

Problemy z paradoksem Astumiana

(RePEc:s1a:eakjk1:121PL 30-VIII-2004)

Edward W. Piotrowski¹

Streszczenie

Czy wybierając losowo spośród gier niesprzyjających możemy oczekiwać sukcesu? Poznajemy przykłady gier, w których odpowiedź na to pytanie jest twierdząca. Warto je rozumieć i studiować, modyfikując naszą wiedzę w wielu dyscyplinach. Nieoswojeni z tym paradoksem skazujemy się na straty przez zaniechanie świadomego jego wykorzystania.

*Przegrać, aby zwyciężyć, czyli o dobrych stronach naszych upadków.*²

*No one rises so high as he who knows not whither he goes.*³

1. Gry Parrondo

W formującej się u końca minionego stulecia ekonofizyce – nowej dyscyplinie, zajmującej się rozszerzeniem zakresu metod badawczych fizyki na obszar zjawisk społecznych⁴ – pojawił się intrygujący przykład losowego składania dwóch procesów, z osobna wykazujących niepożądaną tendencję, które jednak łącznie przynoszą statystycznie korzystny efekt. Ten, sprzeczny z przysłowiowym zdrowym rozsądkiem model gry, wyposażony w mechanizm zapadkowy, zaproponował Juan M. R. Par-

¹ Instytut Matematyki, Uniwersytet w Białymstoku; <http://alpha.uwb.edu.pl/ep/sj>.

² temat rekolekcji adwentowych, głoszonych przez o. M. Mogielskiego OP w 2003 roku w Parafii św. Dominika, Archidiecezja Warszawska.

³ znana opinia Olivera Cromwella.

⁴ ujednolicenie metody badań naukowych [Pio04] przybliżyła nas do identyfikacji jednocześnie uniwersalnych i fundamentalnych praw rządzących naszym bytem (zob. np. [Żur03]).

rondo z Universidad Complutense de Madrid, a spopularyzował swoimi referatami i artykułami australijski fizyk Derek Abbott, zob. np. [HA99]. Wieść o zaskakującej własności gier Parrondo wzbudziła duże zainteresowanie [Bal99,Cie00]. Warto tu wspomnieć ciekawe rozważania w *The New York Times* [Bla00], przeplatane opiniami Abbotta. Sugerują one m.in., że za przyczyną efektu Parrondo prezydent Clinton w trakcie afery z Moniką S. Lewinsky (gra A) dzięki przyznaniu się do kłamstwa (gra B) zyskał na popularności. Wydaje się, że taki schemat budowania porządku z chaosu może leżeć u podstaw wielu fascynujących zjawisk, począwszy od molekularnych silników i pomp, identyfikowanych przez biofizyków we wszystkich żywych komórkach [Astu01], po skuteczne zarządzanie funduszami kapitałowymi⁵. Bez wątplenia występujący w grach Parrondo mechanizm zapadkowy, charakterystyczny dla niektórych złożonych losowo ruchów Browna, staje się fascynującym przedmiotem badań, które inspirują nowe technologie i podpowiadają sposoby zachowań o niespodziewanej skuteczności.

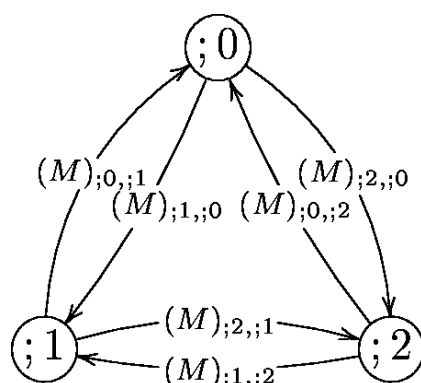
Prześledźmy szczegółowo, na czym polega paradoks gry Parrondo. Jeżeli przyjąć, że w każdej z gier porażka oznacza utratę przez gracza kwoty 1€ i symbolem $;n$, $n = 0,1,2$, oznaczyć wartość sumarycznej wygranej gracza modulo 3, to oryginalną wersję gry Parrondo opisują następujące reguły:

- gra A: z *prawdopodobieństwem* $\frac{1}{2} - \varepsilon$ *gracz otrzymuje* 1€.
- gra B: *gdy kapitał gracza jest* $;0$ *to z prawdopodobieństwem* $\frac{1}{10} - \varepsilon$ *gracz otrzymuje* 1€, *w przeciwnym razie z prawdopodobieństwem* $\frac{3}{4} - \varepsilon$ *wygrywa* 1€.

⁵ Sergei Maslov z Brookhaven National Laboratory wykazał, że gry Parrondo mogą dotyczyć rynków finansowych [MZ98].

