

# INŻYNIERIA FINANSOWA<sup>1</sup>

(wersja robocza)

Jan Śladkowski  
Institute of Physics, University of Silesia,  
Uniwersytecka 4, Pl 40007 Katowice, Poland  
e-mail: [sladk@us.edu.pl](mailto:sladk@us.edu.pl)

<sup>1</sup>Copyright © 2007 by Jan Śladkowski



# SPIS TREŚCI

Wstęp	4
1 Rynki finansowe	7
1.1 Rynki finansowe	7
1.2 Giełdy	8
1.3 Indeksy giełdowe	8
1.4 Giełda Papierów Wartościowych w Warszawie	9
1.5 Regulowany rynek pozagiełdowy	17
1.6 Problemy i zadania	17
2 Zmiana wartości pieniądza w czasie	19
2.1 Czas bankowy i rzeczywisty	19
2.2 Przepływy pieniężne	20
2.3 Problemy i zadania	21
3 Podstawy teorii procentu	23
3.1 Stopy procentowe	23
3.1.1 Oprocentowanie proste	24
3.1.2 Oprocentowanie składane	25
3.2 Dyskonto	26
3.3 Inflacja i realne stopy procentowe	26
3.4 Kapitał jako funkcja czasu	26
3.5 Renty	27
3.6 Ratalna spłata kredytu	29
3.6.1 Spłata długu przy oprocentowaniu prostym	30
3.6.2 Spłata długu przy oprocentowaniu składanym	30
3.7 Zysk i stopy zwrotu z inwestycji	30
3.8 Problemy i zadania	31
4 Papiery wartościowe	33
4.1 Akcje	33
4.2 Obligacje	33
4.3 Fundusze inwestycyjne	33
4.4 Problemy i zadania	33

5	Instrumenty pochodne	35
5.1	Problemy i zadania . . . . .	35
6	Kontrakty terminowe i opcje	37
6.1	Problemy i zadania . . . . .	37
7	Ryzyko finansowe	39
7.1	Problemy i zadania . . . . .	39
8	Portfele i strategie inwestycyjne	41
8.1	Problemy i zadania . . . . .	41
9	Polski rynek kapitałowy	43
9.1	Problemy i zadania . . . . .	43
10	Ekonofizyka i jej narzędzia	45
10.1	Problemy i zadania . . . . .	45
11	Rozwiązania i podpowiedzi	47

# Wstęp

Definicja 0.1 to jest proba

Twierdzenie 0.1

Lemat 0.1

Przykład 0.1

W przeciągu ostatniego półwiecza matematyka finansowa przerodziła się z rachunków żadko wykraczających poza oprocentowanie i dyskontowanie bazujące na ciągach arytmetycznych i geometrycznych w samodzielną dyscyplinę nauki wykorzystującą zaawansowany formalizm matematyki, teorii prawdopodobieństwa, teorii informacji, fizyki statystycznej, a ostatnio nawet mechaniki kwantowej. Zmiany te sa wynikiem niezwykle intensywnego rozwoju rynków i instytucji finansowych spowodowanych globalizacją. Inwestycja finansowa jest tu rozumiana w bardzo szerokim sensie, a celem wykładu jest przedstawienie podstaw zmiany wartości kapitału w czasie, metod wyceny (modelowania wartości) strumieni (przepływów) kapitałowych, instrumentów pochodnych oraz portfeli inwestycyjnych. Do zrozumienia materiału wystarczy znajomość matematyki uzyskana w czasie pierwszych dwóch lat studiów (ekonofizyka). Ze względu na informacyjno-wprowadzający charakter wykładu omawiane są najważniejsze i najbardziej reprezentatywne instrumenty i narzędzia. Główny akcent jest położony na praktyczne aspekty dyskutowanych problemów.



# ROZDZIAŁ 1

## Rynki finansowe i ich struktura

### 1.1 Rynki finansowe

Rynek najczęściej definiuje się jako system organizacyjno-prawny, który umożliwia zawieranie transakcji między oferującymi towary (dobra) sprzedawcami a nabywcami tych towarów (dóbr). Celem wykładu jest analiza szczególnego przypadku jakim jest rynek finansowy (financial market). Rolę wymienianych dóbr pełnią instrumenty finansowe – aktywa obecnie najczęściej reprezentowane w formie elektronicznego zapisu w bazie danych . Na rynku finansowym tradycyjnie wyróżnia się następujące segmenty:

- rynek pieniężny (money market)
- rynek kapitałowy ( capital market)
- rynek walutowy (foreign exchange market)
- rynek instrumentów pochodnych (derivatives market),

choć trzeba zaznaczyć, że podział ten jest czysto techniczny i często trudno jest organizacyjnie je wyodrębnić. Często wyróżniany jest też podział na

- rynek kasowy (spot market) zwany też gotówkowym (cash market)
- rynek terminowy (future market, forward market)

oraz rynek pierwotny (primary market), na którym emitenci nowych instrumentów (np akcji lub obligacji) sprzedają je najczęściej za pośrednictwem instytucji finansowych, które zwykle później są już przedmiotem normalnego obrotu (rynek wtórny secondary market). Nadzór nad publiczną emisją papierów wartościowych oraz ich obrotem sprawuje Komisja Papierów Wartościowych. Rynek najczęściej ma formę rynku publicznego<sup>1</sup> lub prywatnego<sup>2</sup>. Inwestorzy (investors), czyli

<sup>1</sup>czyli zorganizowanego, w postaci giełd i regulowanego rynku pozagiełdowego

<sup>2</sup>nieformalnego, na którym można obracać również papierami niedopuszczonymi do obrotu publicznego

uczestnicy rynku, zwykle dzieleni są na indywidualnych i instytucjonalnych. Ci pierwsi, w większości tzw. drobni inwestorzy na rozwiniętych rynkach zazwyczaj nie odgrywają znaczącej roli. Ci drudzy, dysponujący zwykle bardzo dużymi funduszami, to przede wszystkim

- banki
- domy maklerskie
- fundusze emerytalne
- fundusze powiernicze

## 1.2 Giełdy

Pierwsze prawnie uregulowane giełdy towarowe (commodity exchange) powstały w XVI wieku w Europie. Już w 1608 roku na giełdzie w Amsterdamie pojawiły się kontrakty terminowe (na tulipany) – ta forma obrotu stała się z upływem lat dominująca i giełdy towarowe w większości przebrały się w giełdy terminowe (future exchange). Największą na świecie tego typu giełdą jest Chicago Board of Trade (CBOT), która powstała w 1848 roku. Na ziemiach polskich pierwsza giełda towarowa została założona w Warszawie w 1817 roku. Chociaż udziałami w spółkach handlowano już w XVII wieku, pierwsza giełda papierów wartościowych otwarta została w Londynie dopiero w 1773 roku. W 1792 roku założono New York Stock Exchange, czyli giełdę w Nowym Jorku. W 1991 reaktywowano działalność Giełdy Papierów Wartościowych w Warszawie (GPWW) – jest ona jedyną działającą obecnie w Polsce giełdą papierów wartościowych<sup>3</sup>. Akcje tej samej spółki mogą (i często są!) być nowowane jednocześnie na różnych giełdach. Obecnie obserwuje się tendencję łączenia się mniejszych, mających lokalne znaczenie giełd, w wyniku takich sojuszy powstają giełdy mające ponadnarodowe znaczenie.

