entropia rozkładu Gibbsa. Dlatego rozsądnym będzie założenie, że jest ona stochastyczną miarą osiągalności (dostępności, powszechności, ilości różnych algorytmów konstruowania portfela) takiej a nie innej wartości portfela, a co za tym idzie –

---

[25] A. Isihara, *Statistical physics*, Academic Press, New York 1971.
[26] T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest, *Wprowadzenie do algorytmów*, WN-T, Warszawa 1997.

miarą zdezorientowania posiadaczy portfeli o tej wartości. Inwestorzy kierują się w swoich decyzjach tajemniczymi przesłankami, które przypominają nam wyniki pewnej loterii, a o ilości takich różnorodnych, choć przeciętnie jednakowo korzystnych wyników dowiadujemy się z pomiaru entropii loterii. Maksymalna entropia portfela oznacza także maksymalną dywersyfikację ryzyka kapitałowego. W tym kontekście problem rozproszenia ryzyka okazuje się zagadnieniem minimaksowym. Jest tak, gdyż inwestor unikający niebezpieczeństw powinien wybierać portfel, który z punktu widzenia ewolucji czasowej jest najmniej „rozchwiany” (najtrudniej osiągalny[27]) jednocześnie będąc wyjątkowo łatwo osiągalnym ze względu na maksymalizację jego entropii (określonej dla ustalonych wag $w_0, \ldots, w_N$, przyjętych dla kolejnych dóbr sektora rynkowego).

8. Zmiany zysku kanonicznych zespołów statystycznych

Wartość portfela pozostaje stała przy zmianie cen jedynie w klasie portfeli urnowych o stałej entropii, które posiadają szczególne znaczenie dla geometrycznego opisu rynku[28]. Portfele te wykazują zachowanie współzmiennicze z kursem cen rynkowych, bowiem wielkości w_k pozostają odwrotnie proporcjonalne do cen c_k. Nie zmieniająca się wartość takiego portfela nie oznacza, że osiągany z niego zysk jest zerowy. Formułę pozwalającą wyliczyć zysk z portfela współzmienniczego odnajdziemy w przeprowadzonym studium geometrii rynku[29]. Gdy wagi w_k nie podlegają modyfikacjom, to ruch cen implikuje zmianę wartości oczekiwanej portfela urnowego o rozkładzie Gibbsa. Jej infinitezymalny przyrost określimy wyznaczając odpowiednią różniczkę

$$- dc_{00}(c_0, \ldots, c_N) = dE(c_\kappa \cdot w_\kappa) \,.$$

Ponieważ

$$S = -\sum_{k=0}^{N} p_k \ln p_k = \ln Z - \beta \cdot E(c_\kappa \cdot w_\kappa) \qquad (8.1)$$

więc różniczka entropii rozkładu Gibbsa ma postać

[27] w sensie opisanym w pracy E. W. Piotrowski, *Osiągalność instrumentu finansowego, a ryzyko kapitałowe*, wysłane do druku w Przeglądzie Statystycznym.
[28] E. W. Piotrowski, *Geometria rynku*, Optimum Nr 1, 2000.
[29] E. W. Piotrowski, *Geometria rynku*, Optimum Nr 1, 2000.

$$dS = \frac{\beta \sum_{k=0}^{N} w_k e^{\beta \cdot w_k \cdot c_k} dc_k}{Z} - \beta \cdot dE(c_\kappa \cdot w_\kappa) =$$

$$= \beta \cdot \left(\sum_{k=0}^{N} E([\kappa = k] \cdot w_k) \cdot dc_k - dE(c_\kappa \cdot w_\kappa) \right) .$$

Stąd otrzymujemy następującą zależność

$$dc_{00}(c_0, \ldots, c_N, S) + \sum_{k=0}^{N} \overline{w}_k \cdot dc_k = T \cdot dS \ , \tag{8.2}$$

gdzie entropię S, charakteryzującą zespół kanoniczny, potraktowaliśmy jako zmienną niezależną. Dlatego formuła (8.2) ma ogólniejszy charakter niż wynikałoby to z założeń, jakie przyjęliśmy w celu jej wyprowadzenia. Na postawie równania (8.2) możemy zdefiniować temperaturę T w ramach statyki równowagowej[30] (czynnik $\beta = \frac{1}{T}$ określa temperaturę dopiero na poziomie stochastycznym). Wyrażając różniczkę wartości portfela dc_{00} przez różniczki argumentów funkcji c_{00} zauważamy, że

$$T = \left. \frac{\partial c_{00}}{\partial S} \right|_{c_k = \text{constans}} . \tag{8.3}$$