- gra A+B: z równym prawdopodobieństwem⁶ gracz uczestniczy w grze A, bądź w grze B.

gdzie $\varepsilon \in (0, \frac{1}{10}]$. Sekwencja takich rozgrywek jest skończonym łańcuchem Markowa bez stanów pochłaniających [Ios88]. Możemy ją postrzegać jako błądzenie po grafie zorientowanym, w którym wagi krawędzi są prawdopodobieństwami przejść pomiędzy odpowiednimi wierzchołkami.



Macierze przejść dla gier A, B i A+B są następujące:

$$M^A := \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} + \varepsilon & \frac{1}{2} - \varepsilon \\ \frac{1}{2} - \varepsilon & 0 & \frac{1}{2} + \varepsilon \\ \frac{1}{2} + \varepsilon & \frac{1}{2} - \varepsilon & 0 \end{pmatrix}, \quad M^B := \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} + \varepsilon & \frac{3}{4} - \varepsilon \\ \frac{1}{10} - \varepsilon & 0 & \frac{1}{4} + \varepsilon \\ \frac{9}{10} + \varepsilon & \frac{3}{4} - \varepsilon & 0 \end{pmatrix},$$

$$M^{A+B} := \frac{1}{2}(M^A + M^B) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{8} + \varepsilon & \frac{5}{8} - \varepsilon \\ \frac{3}{10} - \varepsilon & 0 & \frac{3}{8} + \varepsilon \\ \frac{7}{10} + \varepsilon & \frac{5}{8} - \varepsilon & 0 \end{pmatrix}.$$

Łatwo jest obliczyć punkty stałe odpowiednich odwzorowań liniowych, które wynoszą kolejno:

⁶ ta losowość wyboru pomiędzy A i B jest nieodzowna w grach Parrondo. Np. koszykówka jako gra złożona z rozgrywek z rzutami za 2 punkty (gra A) i za 3 punkty (gra B) grą Parrondo nie jest (przy zbliżonych umiejętnościach koszykarzy gry A i B są niekorzystne), gdyż decyzje zawodników dotyczące rodzaju oddanego rzutu są nieprzypadkowe.

$$fix^A := \frac{1}{3}(1,1,1),$$

$$fix^B := \frac{1}{169-16\epsilon+240\epsilon^2}(65-40\epsilon+80\epsilon^2, 26+12\epsilon+80\epsilon^2, 78+12\epsilon+80\epsilon^2),$$

$$fix^{A+B} := \frac{1}{709-32\epsilon+960\epsilon^2}(245-80\epsilon+320\epsilon^2, 180+24\epsilon+320\epsilon^2, 284+24\epsilon+320\epsilon^2).$$

Powyższe wektory pozwalają nam wyznaczyć prawdopodobieństwa wygrania 1€ po dostatecznie dużej liczbie rozgrywek, gdy zanika zależność wygranej od warunków początkowych. Prawdopodobieństwa te, zadane formułą $p_{win} = \sum_{k=0}^2 (M)_{:k+1,:k} fix_{:k}$, są równe odpowiednio:

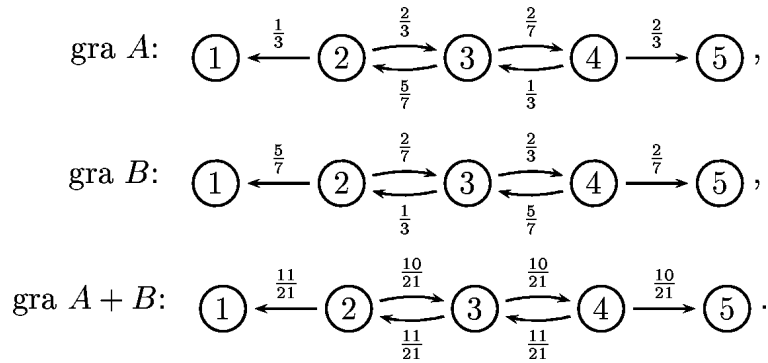
$$p_{win}^A = \frac{1}{2} - \epsilon, \quad p_{win}^B = \frac{1}{2} - \frac{147\epsilon-24\epsilon^2+240\epsilon^3}{169-16\epsilon+240\epsilon^2}, \quad p_{win}^{A+B} = \frac{1}{2} + \frac{9-687\epsilon+48\epsilon^2-960\epsilon^3}{709-32\epsilon+960\epsilon^2}.$$

Tak więc choć gry A i B są niekorzystne ($\forall \epsilon \quad p_{win}^A, p_{win}^B < \frac{1}{2}$), to gra A+B dla $\epsilon \in (0, \frac{1}{120}(2 + \sqrt[3]{60\sqrt{11220483} - 2197} - \frac{3431}{\sqrt[3]{60\sqrt{11220483} - 2197}}) \approx 0,0131)$ jest korzystna ($p_{win}^{A+B} > \frac{1}{2}$) i to jest paradoksalne.