## 1.3 Indeksy giełdowe

Popularnym sposobem opisu trendów na rynkach finansowych są tzw. indeksy giełdowe. Są to wszelkiej maści średnie ważone mające w miarę wiernie odzwierciedlać ogólną sytuację panującą na rynku lub tylko na pewnej jego części (np. sektor bankowy, sektor dużych spółek). Indeksy największych giełd są pilnie obserwowane przez inwestorów na całym świecie<sup>4</sup>. Najprostsze indeksy są średnią arytmetyczną cen akcji wchodzących w jego skład. Przykładem może być index

<sup>3</sup>w dobie Internetu termin ten nie jest precyzyjny, gdyż obecnie łatwo można otwierać rachunki inwestycyjne w zagranicznych domach maklerskich

<sup>4</sup>Niestety (?), na rynkach instynkty stadne wśród inwestorów często biorą górę nad zdrowym rozsądkiem – podana w wiadomościach informacja, że index DJIA spadł o np 2% może wywołać niezłą panikę na Giełdzie w Warszawie w następnym dniu.



Dow Jones Industrial Average (DJIA)<sup>5</sup>, który opisuje zachowanie cen akcji 30 największych spółek notowanych na giełdzie w Nowym Yorku. Bardziej wiarygodne indeksy uzyskuje się poprzez uwzględnienie wartości rynkowej (kapitalizacji) spółek wchodzących w skład indeksu. Do takich należą najpopularniejsze indeksy podawane dla GPWW:

WIG Jest to tzw. indeks dochodowy ważony uwzględniający dywidendy i prawa poboru w kapitalizacji. Indeks WIG publikowany jest co 60 sekund (w czasie sesji). Obliczany jest według wzoru:

WIG20 Indeks cenowy ważony<sup>6</sup> Indeks WIG20 publikowany jest co 15 sekund (w czasie sesji).

MIDWIG<sup>7</sup> Indeks cenowy ważony Indeks MIDWIG publikowany jest co 60 sekund (w czasie sesji).

Wszystkie te indeksy onliczane są według ogólnego wzoru:

$$indeks(t) = 1000 \frac{M(t)}{M(0)} K(t),$$

gdzie  $M(t)$  oznacza kapitalizację portfela indeksu w czasie  $t$ ,  $M(0)$  kapitalizację portfela indeksu w dniu bazowym (16.04.1991 dla WIG, 16.04.1994 dla WIG20 i 31.12.1997 dla MIDWIG), a  $K(t)$  to tzw. współczynnik korygujący indeksu w chwili  $t$  uwzględniający zmiany w składzie indeksu itp. Analogicznie (1000  $\rightarrow$  10) obliczany jest też inny popularny indeks Standards & Poor's 500 (S&P500), który, oprócz spółek notowanych na NYSE, uwzględnia również około 100 amerykańskich z rynku pozagiełdowego. Inne popularne indeksy to Duetsche Aktienindex (DAX), Financial Times Stock Exchange 100 Index (FTSE-100, Footsie), Nikkei 225 oraz Value Line Composite Index (VLIC), który jest klasycznym indeksem cenowym. Składy indeksów giełdowych są często modyfikowane; aktualne dane są dostępne na stronach internetowych giełd i instytucji finansowych.

## 1.4 Giełda Papierów Wartościowych w Warszawie

Giełda Papierów Wartościowych w Warszawie<sup>8</sup> umożliwia handel akcjami, prawami poboru, prawami do akcji, obligacjami, jednostkami uczestnictwa w funduszach powierniczych oraz szrołą gamą instrumentów pochodnych. Transakcje obsługiwane są w systemie WARSET, który funkcjonuje od listopada 2000 roku<sup>9</sup>.

<sup>5</sup>System indeksów Dow Jones obejmuje jeszcze trzy analogicznie obliczane lecz mniej popularne indeksy : Dow Jones Transportation Average, Dow Jones Utilities Average i Dow Jones Composite Average.

<sup>6</sup>Indeksy cenowe zmieniają się po wypłacie dywidendy

<sup>8</sup>Najaktualniejsze informacje można znaleźć na oficjalnej stronie GPWW: <http://www.gpw.com.pl/>

<sup>9</sup>Podobne systemy wykorzystywane są m.in. w Paryżu, Brukseli, Amsterdamie, Chicago oraz Singapurze

W system ten zapewnia pełną automatyzację przekazywania zleceń, zawierania transakcji, sprawny dostęp uczestników rynku do systemu obrotu papierami wartościowymi oraz szerokie możliwości korzystania z informacji o sytuacji na rynku. Ponadto WARSET umożliwia inwestorom szersze wykorzystanie możliwości przesyłania zleceń przez internet z pośrednictwem biur maklerskich - systemy biur maklerskich są na tyle zintegrowane z systemem giełdowym, że udział biur sprowadza się tylko do weryfikacji poprawności złożonych przez inwestorów zleceń. W systemie notowań WARSET-u jednostką transakcyjną jest jeden instrument finansowy. Charakterystyczną cechą systemu WARSET jest publikowanie w fazie przed otwarciem, przed zamknięciem i w fazie równoważenia) tzw. Teoretycznego Kursu Otwarcia – TKO. Jest to wyliczona na dany moment cena papieru wartościowego. Notowania na GPWW przebiegają w następujący sposób:

W systemie notowań ciągłych W czasie notowań ciągłych kupujący i sprzedający składają zlecenia, które po przekazaniu na giełdę są realizowane na bieżąco, pod warunkiem zgodności cen, lub trafiają do arkusza zleceń i oczekują ofert przeciwnych o odpowiedniej cenie, umożliwiającą zawarcie transakcji. Przy realizacji zleceń obowiązują dwa priorytety: cena i czas złożenia zlecenia. Oznacza to, że w przypadku gdy czekają na realizację dwa zlecenia o identycznej cenie, jako pierwsze realizowane jest to, które zostało przekazane na giełdę wcześniej.

W ramach notowań ciągłych stosowana jest jednak również procedura fixingu. Standardowo odbywa się ona na rozpoczęcie i zakończenie sesji. Notowania ciągle rozpoczynają się ogłoszeniem kursu otwarcia (zlecenia są przyjmowane w fazie przed otwarciem, w czasie której nie są one realizowane, natomiast określany jest teoretyczny kurs otwarcia), zaś kończą się ogłoszeniem kursu zamknięcia, po którym następuje 10 - minutowa dogrywka. Z chwilą ogłoszenia kursu otwarcia staje się on ceną, po której zostają zawarte transakcje giełdowe na otwarciu. Analogicznie jest w przypadku kursu zamknięcia - na podstawie zleceń złożonych w fazie przed zamknięciem określa się kurs zamknięcia, po którym zawierane są transakcje na zamknięcie sesji giełdowej. Zdarzyć się mogą sytuacje, w których określenie kursu otwarcia (lub zamknięcia) nie jest możliwe przy zastosowaniu przyjętych reguł. Dzieje się tak w następujących przypadkach:

- gdy najwyższy limit ceny w zleceniu kupna jest niższy od najniższego limitu ceny w zleceniu sprzedaży
- gdy występują wyłącznie zlecenia kupna lub wyłącznie zlecenia sprzedaży
- gdy występuje brak zleceń
- jeśli występują wyłącznie zlecenia kupna nie zawierające limitu ceny lub wyłącznie zlecenia sprzedaży nie zawierające limitu ceny
- jeśli przy określaniu kursu otwarcia (lub zamknięcia) kurs wykracza poza dopuszczalne wahania

W sytuacji wystąpienia jednego z trzech pierwszych przypadków, za kurs otwarcia przyjmuje się kurs pierwszej transakcji zawartej na danej sesji w systemie notowań ciągłych, zaś za kurs zamknięcia kurs ostatniej transakcji zawartej na danej sesji. Jeśli na sesji nie zawarto żadnej transakcji, kursu otwarcia oraz zamknięcia nie określa się.