Temperatura T wyznacza intensywność zmiany wartości portfela kanonicznego spowodowaną zmianą jego entropii. Równanie (8.2) jest odpowiednikiem pierwszej i drugiej zasady termodynamiki. W kontekście opisu zachowania się zespołu kanonicznego inwestorów treść owych zasad przybiera następującą postać:

I zasada zespołu kanonicznego: *Wzrost wartości portfela kanonicznego* $-dc_{00}$ *jest sumą dwóch składników. Pierwszym jest przyrost wartości wiedzy inwestora* δQ*, a drugim – wzrost wartości przeciętnych poziomów dóbr w portfelu spowodowany ruchem cen w sektorze rynkowym*.

$$dc_{00} + \delta Q + \sum_{k=0}^{N} \overline{w}_k \cdot dc_k = 0 .$$

---

[30] E. W. Piotrowski, *Statyka porównawcza à la thermodynamique. Elementy*, Optimum Nr 3, 2002.

II zasada zespołu kanonicznego: *Wartość* $-\delta Q$ *utraconej wiedzy inwestora o sektorze rynku jest proporcjonalna do wzrostu entropii (dezorientacji) zespołu kanonicznego, do którego on należy*

$$\delta Q + T \cdot dS = 0 .$$

Użycie oznaczenia δQ (zamiast narzucającego się dQ) jest konieczne, gdyż forma różniczkowa δQ nie jest różniczką żadnej funkcji. W fizyce wielkości $-dc_{00}$, δQ oraz $\sum_{k=0}^{N} \overline{w}_k \cdot dc_k$ odnoszą się odpowiednio do: zmiany energii wewnętrznej układu, wchłoniętego przez niego ciepła i wykonanej nad nim pracy. W powyższym sensie w standardowej ekonomicznej statyce równowagi rozważano dotychczas jedynie procesy adiabatyczne[31], czyli takie, dla których model ekonomiczny nie zmieniał swojej zawartości informacyjnej $\delta Q = dS = 0$.

Ujednolicając interpretację wyrażeń występujących w łączącym powyższe dwie zasady równaniu (8.2) dochodzimy do wniosku, że wielkość $-T$ należy odczytywać jako cenę (koszt) jednostki entropii (dezorientacji). W portfelu kanonicznym jednostkowy wzrost dezinformacji S kosztuje T jednostek pieniężnych. Entropia portfela kanonicznego monotonicznie rośnie wraz ze wzrostem wartości bezwzględnej parametru T. Oznacza to, że zdezorientowanym inwestorom za błędy tej samej miary przychodzi płacić wyższą cenę aniżeli specjalistom. Jednak w przypadku temperatur ujemnych największe zyski z błędnych decyzji odnoszą nowicjusze. Portfel kanoniczny specjalisty (mała wartość S) o ujemnej temperaturze przynosi ponadprzeciętne straty. Jednak może go skonstruować jedynie specjalista wykorzystujący swe umiejętności à rebours. Po zmianie znaków wag w_k (która oznacza zajęcie pozycji krótkiej w aktywach portfela) portfel ów staje się źródłem nieprzeciętnych zysków. Czym wyższa jest klasa umiejętności specjalisty, tym mniejszą entropię i mniejszą wartość bezwzględną temperatury (ceny dezinformacji) ma jego zespół kanoniczny. Dzięki własności addytywności entropia rośnie liniowo wraz ze wzrostem wielkości sektora rynkowego (tak zachowujące się parametry termodynamiczne nazywamy ekstensywnymi[32]). Ponieważ temperatura portfela złożonego, zbudowanego z dwóch portfeli o jednakowej temperaturze, lecz operujących na różnych sektorach rynkowych, równa jest temperaturze jego składników (czyli T ma, jak każda inna cena, własność parametru

[31] K. Zalewski, Wykłady z termodynamiki fenomenologicznej i statystycznej, PWN, Warszawa 1978.
[32] K. Zalewski, *Wykłady z termodynamiki fenomenologicznej i statystycznej*, PWN, Warszawa 1978.

intensywnego[33]), więc lepiej od entropii nadaje się do liczbowej charakterystyki umiejętności specjalisty od inwestowania.