Odwracając w powyższym modelu kierunek cyrkulacji kapitału otrzymamy przykład efektu anty-Parrondo. Mieszanie gier może równie dobrze przynosić pozytywne, jak i negatywne skutki.

2. Gra Astumiana

W opublikowanym w *Świecie Nauki* przeglądowym artykule o współczesnych badaniach stosowanych dotyczących mechanizmu stochastycznej zapadki [Astu01] R. Dean Astumian zaproponował prosty, charakteryzujący się stanami pochłaniającymi, wariant gry Parrondo. Zakłada on konkretną postać stanu początkowego, a jego stany pochłaniające zadają naturalne warunki zakończenia gry. W przykładzie Astumiana (patrz poniższy rysunek) błędzenie rozpoczyna się od węzła nr 3 grafu pięciowierzchołkowego, a kończy w węźle nr 1 (przegrana), bądź w węźle nr 5 (wygrana).



Probabilistyczne własności tej gry wyznaczają cztery parametry stanowiące odpowiednie elementy macierzy przejść:

$$a = (M^A)_{1,2} = (M^B)_{2,3} = \frac{1}{3}, \quad b = (M^B)_{1,2} = (M^A)_{2,3} = \frac{5}{7},$$

$$c = (M^A)_{5,4} = (M^B)_{4,3} = \frac{2}{3}, \quad d = (M^B)_{5,4} = (M^A)_{4,3} = \frac{2}{7}.$$

3. Problemy

Analiza powyższego przykładu Astumiana pozwala zauważyć, że nie pojawia się tu (wbrew intencji pomysłodawcy) paradoks Parrondo, gdyż we wszystkich trzech grach (A, B i A+B) prawdopodobieństwo porażki przewyższa prawdopodobieństwo wygranej⁷. Łatwo dojść do takiej konkluzji posiłkując się pojęciem martyngału⁸. Podejście martyngałowe pozwala w naturalny sposób wywnioskować, że stosunek prawdopodobieństwa sukcesu do prawdopodobieństwa porażki w błędzeniu po tego typu grafach jest równy stosunkowi iloczynu prawdopodobieństw przejść na prawo od węzła startowego (do wierzchołków grafu położonych po jego prawej stronie) do iloczynu prawdopodobieństw przejść na lewo od węzła startowego (do wierzchołków grafu położonych po jego lewej stronie) [Fel78,PS04b]. Tak więc w przykładzie Astumiana $\frac{1}{3} \cdot \frac{5}{7} > \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{3}$

⁷ błędne spostrzeżenie Astumiana prawdopodobnie było konsekwencją niereprezentatywnych symulacji numerycznych przebiegu gry.

⁸ czyli ustaleniem stawek gry dla wszystkich wierzchołków w grze sprawiedliwej.

(gry A i B), lecz także $(\frac{1}{2}(\frac{1}{3} + \frac{5}{7}))^2 > (\frac{1}{2}(\frac{2}{7} + \frac{2}{3}))^2$ (gra A+B). Zobaczymy, że inne wartości prawdopodobieństw przejść dla gry Astumiana też nie prowadzą do paradoksu Parrondo. Paradoksalność gry sprowadza się bowiem do spełnienia dwóch nierówności:

$$a \cdot b > c \cdot d \quad (\text{niekorzystne gry A i B}) \quad \text{oraz} \quad (1)$$

$$(\frac{a+b}{2})^2 < (\frac{c+d}{2})^2 \quad (\text{korzystna gra A+B}). \quad (2)$$

Ponieważ jednak z wierzchołka startowego każdego z wyżej przedstawionych trzech grafów wychodzą tylko dwie drogi (krawędzie), czyli