W sytuacji wystąpienia jednego z dwóch ostatnich przypadków, kurs otwarcia (zamknięcia) nie jest ogłaszany i rozpoczyna się równoważenie rynku. W trakcie równoważenia można składać dodatkowe zlecenia kupna i sprzedaży oraz anulować i modyfikować wcześniej złożone przez siebie zlecenia.

Jeśli skutek równoważenia możliwe jest określenie kursu mieszczącego się w ograniczeniach wahań, równoważenie zostaje zakończone i ogłaszany jest kurs otwarcia (zamknięcia). Jeśli przewodniczący sesji uzna, że w wyniku równoważenia nie jest możliwe określenie kursu mieszczącego się w ramach dopuszczalnych wahań, może zmienić ograniczenia wahań kursów albo zakończyć notowanie ogłaszając nietransakcyjny kurs otwarcia (zamknięcia) równy górnemu ograniczeniu wahań - w przypadku przewagi zleceń kupna, bądź równy dolnemu ograniczeniu - w przypadku przewagi zleceń sprzedaży.

W przypadku, gdy w wyniku równoważenia powstanie rynek zleceń rozbieżnych, przewodniczący sesji może przedłużyć równoważenie, zakończyć równoważenie z jednoczesnym rozpoczęciem notowań ciągłych (w przypadku, gdy równoważenie odbywa się na otwarciu) lub zakończyć notowanie, jeśli równoważenie odbywa się na zamknięciu sesji.

Po ogłoszeniu rozpoczęcia notowań ciągłych transakcje zawierane są po kursie transakcyjnym równym limitowi ceny zlecenia oczekującego, zaś zlecenia czekające na realizację wykonywane są według limitu ceny. Jeśli limity zleceń są identyczne, realizacja następuje według kolejności przyjęcia zlecenia lub jego ujawnienia (dla zleceń z wielkością ujawniana).

Jeśli po rozpoczęciu notowań ciągłych kurs wykracza poza dopuszczalne ograniczenia wahań, zawieranie transakcji zostaje zawieszona i rozpoczyna się proces równoważenia rynku. W momencie uruchomienia równoważenia rynku w czasie sesji, zlecenie, które spowodowało zawieszenie, zostaje przyjęte do systemu.

Kursy otwarcia i zamknięcia określane są przy zastosowaniu kolejno zasad:

- maksymalizacji wolumenu obrotu,
- minimalizacji różnicy między liczbą papierów wartościowych w zleceniach sprzedaży i kupna możliwych do realizacji po określonym kursie,
- minimalizacji różnicy między kursem określanym a kursem odniesienia.

W okresie między rozpoczęciem przyjmowania zleceń maklerskich w danym dniu, a początkiem notowań ciągłych, między początkiem przyjmowania zleceń na zamknięcie, a określeniem kursu zamknięcia oraz w okresie

równoważenia rynku, na bieżąco określany i podawany jest kurs teoretyczny.

W systemie ciągłym notowane są akcje najbardziej płynnych spółek, wszystkie obligacje, certyfikaty inwestycyjne, kontrakty terminowe, warranty i opcje oraz jednostki MN20. Prawa poboru i prawa do akcji są również notowane w tym systemie, gdy akcje do których się odnoszą są notowane w systemie ciągłym. Dogrywka w systemie notowań ciągłych to ostatnia, 10-minutowa faza sesji (16.20-16.30), podczas której wszystkie transakcje zawierane są po kursie zamknięcia. Podczas dogrywki znany jest kurs, po którym dokonywane są transakcje dlatego zlecenia kupna i sprzedaży przyjmowane w tej fazie notowań muszą zawierać limit ceny równy kursowi zamknięcia<sup>10</sup>.

W systemie notowań jednolitych Notowania w systemie kursu jednolitego opierają się na procedurze tzw. fixingu, czyli wyznaczenia ceny papieru wartościowego na podstawie zleceń złożonych przed rozpoczęciem notowań.

W czasie pierwszej fazy sesji (faza zwana przed otwarciem) do systemu przyjmowane są zlecenia kupna i sprzedaży, jednak nie są zawierane żadne transakcje. Jest natomiast wyliczony i publikowany teoretyczny kurs otwarcia papieru wartościowego (TKO).

Następnie system informatyczny, wykorzystując odpowiedni algorytm, wyznacza kurs jednolity, po którym zawierane są transakcje giełdowe. Kurs jednolity określany jest na podstawie zleceń zawierających limit ceny oraz niezawierających tego limitu. Z chwilą ogłoszenia kursu jednolitego staje się on ceną, po której zawierane są transakcje.

Określając wartość kursu jednolitego system kieruje się następującymi kryteriami:

- maksymalizacja wolumenu obrotu,
- minimalizacja różnicy między liczbą papierów w zleceniach sprzedaży i zleceniach kupna, możliwych do zrealizowania po określonym kursie,
- minimalizacja różnicy między kursem określonym i kursem odniesienia.

Po ogłoszeniu kursu jednolitego rozpoczyna się składanie dodatkowych zleceń kupna i sprzedaży z limitem równym określonym kursowi jednolitemu – jest to tzw. faza dogrywki.

Zlecenia są realizowane przy zachowaniu priorytetu ceny i czasu przyjęcia lub uaktywnienia oraz zasady minimalizacji liczby transakcji. W pierwszym etapie wszystkie zlecenia po każdej cenie, a następnie z limitem ceny lepszym od wyznaczonego kursu są realizowane w całości. Następnie realizowane są zlecenia po cenie rynkowej na otwarcie, a potem z limitem ceny równym wyznaczonemu kursowi jednolitemu. Jeśli wystąpi brak

<sup>10</sup>Zaletą dokonywania transakcji w trakcie dogrywki jest fakt, że zlecenia - nawet dużej wartości - nie mają wpływu na kurs papieru wartościowego. Oczywiście nie oznaczono, że zostaną one w całości zrealizowane.

możliwości wyznaczenia kursu jednolitego w dopuszczalnych widełkach, podawany jest kurs nietransakcyjny. Wówczas transakcje nie są zawierane, zaś określony kurs stanowi punkt odniesienia na następnej sesji.

W przypadku notowań jednolitych z dwoma fixingami (w tym systemie odbywa się notowanie części mniej płynnych spółek) procedura wyznaczania kursu i zawierania transakcji powtarzana jest dwukrotnie w ciągu dnia. Oznacza to, że po fazie dogrywki rozpoczyna się ponownie faza przed otwarciem, ponownie wyliczane jest TKO i wyznaczany jest o określonej godzinie drugi w ciągu dnia sesyjny kurs transakcyjny dla papierów notowanych w systemie kursu jednolitego. Po ogłoszeniu kursu jednolitego rozpoczyna się podobnie jak wcześniej faza dogrywki.

W systemie transakcji pakietowych Transakcje pakietowe to transakcje zawierane poza systemem notowań ciągłych oraz kursu jednolitego. Najczęściej są zawierane przez dużych inwestorów, którzy przed ich zawarciem uzgodnili ich szczegóły (cenę, ilość, termin rozliczenia).