9. Zrównoważone zespoły kanoniczne

Określając portfel kanoniczny w oparciu o jego wartość posiadamy swobodę w wyborze wag w_k. Zgodnie z ideą prawdopodobieństw apriorycznych Bayesa[34] dla reprezentowania portfela cichego należałoby wybrać rozkład kanoniczny z wagami w_k odpowiadającymi wagom jego portfela, gdyż wtedy prawdopodobieństwa p_k portfela kanonicznego byłyby jednakowe ($T=\pm\infty$). Wydaje się jednak, że bardziej ogólne, a zarazem wolne od subiektywizmu decyzji cichego, jest przyjęcie nie równych prawdopodobieństw, lecz równych apriorycznych wag portfela kanonicznego $w_0=\ldots=w_N=1$. Możemy także, wzorując się na konstrukcji większości indeksów giełdowych, przyjąć zbiór wag o postaci $w_0=0$, $w_1=\ldots=w_N=1$, eliminując tym samym walutę z sektora rynkowego. Ten rodzaj urnowych portfeli kanonicznych nazwiemy *portfelami zrównoważonymi* (z walutą, bądź bez). Stosowanie portfeli zrównoważonych do pomiaru jakości inwestowania (przez wyznaczenie temperatury portfela zrównoważonego, która odpowiada osiągniętej wartości portfela inwestora) wydaje się najbardziej obiektywną metodą klasyfikowania umiejętności lokowania kapitału.

W przypadku znajomości danych o bieżącej wielkości wymiany handlowej można zaproponować alternatywny wybór portfela kanonicznego. Skala obrotu towarem określa średni stopień zainteresowania nim, co wyróżnia portfele o wagach w_k równych odpowiednim wartościom obrotu rynkowego dobrem typu k w chwili początkowej (odpowiadającej cenie $\overline{u}_k$).

10. Nieznane rynkowe potencjały termodynamiczne

Wykorzystując odpowiednią inwolucję Legendre'a[35] sytuację inwestora rynkowego, zamiast wartością portfela, możemy opisywać potencjałem zależnym jedynie od cen (łącznie z temperaturą). Przez analogię do używanego w zastosowanym tu formalizmie nazewnictwa określmy ten potencjał mianem *wartości swobodnej* $-F$ portfela kanonicznego. Ma on postać

[33] K. Zalewski, Wykłady z termodynamiki fenomenologicznej i statystycznej, PWN, Warszawa 1978.
[34] H. Steinhaus, *Podstawy kontroli statystycznej*, Zastosowania Matematyki 1(1953)4-27.
[35] E. W. Piotrowski, *Statyka porównawcza à la thermodynamique. Elementy*, Optimum Nr 3, 2002.

$$F(c_0,\ldots,c_N,T) \coloneqq c_{00}(c_0,\ldots,c_N,S) - T\cdot S \ .$$
(10.1)

Z powodu własności (8.3) prawa strona powyższej definicji nie zależy od entropii S. Po wyznaczeniu różniczki wartości swobodnej $-F$ dochodzimy do wniosku, że wyrażone przy pomocy tego potencjału zasady zespołu kanonicznego (równoważne zasadom podanym w paragrafie 8) przybierają postać następującego równania bilansu

$$dF(c_0,\ldots,c_N,T) + S\cdot dT + \sum_{k=0}^{N} \overline{w}_k \cdot dc_k = 0 \ .$$
(10.2)

Mnożąc strony formuły (8.1) przez T i porównując wynik z definicją (10.1) zauważymy, że wartość swobodna portfela wyraża się w prosty sposób przez zdefiniowaną w paragrafie 7 sumę statystyczną Z

$$F + T\cdot \ln Z = 0 \ . \tag{10.3}$$

Dzięki powyższej tożsamości suma statystyczna uzyskuje naturalną interpretację rynkową: jej logarytm jest wartością swobodną $-F$ portfela kanonicznego, wyrażoną w aktualnych jednostkach kosztu T dezorientacji kanonicznego zespołu inwestorów. Wyrażając to samo za pomocą mnożnika β możemy stwierdzić, że wartość swobodna $-F$ jest wartością funkcji $\ln Z(\beta)$ przypadającą na jednostkę jej argumentu:

$$-F = \frac{\ln Z}{\beta} \ .$$

W związku z powyższym warto zauważyć ciekawą symetrię własności sumy statystycznej związaną z inwolucją $c_{00} \leftrightarrow F$. Na podstawie tożsamości (7.1) transformata Legendre'a wartości swobodnej, tj. wartość portfela $-c_{00}$, jest wielkością krańcową dla $\ln Z(\beta)$:

$$-c_{00} = \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \ .$$

Trafność użycia nazwy „wartość swobodna” dla potencjału $F(c_0,\dots,c_N,T)$, przyjętej ze względu na zaproponowaną przez Helmholtza podobnie brzmiącą nazwę fizycznego odpowiednika tej funkcji[36], uzasadnimy w oparciu o wariant zasad zachowania portfeli kanonicznych sformułowany w postaci równania (10.2). Załóżmy, że w trakcie procesu, którym steruje rynek poprzez reorientację wartości parametrów cenowych c_k zgodną z bilansem (10.2), klasa specjalisty-reprezentanta zespołu kanonicznego pozostaje stała ($T = \mathrm{constans}$). Wtedy swobodną (od skutków wyjścia z klasy inwestycyjnej) zmianę wartości przeciętnych stanów dóbr w portfelu $\sum_{k=0}^{N} \overline{w}_k \cdot dc_k$ mierzy zmiana potencjału F (a nie zmiana wartości portfela c_{00}). Obrazujące przebieg takiego procesu izokwanty powinniśmy nazywać *izotermami*, gdyż odnoszą się do sytuacji spełniających warunek $T = \mathrm{constans}$.

Stosując regułę de l'Hospitala w celu wyliczenia granicy wyrażenia (10.3) dla portfela zrównoważonego z walutą można się przekonać, że wartość swobodna $-F$ zmierza dla $T \to 0$ do wartości portfela c_{00}. Gdy $T \to^{+} 0$ wartość c_{00} osiąga względną cenę $c_k = \dfrac{u_k}{\overline{u}_k}$ dobra o największym wzroście wartości rynkowej (jeśli ceny wszystkich dóbr sektora spadły względem waluty, to jest to cena $c_0 = 1$):`

$$-\lim_{T\to 0} F = -\lim_{T\to 0} c_{00} \ ,$$

$$-\lim_{T\to^{+}0} c_{00} = \max(c_0,\dots,c_N) \ .$$

Ostatnia własność jest dobitnym argumentem za wyróżnieniem znaczenia portfeli zrównoważonych w klasie portfeli kanonicznych. W pełni zorientowany w trendach rynkowych inwestor, zdeterminowany jak nikt inny, bo nic nie stanowi dla niego tajemnicy ($S = 0$), powinien osiągać w interesującym go sektorze rynku najwyższe z możliwych zyski. Funkcja $c_{00}(T)$ posiada nieciągłość w temperaturze $T = 0$. Lewostronna granica tej funkcji w zerze wynosi

$$-\lim_{T\to^{-}0} c_{00} = \min(c_0,\dots,c_N) \ .$$

Nieprzypadkowo w topologii parametru T najgorszy portfel sąsiaduje z portfelem najdroższym – wiedza ich posiadaczy jest pełna ($S = 0$), jednak jeden z nich robi wszystko, by najwięcej stracić. Jest więc idealnym filantropem lub po prostu zajął względem tego portfela pozycję krótką.

---

[36] K. Huang , *Mechanika statystyczna*, PWN, Warszawa 1978.

Zasady zespołów kanonicznych można w sposób równoważny opisywać za pomocą określeń bazujących na potencjałach innych niż wartość portfela $c_{00}(c_0,\ldots,c_N,S)$ i wartość swobodna portfela $F(c_0,\ldots,c_N,T)$. Brakujące dwa potencjały otrzymamy z dowolnego, już znanego potencjału, przy pomocy transformacji Legendre'a[37]. Jedną z tych transformat jest szczegółowo już opisana w przypadku $S=0$ [38], a teraz uogólniona na portfele kanoniczne, wartość zasobów pieniężnych portfela $\overline{w}_0(\overline{w}_1,\ldots,\overline{w}_N,S)$. Drugą to jeszcze nigdzie nie omawiana funkcja $G(\overline{w}_1,\ldots,\overline{w}_N,T)$, której odpowiednik w termodynamice procesów fizycznych nazywamy *entalpią swobodną*[39]. Stąd można się domyśleć, że w fizyce odpowiednikiem funkcji wartości zasobów $\overline{w}_0$ jest *entalpia*. Gdy w procesach rynkowych parametrami sterowania są parametry dualne do cen[40], czyli przeciętne ilości dóbr portfela $\overline{w}_k$, to dotyczące nie zmieniającego klasy specjalisty izotermy przedstawiają ewolucję wartości dóbr portfela, skutkującą zmianą jego potencjału G. Już przed 120 laty odpowiednikami wszystkich czterech potencjałów c_{00}, F, $\overline{w}_0$ i G biegle posługiwał się w swych badaniach Josiah Willard Gibbs[41]. Niezwykle interesującym byłoby zbadanie konsekwencji, które wynikają z zasad zespołów kanonicznych, wyrażonych kolejno w języku każdego z czterech potencjałów. Warianty tych zasad, choć faktycznie opisują jeden i ten sam model rynku, oferują zaskakująco nowy punkt jego widzenia. Naśladując losy kilku praw fizyki niektóre rządzące rynkiem prawa ekonomiczne mogą okazać się prostą konsekwencją termodynamicznych tożsamości zwanych równaniami Maxwella [42].