$$a + c = b + d = 1, \quad (3)$$

więc zapisując nierówność (2) w postaci

$$a + b < c + d \quad (2')$$

i dodając do stron (2') wyrażenie $b + c$ otrzymamy nierówność

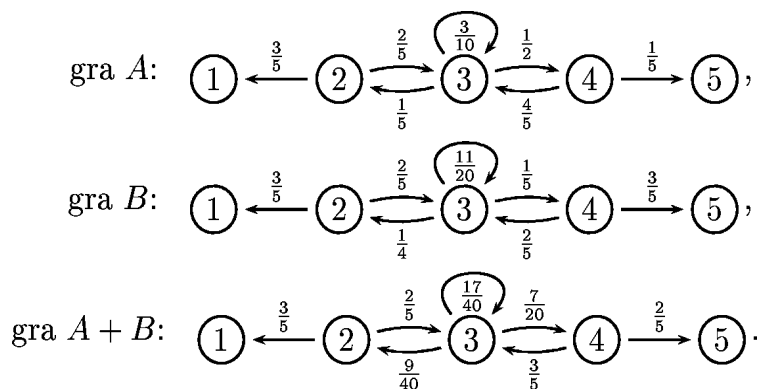
$$b < c, \quad (4)$$

zaś dodając do stron (2') $a + d$ mamy

$$a < d. \quad (5)$$

Mnożąc stronami (4) i (5) otrzymamy nierówność przeciwną do (1), czyli łącznie warunki (1), (2) i (3) są sprzeczne, co zamierzaliśmy wykazać.

Wykonane przez autora symulacje numeryczne sugerują, że liczba niezależnych parametrów macierzy przejść większa niż cztery także nie pozwala osiągnąć efektu Parrondo. Jednak w innych grach ze stanami pochłaniającymi efekt ten może wystąpić. Posłużmy się tu przykładem zaczerpniętym z pracy [PS04b], który przedstawiają trzy poniższe grafy.



Nie ma tu już sprzeczności, gdyż wprowadzenie „trzeciej drogi” pozostawania w wierzchołku startowym czyni fałszywym założenie (3).

Gdy w *Scientific American* ukazał się tekst Astumiana redakcja miesięcznika została powiadomiona listownie przez Jana Śładkowskiego i autora o mankamencie przedstawionej tam gry. Jednak nie opublikowano sprostowania⁹, zaś po z górą dwóch latach sam Abbott zwrócił uwagę na tamten list¹⁰, temat odżył i w konsekwencji pojawił się artykuł [PS04b].

4. Perspektywy

Zaprezentowana w §2 analiza punktów stałych (stanów równowagi) wyjaśnia mechanizm powstawania efektu Parrondo: równowaga w układzie (grze A+B) nie oznacza równowagi wewnątrz jego podukładów (A i B). **Dzięki osiągnięciu stabilnej równowagi w układzie i jednokowemu traktowaniu podukładów, wewnątrz każdego z nich panuje nierównowaga**, co w konsekwencji umożliwia czerpanie zysku. Jest tak, gdyż suma A+B nie jest zbudowaną odpowiednio ze składników A i B zwykłą grą zrandomizowaną (portfelem), w której m.in. byłyby dopuszczalne takie konfiguracje, jak np. stan $(2_A, 4_B)$. Sformułowana w

⁹ czyżby takie zachowanie się wydawcy było przykładem gry anty-Parrondo?

¹⁰ uznając poprawność zawartej w nim argumentacji, zob. także [MB04].

[Pio03,PS01] metoda portfeli¹¹ kanonicznych pozwala wyjść poza sferę spekulacji i precyzyjnie studiować takie zjawiska, jednak zasygnalizowane tu badania wykraczają poza ramy naszego tematu rozważań. Osiągnięte z nich wnioski mogą rzucić nowe światło na wiele aspektów gier złożonych, tak dotyczących konstrukcji technicznych, jak i zachowań społecznych.

Ostatnio w teorii kwantów pojawiły się odkrycia prawidłowości, które jeszcze kilka lat temu powszechnie uważano za charakterystyczne jedynie dla przyrody żywej, zob. np. [Żur03,PS04a]. Świat fascynuje się mocą obliczeń kwantowych [NC00]. Rozwijana obecnie teoria gier kwantowych¹² [PS04a] już doczekała się pierwszych opracowań prezentujących w tym formalizmie paradoks Parrondo [FNA02,LJ02]. Zjawisko interferencji kwantowej zwiększa możliwości uzyskiwania efektów sprzecznych z klasyczną intuicją. Z perspektywy wzrostu złożoności spowodowanego kwantowaniem modeli prostota gier Astumiana zachęca do badania ich kwantowych odpowiedników. Pojawił się nowy schemat wyłaniania się porządku z zachowań chaotycznych. Kończąc prezentację rysujących się perspektyw autor chciałby pozostawić czytelnika zaintrygowanym tą niezawilą, acz frapującą konstrukcją [LJ02]. Gry kwantowe (taktyki kwantowe) są unitarnymi operacjami na przestrzeni Hilberta kwantowych strategii gracza [PS04a]. Przyjmijmy, że gracz dysponuje dwoma inwolucyjnymi taktykami kwantowymi A i B , czyli kolejne dwukrotne wykonanie każdej z nich nie zmienia jego strategii ($A \cdot A = B \cdot B = I$). Niech

¹¹ z perspektywy efektu Parrondo przypadkowe lawirowanie inwestora pomiędzy różnymi portfelami nie musi być jedynie sposobem na obniżenie ryzyka, gdyż może służyć zwiększaniu zysku [MZ98].