Transakcje pakietowe na instrumenty finansowe nie będącymi instrumentami pochodnymi:

Transakcja pakietowa może być zawarta w trakcie sesji, jeżeli przedmiotem transakcji jest pakiet o wartości co najmniej:

- 250 000 zł w przypadku akcji wchodzących w skład indeksu WIG20
- 100 000 zł w przypadku pozostałych instrumentów notowanych w notowaniach ciągłych
- 20 000 zł w przypadku pozostałych instrumentów finansowych notowanych w systemie jednolitym,

a różnica pomiędzy kursem transakcji a ostatnim kursem danego instrumentu na sesji giełdowej jest nie przekracza 10 % tej ceny.

Transakcje pakietowe zawierane poza godzinami sesji giełdowej mogą zostać zrealizowane, gdy różnica kursu transakcji nie przekracza 40 % średniej ważonej wolumenem obrotu kursów wszystkich transakcji zawartych na danej sesji giełdowej (VWAP).

W szczególnie uzasadnionych przypadkach Zarząd Giełdy może zgodzić się na transakcje nie spełniające warunków minimalnej wartości i odchylenia od kursu, jeżeli będzie ona dotyczyła co najmniej 5% papierów wartościowych wprowadzonych do obrotu giełdowego.

Transakcje pakietowe na instrumenty pochodne zawierane są w godzinach 9:00 - 16:30 dla wszystkich instrumentów pochodnych. Transakcje pakietowe na kontrakty terminowe mogą być zawierane po zawarciu pierwszej transakcji danym kontraktem w systemie notowań ciągłych. Dla transakcji pakietowych na poszczególnych instrumentach pochodnych obowiązują takie same ograniczenia wahań kursów jak dla transakcji zawieranych na sesji giełdowej. Data rozliczenia transakcji może być określona wyłącznie

na dzień zawarcia transakcji i obowiązują takie same dane rozliczeniowe jak w przypadku transakcji sesyjnych oraz identyczny system depozytów zabezpieczających na danych instrumentach pochodnych. Po zawarciu transakcji pakietowej na instrumenty pochodne opublikowana jest zmiana liczby otwartych pozycji. Określany jest również minimalny oraz maksymalny wolumen transakcji pakietowych:

instrument	wolumen minimalny	wolumen maksymalny
kontrakty terminowe na indeksy	200	1600
kontrakty terminowe na kursy akcji	200	1600
kontrakty terminowe na obligacje Skarbu Państwa	200	1600
kontrakty terminowe na kursy walut	200	1600
opcje na indeksy	200	2400
opcje na kursy akcji	200	2400

Tabela 1.1: Dopuszczalne wielkości transakcji pakietowych

W trakcie notowań obowiązują tzw. widełki statyczne i dynamiczne określające maksymalne progi zmian w czasie sesji (widełki statyczne) i następnej transakcji (widełki dynamiczne), przekroczenie których powoduje zawieszenie notowań i przejście do fazy równoważenia rynku. Aktualne obowiązujące wartości widełek dla poszczególnych systemów notowań oraz minimalne kroki notowań można znaleźć na stronie GPWW. Harmonogram sesji jest podany w tabelach 1.2, 1.3 i 1.4.

8:30–9:30	Przyjmowanie zleceń na otwarcie
9:30	Określenie kursu na otwarcie
9:30 — 16:10	Notwania ciągłe
16:10 – 16:20	Przyjmowanie zleceń na zamknięcie
16:20	Określenie kursu na zamknięcie
16:20 – 16:30	Dogrywka
8:30–9:30	Przyjmowanie zleceń na otwarcie następnej sesji

Tabela 1.2: Harmonogram notowań ciągłych – akcje

Zlecenia w Warsercie. Składając zlecenie inwestor musi określić: rodzaj oferty (kupno lub sprzedaż) limit ceny lub rodzaj zlecenia bez limitu ceny termin ważności zlecenia nazwę papieru wartościowego/instrumentu finansowego, który chce kupić/sprzedać liczbę papierów wartościowych dodatkowe warunki wykonania zlecenia

1. Zlecenia z limitem ceny W tym zleceniu inwestor określa cenę po jakiej chce kupić lub sprzedać dany instrument finansowy. W przypadku kupna jest to cena, powyżej której składający zlecenie nie godzi się na realizację

8:30–9:00	Przyjmowanie zleceń na otwarcie
9:00	Określenie kursu na otwarcie
9:00 — 16:10	Notowania ciągle
16:10 – 16:20	Przyjmowanie zleceń na zamknięcie
16:20	Określenie kursu na zamknięcie
16:20 – 16:30	Dogrywka
8:30–9:30	Przyjmowanie zleceń na otwarcie następnej sesji

Tabela 1.3: Harmonogram notowań ciągłych – kontrakty terminowe

8:30–11:00	Przyjmowanie zleceń na otwarcie
11:00 –11:15	Interwencja
11:15	Określenie kursu jednolitego (fixing)
11:15 – 11:45	Dogrywka
11:45– 14:45	Przyjmowanie zleceń na otwarcie
14:45 – 15:00	Interwencja
15:00	Określenie kursu jednolitego (fixing)
15:00 – 15:30	Dogrywka
15:30-16:35	Przyjmowanie zleceń na otwarcie następnej sesji

Tabela 1.4: Harmonogram notowań jednolitych

zlecenia, zaś dla zleceń sprzedaży jest to cena, poniżej której inwestor nie chce sprzedać papierów.

## 2. Zlecenia bez limitu ceny

- Zlecenia PCR - Po Cenie Rynkowej mogą być wprowadzane na giełdę wyłącznie w trakcie notowań ciągłych z wyłączeniem okresów równoważenia rynku. Są one realizowane po cenie pierwszego najlepszego zlecenia przeciwnego. Niezrealizowana część zlecenia PCR staje się zleceniem z limitem ceny równym kursowi po jakim dokonana została ostatnie transakcja. Zlecenia po cenie rynkowej mogą zawierać dodatkowe warunki dotyczące wielkości minimalnej lub wielkości ujawnianej.
- Zlecenia PCRO - Po Cenie Rynkowej na Otwarcie stosowane są przy fixingu, przyjmowane na giełdę w fazie przyjmowania zleceń na otwarcie i zamknięcie w systemie notowań ciągłych i systemie kursu jednolitego oraz w okresach równoważenia rynku. Realizowane są - odpowiednio - po kursie otwarcia, zamknięcia, po kursie jednolitym lub określonym w wyniku równoważenia. Niezrealizowana część zlecenia staje się zleceniem z limitem ceny równym odpowiednio: kursowi otwarcia, zamknięcia, kursowi jednolitemu lub kursowi określonym w wyniku równoważenia rynku. Zlecenia te nie mogą zawierać do-

datkowych warunków limitu aktywacji, wielkości minimalnej i wielkości ujawnianej oraz nie mogą być modyfikowane w fazie interwencji.

- Zlecenia PKC - Po Każdej Ceniemogą być przekazywane na giełdę we wszystkich fazach w systemie notowań ciągłych oraz w systemie kursu jednolitego, z wyjątkiem faz interwencji i dogrywki. Zlecenia te złożone w trakcie przyjmowania zleceń na otwarcie, na zamknięcie, na notowania jednolite oraz w okresie równoważenia rynku podlegają realizacji - odpowiednio - po kursie otwarcia, zamknięcia, kursie jednolitym lub kursie określonym w wyniku równoważenia rynku. Zlecenia PKC nie podlegają modyfikacji w fazie interwencji. Natomiast w fazie notowań ciągłych, z wyjątkiem okresów równoważenia rynku, jeżeli na realizację czeka co najmniej jedno zlecenie przeciwstawne z limitem ceny, zlecenie PKC podlega realizacji po cenie lub cenach zgłoszonych wcześniej, a niezrealizowanych najlepszych zleceń przeciwstawnych.