Zasady zespołów kanonicznych obowiązują dla dowolnego, wzbogaconego loterią o efekty losowe, modelu statyki procesów równowagi. Dlatego w kontekście rozkładów kanonicznych należałoby rozpoznać różne znane z ekonomii warianty funkcji-potencjałów, których różniczki charakteryzują się tym, że zależność występujących w nich parametrów $\overline{w}_k$ od zmiennych $c_0,\ldots,c_N$ nie jest stała (cokolwiek by te parametry i zmienne nie oznaczały). Przykładami tego typu potencjałów są funkcja Cobba-Douglasa i funkcja CES[43]. Ciekawy i obszerny, tu tylko zasygnalizowany temat, wymaga odrębnego opracowania.

11. Przykład liczbowy

---

[37] E. W. Piotrowski, *Statyka porównawcza à la thermodynamique. Elementy*, Optimum Nr 3, 2002.

[38] E. W. Piotrowski, *Statyka porównawcza à la thermodynamique. Elementy*, Optimum Nr 3, 2002.
[39] K. Huang , *Mechanika statystyczna*, PWN, Warszawa 1978.
[40] E. W. Piotrowski, *Geometria rynku*, Optimum Nr 1, 2000.
[41] J. W. Gibbs, *On the equilibrium of heterogeneous substances*, Trans.Connect.Acad. Nr 3, 1876, Nr 3 1878.
[42] E. W. Piotrowski, Statyka porównawcza à la thermodynamique. Elementy, Optimum Nr 3, 2002.
[43] A. C. Chiang, *Podstawy ekonomii matematycznej*, PWE, Warszawa 1994.

Niech sektor rynkowy prócz waluty obejmuje dwa dobra. Przyjmijmy, że jeden z uczestników rynku (Adam, cichy) nabył za połowę swoich aktywów finansowych dobro 1, a drugą połowę wydał na dobro 2. Inny inwestor (Barbara, cicha) określił swój portfel zakupem dobra 1 do wysokości 25% posiadanego kapitału, którego resztę zachował w pieniądzu. Przyjmijmy dalej, że w interesującym nas okresie czasu dobro 1 staniało o 20%, a cena dobra 2 wzrosła o 30%. Wynika stąd, że interesujące nas wartości parametrów c_k są następujące

$$c_1 = \frac{100\% - 20\%}{100\%} = 0{,}8 \quad \text{oraz} \quad c_2 = \frac{100\% + 30\%}{100\%} = 1{,}3 \ .$$

Załóżmy, że każdy z inwestorów dysponował jedną złotówką ($\overline{u}_{00} = 1$zł). Po zmianie cen złotówka zainwestowana przez Adama przynosi wartość

$$u_{00}^{A} = -c_{00}^{A} \cdot \overline{u}_{00} = c_1 \cdot 0{,}5\,\text{zł} + c_2 \cdot 0{,}5\,\text{zł} = 1{,}05\,\text{zł} \ ,$$

a złotówkowa inwestycja Barbary daje wartość jej portfela równą

$$u_{00}^{B} = -c_{00}^{B} \cdot \overline{u}_{00} = 0{,}75\,\text{zł} + c_1 \cdot 0{,}25\,\text{zł} = 0{,}95\,\text{zł} \ .$$