¹² drugorzędym jest rozstrzygnięcie kwestii: czy procesy biologiczne i społeczne wykazują specyficzne cechy kwantowe. Zawsze możemy już oswojone efekty kwantowe adaptować do naszych potrzeb. Dzięki podobnym staraniom dziś nawet nieuk potrafi np. wyznaczyć wartość $\sqrt{17}$, czy wznieść się na wysokość 10 km.

strategia wyjściowa gracza ψ będzie punktem stałym taktyki A ($A\psi = \psi$). Korzystając z tych algebraicznych własności¹³ przekonujemy się, że całkowicie przypadkowa seria taktyk A i B skutkuje tym samym, co ich uporządkowana sekwencja $A \cdot B \cdot A \cdot B \cdots A \cdot B$. Sztandarowy¹⁴ dla obliczeń kwantowych algorytm Grovera¹⁵ jest przykładem takiej gry.

Bibliografia

- [Astu01] R. D. Astumian, *Silniki molekularne*, Świat Nauki, 9 (2001) 35-43.
- [Bal99] P. Ball, *Good news for losers*, Nature Science Update, 23 XII 1999.
- [Bla00] S. Blakeslee, *Paradox in game theory: losing strategy that wins*, The New York Times, 25 I 2000.
- [Cie00] P. Cieśliński, *Skazany na sukces?*, Gazeta Wyborcza, 29 XII 2000.
- [Fel78] W. Feller, *Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa*, t.2, PWN, Warszawa 1978.
- [FNA02] A. P. Flitney, J. Ng, D. Abbott, *Quantum Parrondo's games*, Physica A, 314 (2002) 35-42.
- [HA99] G. P. Harmer, D. Abbott, *Game theory: Losing strategies can win by Parrondo's paradox*, Nature, 402 (1999) 864.
- [Ios88] M. Iosifescu, *Skończone procesy Markowa i ich zastosowania*, PWN, Warszawa 1988.
- [LJ02] C. F. Lee, N. F. Johnson, *Parrondo games and quantum algorithms*; quant-ph/ 0203043.
- [MB04] H. Martin, H. C. von Baeyer, *Simple games to illustrate Parrondo's paradox*, Am. J. Phys., 72 (2004) 710-714.
- [MZ98] S. Maslov, Y.-C. Zhang. *Optimal investment strategy for risky assets*. International Journal of Theoretical and Applied Finance, 1/3 (1998) 377-387.
- [NC00] M. A. Nielsen, I. L. Chuang, *Quantum computation and quantum information*, Univ. Press, Cambridge 2000.
- [Pio03] E. W. Piotrowski, *Cisi i gracze. Kanoniczne zespoły portfeli*, Zeszyty Naukowo-Teoretyczne PWSBiA Wiek XXI, 3 (2003) 27-49.
- [Pio04] E. W. Piotrowski, *Kwantowy umysł – szkic*, w *Nasz Czas t.1 – Czym jest umysł?* (red. G. Trela), Augustana & Filozofia.pl, Bielsko-Biała 2004.
- [PS01] E. W. Piotrowski, J. Śładkowski, *The Thermodynamics of Portfolios*, Acta Phys. Pol. B, 32 (2001) 597-604.
- [PS04a] E. W. Piotrowski, J. Śładkowski, *The Next Stage: Quantum Game Theory*, w *Mathematical Physics Research at the Cutting Edge* (red. C. V. Benton), Nova Science Publishers, New York 2004.
- [PS04b] E. W. Piotrowski, J. Śładkowski, *The Astumian's paradox*, arXiv:physics/ 0408122.
- [Żur03] W. H. Żurek, *Quantum Darwinism and Envariance*, w *Science and Ultimate Reality: From Quantum to Cosmos* (red.: J. D. Barrow, P. C. W. Davies, C. H. Harper), University Press, Cambridge 2003.

¹³ które wypisane są w poprzednich dwóch zdaniach, w nawiasach.

¹⁴ z uwagi na wielość zastosowań.

¹⁵ algorytm Grovera stanowi najszybszy (i niedościgniony metodami klasycznymi) sposób przeszukiwania baz danych [NC00].