Jeżeli w chwili składania zleceń po każdej cenie w fazie notowań ciągłych w arkuszu zleceń nie ma zleceń przeciwstawnych z limitem ceny, zapewniających pełną realizację zlecenia PKC, rozpoczyna się proces równoważenia rynku, a zlecenia PKC tracą ważność. Zlecenia PKC jak i PCRO nie są przyjmowane w przypadku warrantów, praw poboru i na pierwszą sesję, na której notowany jest dany papier wartościowy. Dodatkowe warunki wykonania zlecenia: z minimalną wielkością wykonania - Wmin warunek wielkości ujawnianej - WUJ zlecenia z limitem aktywacji - LimAkt W przypadku zleceń z tym samym limitem ceny i warunkiem limitu aktywacji, o kolejności ich realizacji decyduje: w fazie notowań ciągłych (z wyjątkiem równoważenia): czas przyjęcia - w przypadku zleceń z tymi samymi limitami aktywacji, lub czas ujawnienia - w przypadku zleceń z różnymi limitami aktywacji w przypadku zleceń realizowanych po kursie otwarcia (zamknięcia), kursie jednolitym, kursie określonym w wyniku równoważenia - czas przyjęcia na giełdę. Zlecenia z limitem aktywacji ujawnione w trakcie notowań ciągłych oraz w wyniku określenia kursu otwarcia (zamknięcia), kursu jednolitego lub kursu określonego w wyniku równoważenia pozostają w arkuszu zleceń jako zlecenia bez warunku limitu aktywacji.

Zlecenia mogą mieć termin ważności określony w formie konkretnej daty, oznaczony jako do końca sesji giełdowej, ważność domyślna, do pierwszego wykonania lub warunek wykonaj lub anuluj. Zlecenie ważne do pierwszego wykonania obowiązuje do momentu zawarcia pierwszej transakcji (lub pierwszych transakcji, jeżeli zlecenie realizowane jest jednocześnie w kilku transakcjach). Zlecenie jest realizowane natychmiast po wprowadzeniu i może zostać zrealizowane tylko częściowo. Jeżeli będzie zrealizowane częściowo, niezrealizowana część traci ważność. Zlecenia te mogą być przekazane na giełdę we wszystkich fazach w systemie notowań ciągłych oraz w systemie kursu jednolitego, z wyjątkiem fazy interwencji. Zlecenie z oznaczeniem ważności wykonaj lub anuluj ważne jest do momentu zawarcia pierwszej transakcji (lub pierwszych transakcji, jeżeli zlecenie realizowane jest jednocześnie w kilku transakcjach). Zlecenie jest realizowane natychmiast po wprowadzeniu, ale wyłącznie w całości - nie może



być zrealizowane częściowo. W przypadku gdy układ zleceń w arkuszu po przeciwnej stronie nie pozwala na realizację zlecenia w całości, traci ono ważność. Należy pamiętać, że jeżeli w fazie notowań ciągłych lub w fazie dogrywki w chwili składania zlecenia z oznaczeniem ważności do pierwszego wykonania albo wykonaj lub anuluj, w arkuszu zleceń brak zleceń przeciwnych z limitem ceny umożliwiającym zawarcie transakcji, zlecenie traci ważność.

## 1.5 Regulowany rynek pozagiełdowy

Rynek pozagiełdowy (over-the-counter, OTC) to instytucja umożliwiająca obrót akcjami niecieszącymi się wystarczającym zainteresowaniem inwestorów by być notowane na giełdzie<sup>11</sup> bądź są spółkami nowopowstałymi, obligacjami komunalnymi, niestandardyzowanymi kontraktami terminowymi itp. Najbardziej znanym rynkiem pozagiełdowym jest NASDAQ (National Association of Securities Dealers Automatic Quotation) - notuje się na nim prawie 6000 walorów. W Polsce funkcję tę pełni Centralna Tabela Ofert (CTO), która działa od grudnia 1996 roku.

## 1.6 Problemy i zadania

---

<sup>11</sup>Wejście na giełdę jest dosyć kosztowne znane są duże koncerny (np Apple Computer Inc.) które z własnego wyboru pozostają na rynku pozagiełdowym



## ROZDZIAŁ 2

# Zmiana wartości pieniądza w czasie i przepływy kapitałowe

### 2.1 Czas bankowy i rzeczywisty

Z wyjątkiem okresów hiperinflacji, w życiu codziennym rzadko musimy uwzględniać zmienność wartości pieniądza w czasie. Jednak planując poważniejsze inwestycje (np. kupno domu) musimy już tę zmienność uwzględniać. W matematyce finansowej analiza zjawiska zmiany wartości pieniądza jest jednym z najważniejszych problemów, a przyjęte założenia i ich konsekwencje mają istotny wpływ na wnioski dotyczące szerokiej klasy zagadnień ekonomicznych. Problem ten komplikuje dodatkowo fakt, że większość instytucji finansowych operuje czasem bankowym, który często różni się od czasu rzeczywistego zwanego również czasem kalendarzowym. Nietrywialne jest też często uwzględnienie okresów, gdy pewne instytucje są nieczynne lub czynności niemożliwe (np. w nocy). W tym paragrafie omówimy pojęcie czasu bankowego, które ma istotny wpływ na proces kapitalizacji odsetek. Zgodnie z obowiązującym (także w Polsce!) prawem bankowym, rok bankowy ma 360 dni i dzieli się na 12 miesięcy bankowych, o długości 30 dni każdy.

Przykład 2.1 Obliczmy różnicę między czasem bankowym a rzeczywistym w okresie od 01.03.07 do 31.05.07. Według czasu bankowego upłynęły 3 miesiące, czyli 90 dni. W rzeczywistości upłynęło  $31 + 30 + 31 = 92$  dni. Bardziej zaskakujący wynik otrzymamy obliczając tę różnicę dla okresu 29.05.07 do 5.06.07. Czas bankowy to  $(30 - 29) + 5 = 6$  podczas, gdy w rzeczywistości upłynęło 7 dni. Różnica wynosi aż  $1/7$ , czyli około 14,28%!

Różnice obliczone w Przykładzie 2.1 pokazują, że może ona mieć istotny wpływ na koszty kredytu; obrazuje to Tabela 2.1 dla kredytu w wysokości 100000 zł udzielonego na okres od 01.03.07 do 31.05.07 przy rocznej stopie oprocentowania w wysokości 12%. Odsetki  $I$  obliczamy według wzoru

$$I = 100000 \cdot 0,12 \cdot n_x = 12000 \cdot n_x,$$

gdzie  $n_x, x = r$  lub  $x = b$  oznacza współczynniki zamiany dni na lata,  $n_r = \frac{\text{czas w dniach}}{365}$  a  $n_b = \frac{\text{czas w dniach}}{360}$  Banki, których podstawową działalnością jest

wysokość odsetek	$n_r$	$n_b$
czas rzeczywisty	3024,66 zł	3066,67 zł
czas bankowy	2958,9 zł	3000,00 zł

Tabela 2.1: Koszty kredytu w zależności od sposobu obliczania czasu

udzielanie kredytów zainteresowane są naliczaniem odsetek według tak zwanej reguły bankowej: naliczanie dni według czasu rzeczywistego i zamiana dni na lata według czasu bankowego (prawa, górna kratka w Tabeli 2.1).