Chcąc wyznaczyć temperatury Barbary i Adama możemy posłużyć się kalkulatorem, dla którego stosowny program zamieszczony jest w Dodatku. Obliczone na podstawie danych c_{00}, c_1 i c_2 wartości temperatur odpowiednich zrównoważonych zespołów kanonicznych z walutą są następujące

$$T^{A} = 2{,}55 \quad \text{oraz} \quad T^{B} = -0{,}46$$

(dla większej czytelności podawane rezultaty posiadają dokładność jedynie kilku cyfr znaczących). Adam osiągnął lepszy wynik finansowy niż Barbara, bo choć $T^{B} < T^{A}$, to jedynie Adam odnosi zysk ze swej wiedzy (tylko cena T^{A} jednostki wiedzy jego zespołu kanonicznego jest dodatnia). Jednak autor wolałby Barbarę w roli doradcy inwestycyjnego, gdyż wiedza jej jest większa niż Adama (bo jeśli $|T^{A}| > |T^{B}|$, to $S^{A} > S^{B}$). Gdyby wsłuchiwać się w rady Barbary, by móc jednocześnie postępować im na przekór (bo $T^{B} < 0$) zajmując pozycję krótką do wysokości 25% swego kapitału w dobrze 1 sektora rynkowego, można by było uzyskać wynik finansowy lepszy od Adama.

Uważnie śledząc podobne do powyższych rachunki dojdziemy do wniosku, że ciekawa, na poziomie zasad zespołów kanonicznych, symetria pomiędzy portfelami o temperaturach T i $-T$ niezupełnie odpowiada zajęciu w dobrach sektora pozycji długiej, bądź krótkiej, przez jednakowo dobrze poinformowanych inwestorów. Aby usunąć ten mankament należy przejść do termodynamicznego opisu opartego na wspomnianych w paragrafie 8 portfelach współzmienniczych z kursem rynkowym. Pamiętać jednak należy, że pozostanie pewna asymetria proponowanego podejścia związana z portfelami zrównoważonymi. Równość wartości w_k zachodzi w konkretnej sytuacji cenowo-portfelowej, dlatego odnośnie innych notowań kursowych portfel, który był zrównoważony, zwykle zrównoważonym już nie jest.

12. Współzmiennicze z kursem portfele zrównoważone

Powyżej opisana charakterystyka jakości inwestowania, która opiera się na temperaturze portfela kanonicznego odnoszącego się do wartości rynkowej dóbr, ignoruje wymóg współzmienniczości opisu rynku względem grupy odwzorowań rzutowych[44]. Mając na uwadze problemy wynikające z paradoksu równowagi cen[45], autor jest przekonany o konieczności dostosowania formalizmu opisu portfeli i kursów rynkowych do postulatu współzmienniczości. By to uczynić, wystarczy odpowiednio zmodyfikować interpretację formuł występujących w poprzednich paragrafach przez zastąpienie wartości portfeli c_{00}, oraz parametrów cenowych c_k, logarytmami ich wartości bezwzględnych[46] (czyli całkami oznaczonymi chwilowych stóp procentowych mierzących tempa względnego wzrostu tych wielkości)

$$\begin{aligned} \ln|c_{00}| &\longrightarrow -c_{00} \ , \\ \ln|c_k| &\longrightarrow c_k \ , \\ \frac{|c_k|}{|c_{00}|}\cdot w_k &\longrightarrow w_k \ . \end{aligned} \qquad (12.1)$$

Analizując odwzorowanie (12.1) zauważymy, że gdy poprzednie wagi w_k (w cenowej interpretacji parametrów c_k) są odwrotnie proporcjonalne do c_k, to nowe wagi w_k (dla logarytmów cen) są niezależne od cen. Interesuje nas teraz portfel kanoniczny o takiej własności, czyli portfel współzmienniczy z kursem rynkowym[47]. Parametr $-c_{00}$ nie opisuje już wartości portfela, lecz osiągnięty

---

[44] E. W. Piotrowski, *Geometria rynku*, Optimum Nr 1, 2000.
[45] E. W. Piotrowski, Paradoks równowagi cen, a optymalna asekuracja kapitału, w Instrumenty pochodne, Universitas, Kraków 1997.
[46] E. W. Piotrowski, *Statyka porównawcza à la thermodynamique. Elementy*, Optimum Nr 3, 2002.
[47] E. W. Piotrowski, *Geometria rynku*, Optimum Nr 1, 2000.

zysk. Rozkład kanoniczny wyznaczony w oparciu o zysk (a więc i wyliczona na jego podstawie entropia) zmienia się wraz ze zmianą logarytmów cen, którym, po transformacji, odpowiadają symbole c_k obecne we wcześniejszych równaniach. Szczególnie prosta jest statystyczna waga waluty $e^{\beta \cdot c_0 \cdot w_0} = 1$, gdyż dotyczy czynnika $c_0 = \ln 1 = 0$.

Zmodyfikowane w powyżej opisany sposób dane o zmianach kursów cenowych, dla przykładu zamieszczonego w paragrafie **Błąd! Nie można odnaleźć źródła odwołania.**, są następujące

$$c_1 = \ln 0{,}8 = -0{,}223 \quad , \qquad c_2 = \ln 1{,}3 = 0{,}262 \quad ,$$
$$-c_{00}^{A} = \ln 1{,}05 = 0{,}049 \quad , \quad -c_{00}^{B} = \ln 0{,}95 = -0{,}051 \quad .$$

Nowe będą więc wartości temperatur portfeli Adama i Barbary, teraz określone na podstawie zespołów kanonicznych o współzmienniczych portfelach zrównoważonych w sektorze rynku z walutą. W celu wyznaczenia tych parametrów możemy skorzystać z programu zamieszczonego w Dodatku, z siódmą linią zmienioną w następujący sposób

```
tanh⁻¹ A→Y:eY→Y:(D×Y^D+E×Y^E)÷(1+Y^D+Y^E)−C→Y↵ .
```

Wyliczone temperatury przykładowych inwestorów, odnoszące się do współzmienniczych portfeli zrównoważonych, są następujące

$$T^{A} = 1{,}09 \quad \text{oraz} \quad T^{B} = -0{,}59 \quad .$$

Uwagi poczynione w poprzednim paragrafie, dotyczące przewagi informacji pochodzącej od przewrotnej Barbary, pozostają nadal aktualne.

Takiego typu temperatur można używać w celach rankingowych w związku z dowolną grupą inwestorów, z których każdy mógłby działać w innym sektorze rynku, w różnym czasie i w dowolnie długim przedziale czasowym. Porównajmy dla przykładu naszych inwestorów z graczem Celestynem, który na rynku bliżej nieokreślonej waluty X i pewnego dobra Y wykazującego czteroprocentowy wzrost ceny osiągnął 3,2% zysku. Modyfikując odpowiednio siódmą linię programu do postaci

```
tanh⁻¹ A→Y:eY→Y:D×Y^D÷(1+Y^D)−C→Y↵ ,
```

na podstawie danych

$$c_Y = \ln 1{,}04 = 0{,}039 \quad ,$$
$$-c_{00}^{C} = \ln 1{,}032 = 0{,}031$$

znajdujemy temperaturę gracza $T^C = 0{,}26$. Opierając się na danych temperaturowych stwierdzamy, że Celestyn jest specjalistą posiadającym wiedzę większą niż Adam, czy Barbara ($|T^C| < |T^B| < |T^A|$).

Jako technikę dualną[48] do przedstawionego sposobu pomiaru umiejętności inwestycyjnych można zaproponować m.in. ocenę wartości zadanego scenariusza spłaty kredytu, czy ocenę wartości cichego portfela obligacji (ewentualnie opcji) przy stochastycznym zachowaniu się stóp procentowych. Metody wyceny tego rodzaju modeli zostaną przedstawione w osobnych publikacjach. Należałoby porównać istniejące sposoby określania jakości portfeli inwestycyjnych z wyżej opisaną analizą zespołów kanonicznych. Także temu rozległemu tematowi autor poświęci odrębne opracowanie.

Dodatek

Poniżej zamieszczono tekst implementacji programu napisanego w dialekcie języka *basic* stosowanym w jednym z najpopularniejszych kalkulatorów programowalnych. Program ten pozwala wyznaczać temperaturę zrównoważonego portfela trójskładnikowego ($N = 2$) dla osiągniętej przez niego wartości $-c_{00}$ przy zadanym względnym wzroście cen rynkowych c_1 oraz c_2. Przez uwzględnienie kolejnych parametrów cenowych w początkowym fragmencie programu (gdzie pojawiają się zmienne D i E odpowiadające wczytywanym cenom) można łatwo poszerzyć zakres jego stosowania na sektor rynkowy dowolnego rozmiaru. Użyty algorytm wyznaczania wartości odpowiedniej funkcji odwrotnej opiera się na technice „dziel i rządź"[49]. Przy posługiwaniu się programem należy pamiętać o wpisywaniu takich wartości portfela $-c_{00}$, które należą do przedziału $\left(\min(1, c_1, \ldots, c_N), \max(1, c_1, \ldots, c_N)\right)$. Algorytm w tempie jednostajnym zwiększa ilość cyfr znaczących wyniku, a najwolniejsze z istniejących w kalkulatorach procesory wykonują go w ciągu kilku sekund. Czas wykonania programu można skrócić jeszcze co najmniej o połowę (czego autor nie uczynił dla zachowania większej czytelności). Ustalenie temperatury inwestora nie powinno więc sprawiać żadnych trudności.