## 2.2 Przepływy pieniężne

Ogólnie rzecz biorąc, inwestycja to ciąg wydatków i wpływów w rozpatrywanym okresie czasu. Wydatki i wpływy najwygodniej opisuje się w jednostkach pieniężnych to jest w jednostkach wyróżnionego dobra - pieniądza - funkcjonującego na rynku, które jest swobodnie wymieniane na inne dobra<sup>1</sup>.

**Definicja 2.1** Pojedynczy wpływ netto nazywamy przepływem pieniężnym (cash flow). Może on być dodatni lub ujemny. Ciąg przepływów pieniężnych w określonych momentach nazywamy strumieniem przepływów pieniężnych (cash flow stream).

Zauważmy, że przepływy pieniężne mogą być dokładnie określone (np. odestki od lokat) lub niepewne (najczęściej losowe). Dlatego wyróżniamy przepływy deterministyczne i uogólnione (niedeterministyczne). Za pomocą strumieni pieniężnych możemy w miarę jednolity sposób analizować różne klasy problemów dotyczących opisu, oceny i zarządzania inwestycjami. Strumień przepływów pieniężnych najłatwiej opisuje się, gdy poszczególne wpływy są znane. Wtedy, gdy przyjmniemy pewien okres bazowy (np rok), strumień przepływów będziemy zapisywać następująco  $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n)$ , gdzie  $a_0$  jest przepływem w chwili początkowej, a  $a_i$  przepływem po upływie  $i$ -tego okresu bazowego. Gdy przepływy nie następują po jednakowych okresach czasu, wygodnie jest przyjąć za okres bazowy taki okres, by wszystkie przepływy następowały po upływie całkowitych wielokrotności okresu bazowego – wtedy możemy zapis uzupełnić zerami w chwilach, gdy nie ma przepływów.

**Przykład 2.2** Kupno trzyletniej obligacji Skarbu Państwa o nominale 100 złotych opisuje następujący strumień:

$$(-100, a_1, \dots, a_{11}, 100 + a_{12}),$$

<sup>1</sup>Zauważmy, że nie zawsze musi to być możliwe.

gdzie  $a_i$  to odsetki wypłacane po  $i$ -tym kwartale. Pierwszy przepływ jest ujemny, bo wydaliśmy 100 zł na kupno obligacji; po upływie ostatniego okresu bazowego następuje zwrot wartości nominalnej i wypłata odsetek za ostatni kwartał.

### 2.3 Problemy i zadania



## ROZDZIAŁ 3

# Teoria procentu

W niniejszym opracowaniu terminu kapitał używamy w stosunkowo ograniczonym sensie:

Definicja 3.1 Kapitał to dobro rynkowe, które może być wyrażone w dowolnej chwili w jednostkach innych dóbr, które są na tyle płynne by przelicznik między tymi jednostkami nie budził kontrowersji. Jednostkami mogą być np. uncja złota, baryłka ropy naftowej, pieniądz.

Jak mierzyć zysk? – to chyba najbardziej fundamentalne pytanie dla teorii inwestycji. Najprostszą stosowaną miarą zysku jest podawanie względnego przyrostu wartości kapitału. Zwykle podaje się ją w procentach. Procent oznacza jedną setną i w matematyce finansowej pojęcie to jest powszechnie używane do opisu korzyści płynących z użytkowania kapitału. W związku z tym wprowadza się pojęcie kapitalizacji odsetek, które oznacza powiększenie tegoż kapitału o wygenerowane odsetki.

### 3.1 Stopy procentowe

W paragrafie tym omówimy dwie metody obliczania i kapitalizacji odsetek. Zacznijmy od podania definicji:

Definicja 3.2 Stosunek wypracowanych w danym okresie - zwanym czasem oprocentowania - odsetek do kapitału, który je wygenerował nazywamy okresową stopą procentową. Okres ten nazywamy okresem bazowym. Wyjściową wartość kapitału nazywamy kapitałem początkowym, zaś kapitał początkowy powiększony o odsetki nazywamy kapitałem końcowym.

W większości umów między wierzycielem a dłużnikiem to właśnie stopy procentowe są używane do określenia procentu, przy czym stosuje się dwie reguły postępowania: oprocentowanie proste oraz oprocentowanie składane, które omówimy poniżej. Zauważmy jeszcze, że równolegle funkcjonuje jeszcze termin warunki oprocentowania, który został wprowadzony przez banki by zamieszać w głowach

potencjalnych kredytobiorców. Ukrywa on mianowicie wszelkiego rodzaju dodatkowe opłaty mające na celu obejście obowiązującego prawa lub stworzenie pozorów niższej stopy procentowej. Nie wiadomo dlaczego prawodawca pozwala na chwyt – nic nie stoi na przeszkodzie by koszty kredytu opisywać jednym parametrem.

### 3.1.1 Oprocentowanie proste

Oprocentowanie proste jest najprostszą<sup>1</sup> zasadą nalicznia odsetek. Można ją charakteryzować w następujący sposób.

Definicja 3.3 W oprocentowaniu prostym odsetki naliczamy proporcjonalnie do długości okresu oprocentowania. Ogólnie możemy zapisać:

$$V = (1 + nr)K,$$

gdzie  $V$ ,  $K$ ,  $r$  i  $n$  oznaczają, odpowiednio, kapitał końcowy, kapitał początkowy, stopę procentową i liczbę okresów bazowych dla stopy  $r$ . W sytuacji, kiedy czas trwania inwestycji jest krótszy od okresu bazowego, odsetki też naliczamy proporcjonalnie, tzn. po upływie  $f$ -tej części okresu bazowego naliczymy odsetki w wysokości  $fr$ .

#### Przykład 3.1

Definicję 3.3 łatwo można uogólnić na przypadek, gdy stopa procentowa jest zmienna w czasie. Przyjmijmy, że czas oprocentowania kapitału  $K$  wynosi  $n$  okresów bazowych i tworzy go  $m$  następujących po sobie okresów o długościach  $n_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , w których obowiązują stopy procentowe  $r_i$ . Obliczając odsetki proste dla poszczególnych okresów i dodając je otrzymujemy:

$$V = \left(1 + \sum_{l=1}^{l=m} n_l r_l\right) K,$$

#### Przykład 3.2

W przypadku zmiennej stopy procentowej możemy zdefiniować przeciętną stopę procentową  $\bar{r}$ :

Definicja 3.4 Przeciętną stopą procentową nazywa się roczną stopę, przy której kapitał  $K$  generuje w czasie  $n$  odsetki o takiej samej wartości, jak przy danej stopie zmiennej obowiązującej w tym czasie.

<sup>1</sup>Zasada ta jest najprostsza i w wielu przypadkach nawet narzucona systemem prawnym, który wyróżnia tzw. kapitał odsetkowy. Pozwala to na nic niekosztujące odroczenie spłaty. Wady tej nie ma oprocentowanie składane.



Z definicyjnej równości, przyjmując oznaczenia jak wyżej,

$$n\bar{r}K = K \sum_{j=1}^m r_j n_j$$

natychmiast otrzymujemy formułę pozwalającą obliczyć stopę przeciętną:

$$\bar{r} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^m r_j n_j.$$

Zauważmy, że nie zależy ona od wartości kapitału początkowego.