[48] E. W. Piotrowski, *Geometria rynku*, Optimum Nr 1, 2000.
[49] R. L. Graham, D. E. Knuth, O. Patashnik, *Matematyka konkretna*, PWN, Warszawa 1996.

```
Lbl 0↵
-.999→A:.999→B:20→N:0→V↵
Norm:ClrText:Green "-c00="?→C↵
Orange "c1="?→D:Orange "c2="?→E↵
Goto 1↵
Lbl 2↵
tanh⁻¹ A→Y:eY→Y:(Y+D×Y^D+E×Y^E)÷(Y+Y^D+Y^E)-C→Y↵
V=0⇒Goto 3↵
Goto 4↵
Lbl 1↵
Goto 2↵
Lbl 3↵
1→V↵
If Y>0↵
Then A→Y:B→A:Y→B:IfEnd↵
Lbl 5↵
A→Z:.5×(A+B)→A↵
Goto 2↵
Lbl 4↵
If Y>0:Then A→B:Z→A:IfEnd↵
Dsz N:Goto 5↵
.5(A+B)→A↵
Green " ":Locate 1,7,"T="↵
Locate 3,7,1÷tanh⁻¹ A↵
0→A:While A=0:Getkey→A:WhileEnd:Goto 0
```

Bibliografia

1. A. C. Chiang, *Podstawy ekonomii matematycznej*, PWE, Warszawa 1994.
2. G. C. Chow, *Ekonometria*, PWN, Warszawa 1995.
3. T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest, *Wprowadzenie do algorytmów*, WN-T, Warszawa 1997.
4. E. J. Elton, M. J. Gruber, *Nowoczesna teoria portfelowa i analiza papierów wartościowych*, WIG-Press, Warszawa 1998.
5. *Encyclopaedia of Mathematics on cd-rom*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht 1997.
6. R. P. Feynman, *Wykłady z mechaniki statystycznej*, PWN, Warszawa 1980.

7. G. M. Fichtenholz, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, PWN, Warszawa 1972..
8. J. W. Gibbs, *On the equilibrium of heterogeneous substances*, Trans.Connect.Acad. Nr 3, 1876, Nr 3 1878.
9. R. L. Graham, D. E. Knuth, O. Patashnik, *Matematyka konkretna*, PWN, Warszawa 1996.
10. K. Huang, *Mechanika statystyczna*, PWN, Warszawa 1978.
11. A. Isihara, *Statistical physics*, Academic Press, New York 1971.
12. A. Y. Khinchin, *Ponyatie entropii v teorii veroyatnostej*, Uspekhi Mat. Nauk, Nr 8, 1953.
13. E.W. Piotrowski, *O logarytmie*, Penetrator Nr 12, 1995.
14. E. W. Piotrowski, *Paradoks równowagi cen, a optymalna asekuracja kapitału*, w *Instrumenty pochodne*, Universitas, Kraków 1997.
15. E. W. Piotrowski, *Zapomniany pierwowzór definicji ryzyka kapitałowego*, w *Modelowanie preferencji a ryzyko'99*, t.1, red. T. Trzaskalik, prace naukowe AE, Katowice 1999.
16. E. W. Piotrowski, *Podział kapitału, czyli o cenie rezygnacji i sile pieniądza*, Optimum Nr 3, 1999.
17. E. W. Piotrowski, *Geometria rynku*, Optimum Nr 1, 2000.
18. E. W. Piotrowski, *Statyka porównawcza à la thermodynamique. Elementy*, Optimum Nr 3, 2002.
19. E. W. Piotrowski, *Osiągalność instrumentu finansowego, a ryzyko kapitałowe*, wysłane do druku w Przeglądzie Statystycznym.
20. C. E. Shannon, *A mathematical theory of communication*, Bell System Techn. J. Nr 27,1948.
21. *Słownik matematyki i cybernetyki ekonomicznej*, PWE, Warszawa 1985.
22. H. Steinhaus, *Podstawy kontroli statystycznej*, Zastosowania Matematyki Nr 1, 1953.
23. S. Wellisz, *Gdy brak pełnej informacji*, Wiedza i Życie Nr 2,1997 (cd-rom 1999).
24. K. Zalewski, Wykłady z termodynamiki fenomenologicznej i statystycznej, PWN, Warszawa 1978.