### 3.1.2 Oprocentowanie składane

Definicja 3.5 W oprocentowaniu składanym odsetki są naliczane po upływie z góry ustalonego okresu zwanego okresem kapitalizacji. Wynika stąd, że gdy czas oprocentowania jest dłuższy od okresu kapitalizacji, to odsetki są kapitalizowane wielokrotnie: Ogólnie możemy zapisać:

$$V = (1 + r)^n K,$$

gdzie  $V, K, r$  i  $n$  oznaczają, odpowiednio, kapitał końcowy, kapitał początkowy, stopę procentową i liczbę okresów bazowych dla stopy  $r$ . W sytuacji, kiedy okres kapitalizacji jest krótszy od okresu bazowego, odsetki naliczamy proporcjonalnie, tzn. po upływie  $f$ -tej części okresu bazowego naliczymy odsetki w wysokości  $fr$ .

#### Przykład 3.3

Zauważmy, że różne okresy kapitalizacji mogą utrudnić szybką ocenę warunków oprocentowania podawanych dla różnych okresów bazowych. Z tego powodu często wprowadza się pojęcie równoważności stóp procentowych:

Definicja 3.6 Mówimy, że w oprocentowaniu składanym dwie stopy  $i_1$  oraz  $i_2$  są równoważne jeśli przy każdej z nich odsetki składane po czasie  $t$  są identyczne.

Prosty rachunek przekonuje nas, że pojęcie to jest niezależne od wartości kapitału początkowego ani od czasu oprocentowania. Oznaczając przez  $n_1$  i  $n_2$  ilości okresów bazowych składających się na czas oprocentowania  $t$  otrzymujemy:

$$V_1 = (1 + i_1)^{n_1} K = V_2 = (1 + i_2)^{n_2} K \Rightarrow (1 + i_1)^{n_1} = (1 + i_2)^{n_2}.$$

Przy okazji uzyskaliśmy również formułę opisującą równoważność stóp. Często podaje się tzw. nominalną stopę procentową  $r_{nom}$ , którą definiuje się jako iloczyn stopy procentowej dla danego okresu bazowego przez liczbę okresów bazowych składających się na 1 rok,  $r_{nom}(i_k) = ki_k$ , gdzie  $k$  jest liczbą okresów bazowych składających się na 1 rok. Nie uwzględnia ona okresów kapitalizacji różnych od jednego roku i dlatego może być myląca.

Granicznym przypadkiem oprocentowania składanego jest kapitalizacja ciągła (continuous compounding):

**Definicja 3.7** Przez kapitalizację ciągłą rozumiemy granicę procesu kapitalizacji składanej, w której długość okresu kapitalizacji dąży do zera:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{r}{m}\right)^m = e^r,$$

gdzie  $e$  oznacza stałą Eulera równą w przybliżeniu 2,718...

Warunek równoważności stóp procentowych można rozszerzyć, tak by porównywać kapitalizację ciągłą i składaną dyskretną:

$$(1 + i)^{n_i} = e^{tr_c},$$

gdzie  $n_i$  jest liczbą okresów bazowych składających się na  $t$ . Bezsensowne jest analogiczne porównywanie dla kapitalizacji prostej, gdyż, jak łatwo się przekonać, zależałoby ono od długości okresu oprocentowania.

## 3.2 Dyskonto

Przeanalizowaliś już ogólne zasady zmiany wartości kapitału w czasie spowodowane dopisywaniem odsetek. Obecnie zajmiemy się procesem odwrotnym, tzn. obliczymy jaką wartość posiada w chwili obecnej wypłata, którą otrzymamy (spodziewamy się otrzymać) w przyszłości. Wielkość tą nazywa się wartością obecną (present value – PV) a proces dyskontowaniem (discounting).

## 3.3 Inflacja i realne stopy procentowe

## 3.4 Kapitał jako funkcja czasu

Podumowują rozważania przeprowadzone w poprzednich paragrafach możemy przedstawić modele zmienności wartości kapitału  $K(t)$  z upływem czasu  $t$ . Dla ustalenia uwagi, niech  $t_0$  będzie dowolnym ustalonym momentem (chwila początkową) a  $r$  roczną stopą procentową<sup>2</sup>, a upływ czasu  $t$  będzie mierzony w latach. Wtedy dla dowolnego  $t \in \mathbb{R}$  mamy<sup>3</sup>

Oprocentowanie składane:

$$K(t) = K(t_0)(1 + r)^{t-t_0}$$

Oprocentowanie ciągłe

$$K(t) = K(t_0) \exp r(t - t_0)$$

<sup>2</sup>Oczywiście wzory nie ulegną zmianie jeśli zmienimy okres bazowy i jednostkę czasu

<sup>3</sup> Próby podania takich zależności dla oprocentowania prostego, np.  $K(t) = K(t_0)[1 + r(t - t_0)]^{\frac{t-t_0}{|t-t_0|}}$  są niestety ułomne, mimo że dla dwóch ustalonych momentów  $t$  i  $t_0$  wzór ten poprawnie opsuje zmianę wartości kapitału; por. zadanie 2.

Oczywiście, jeśli  $t < t_0$  to formuły te opisują dyskontowanie. Często formułuje się poniższą zasadę równoważności kapitałów:

Definicja 3.8 Mówimy, że dwa kapitały  $K_1$  i  $K_2$  są równoważne, jeśli ich wartości zaktualizowane w dowolnej chwili  $t \in \mathbb{R}$  są równe. Zauważmy, że równoważność kapitałów zależy od wartości stóp procentowych i sposobu kapitalizacji.

## 3.5 Renty

Definicja 3.9 Renta, to ciąg płatności nazywanych ratami dokonywanych w równych odstępach czasu. Okres pomiędzy dwoma płatnościami nazywamy okresem bazowym.

Wynika stąd, że pełna specyfikacja renty musi uwzględniać okres początkowy (data pierwszej płatności), długość okresu bazowego, liczbę, sposób płatności i wysokość rat. Do wyceny renty niezbędna jest więc znajomość stóp procentowych i zasad naliczania odsetek. W związku z tym rozróżniamy następujące typy rent:

renta prosta – okres bazowy pokrywa się z okresem kapitalizacji odsetek;

renta uogólniona – okres bazowy jest różny od okresu kapitalizacji odsetek;

renta czasowa – to renta o skończonej liczbie rat;

renta wieczysta – to renta o nieskończonej liczbie rat.

Ponadto, ze względu na termin wypłacania rozróżniamy renty płatne z dołu (zwykle) - wypłaty następują na koniec okresu bazowego oraz renty płatne z góry, gdy wypłata następuje na początku okresu bazowego. Naszym głównym celem jest wycena renty oraz analiza płatności, przez co rozumiemy podanie wartości kapitału i przepływów kapitałowych równoważnych danej rencie. W tym celu zdefiniujemy:

Definicja 3.10 Wartością początkową renty nazywamy sumę zaktualizowanych na chwilę początkową wartości rat. Podobnie, wartość końcowa renty to suma wartości rat zaktualizowanych na moment końcowy.

Prosty rachunek uwzględniający zmianę wartości kapitału w czasie prowadzi do następującego wyrażenia na wartość początkową  $V$  renty prostej

$$V = \sum_{j=1}^{j=n} R_j \prod_{k=1}^{k=j} (1 + i_k)^{-1},$$

gdzie  $V$  to wartość początkowa renty,  $i_j$  stopa procentowa w  $j$ -tym okresie, a  $R_j$  to rata wypłacona na koniec  $j$ -tego okresu. W szczególnym przypadku, gdy  $R_j = R$  i  $i_k = i$  dla  $j, k = 1, 2, \dots, n$  otrzymujemy:

$$V = R \sum_{j=1}^{j=n} (1 + i)^{-j}.$$

Wtedy wzory można jeszcze bardziej uprościć, gdyż korzystając ze wzoru na sumę wyrazów postępu geometrycznego  $\sum_{j=0}^{j=n} a_0 q^j = a_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$  mamy

$$\sum_{j=1}^{j=n} (1+i)^{-j} = (1+i)^{-1} \frac{1 - (1+i)^{-n}}{1 - (1+i)^{-1}} = \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i},$$

co, z kolei, prowadzi do formuły:

$$V = \frac{R}{i} \left[ 1 - \frac{1}{(1+i)^n} \right].$$

W przypadku granicznym  $n \rightarrow \infty$  otrzymujemy wartość renty wieczystej

$$V_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R}{i} \left[ 1 - \frac{1}{(1+i)^n} \right] = \frac{R}{i}.$$

Wartość rat wiąże się następująco z wartością początkową i liczbą rat  $n$ :

$$R = \frac{i(1+i)^n V}{(1+i)^n - 1},$$

zaś

$$n = -\frac{\ln(1 - iV/R)}{\ln(1+i)}.$$

Oczywiście wartość końcową renty  $F$  obliczamy mnożąc wartość początkową przez czynnik  $(1+i)^n$ :

$$F = (1+i)^n V = R \frac{(1+i)^n - 1}{i}.$$

Analogicznie obliczamy wartości początkowe i końcowe rent płatnych z góry (rozpatrujemy tu tylko przypadki o stałej racie i stopie procentowej):

$$V^{+1} = R \sum_{j=0}^{j=n-1} (1+i)^{-j} = R \frac{1+i - (1+i)^{1-n}}{i}$$

oraz

$$F^{+1} = (1+i)^n R \sum_{j=0}^{j=n-1} (1+i)^{-j} = R \frac{(1+i)^{n+1} - 1 - i}{i}.$$

Renty płatne z góry są szczególnym przypadkiem tzw. rent odroczonech. Terminem tym określa się rentę zwykłą, w której płatności są odroczone (opóźnione) o  $K$  okresów, gdzie  $K$  jest liczbą naturalną nazywaną karencją. Łatwo wyprowadzamy formuły na wartość obecną (PV) i końcową renty odroczonej o  $K$  okresów (momentem końcowym jest  $t = K + n$  !):

$$PV^{-K} = R \sum_{j=1}^{j=n} (1+i)^{-K-j} = R(1+i)^{-K} \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

$$F^{-K} = R \sum_{j=1}^{j=n} (1+i)^{n-j} = R \frac{(1+i)^n - 1}{i} = F^{-0}.$$

Formuły dla bardziej skomplikowanych sposobów płatności można łatwo wyprowadzić. W szczególności dla niektórych klas rent uogólnionych można podać proste zasady ich zamiany na renty proste. W przypadku , gdy okres bazowy składa się z  $m$  okresów kapitalizacji odsetek możemy po prostu obliczyć stopę procentową  $\bar{i}$  dla okresu bazowego (procent składany):

$$\bar{i} = (1+i)^m - 1$$

Alternatywą jest zmiana liczby i wysokości rat. Korzystając z formuł wyprowadzonych wyżej szybko otrzymujemy:

$$\bar{R} = i \frac{R}{(1+i)^m - 1}$$

oraz

$$\bar{n} = nm.$$

Podobnie możemy postać w przypadku, gdy okres kapitalizacji składa się z  $l$  okresów bazowych. Wprowadzając stopę procentową  $\underline{i}$  dla okresu bazowego renty:

$$\underline{i} = (1+i)^{\frac{1}{l}} - 1$$

definiujemy rentę prostą o tej samej liczbie i wysokości rat, która jest ronoważna wyjściowej rencie uogólnionej. Może też rozważyć rentę prostą wypłacaną tylko dla każdego okresu kapitalizacji. Wtedy:

$$\underline{R} = ((1+i)^l - 1) \frac{R}{i}$$

oraz

$$\underline{n} = \frac{n}{l}.$$

Uogólnienie powyższych formuł, tak by uwzględniały zmienne stopy procentowe nie nastęca żadnych trudności. W praktyce można spotkać wiele innych możliwości wypłacania rent, których nie jesteśmy tu w stanie wyliczyć. Na ogół obliczenie potrzebnych w analizie wielkości nie jest trudne, chociaż wzory mogą być skomplikowane - zwykle korzysta się w tym celu z programów komputerowych wykonywujących błyskawicznie potrzebne obliczenia.

### 3.6 Ratalna spłata kredytu

Wnimmiejszym paragrafie przeanalizujemy problem ratalnej spłaty długu. Udzielenie pożyczki, kredytu itp. jest szczególnym przypadkiem inwestycji: konieczne są więc metody wyceny takiej inwestycji. Będziemy zakładać, że dług zostaje zaciągnięto w chwili  $t_0$  poprzez przekazanie przez inwestora, zwykle zwanego w tym przypadku wierzycielem kapitału  $K_0$  dłużnikowi.. Kapitał ten ma być

zwrócony wierzycielowi w  $n$  ratach  $R_j, j = 1, 2, \dots, n-1, n$  płaconych w jednakowych odstępach czasu zwanych okresem bazowym. Spłata ratalna jest oczywiście szczególnym przypadkiem strumienia przepływów kapitałowych i założenie o równości wszystkich odstępów pomiędzy spłatami nie jest ograniczające – w praktyce zawsze możemy zmniejszyć okres bazowy i wprowadzić dodatkowe raty w wysokości 0. Dla uproszczenia założymy, że stopa procentowa uwzględnia wszystkie koszty obsługi spłaty długu<sup>4</sup>.

### 3.6.1 Spłata długu przy oprocentowaniu prostym

### 3.6.2 Spłata długu przy oprocentowaniu składanym

## 3.7 Zysk i stopy zwrotu z inwestycji

Jednym z głównych celów niniejszego opracowania jest zwięzły opis zysku z inwestycji kapitałowej. Zauważmy, że bezgłębny przyrost wartości kapitału nie wiele mówi o jakości inwestycji, gdyż intuicja podpowiada nam, że zysk w wysokości 1000 zł może być zadawalający lub nie w zależności od początkowej wartości kapitału, a także czasu trwania inwestycji. Obiektywna miara zysku powinna więc nie zależeć od wyboru jednostek kapitałowych<sup>5</sup> W języku matematycznym oznacza to, że powinniśmy podawać iloraz wartości końcowej i początkowej zamiast różnicy tych wartości. Z tego powodu definiuje się stopę zwrotu brutto  $R$

$$R_{t,t+\tau} = \frac{K_{t+\tau}}{K_t},$$

gdzie  $K_t$  i  $K_{t+\tau}$  oznaczają wartość kapitału  $K$  w chwilach  $t$  i  $t + \tau$ . Najczęściej jednak podaje się stopę zwrotu zdefiniowaną jako:

$$r_{t,t+\tau} = \frac{K_{t+\tau} - K_t}{K_t}.$$

Oczywiście obie te wielkości są związane prostą zależnością  $R_{t,t+\tau} = 1 + r_{t,t+\tau}$ . W sytuacjach, gdy okres inwestycji jest jasno określony, wygodne jest opuszczanie wskaźników  $t$  i  $t + \tau$ . Stopy procentowe są szczególnym przypadkiem stóp zwrotu podawanych w procentach. Pożądana byłaby własność by zysk wypracowany w dwóch kolejnych okresach był sumą zysków wypracowanych w tych okresach:

$$R_{t,t+\tau+\rho} = R_{t,t+\tau} + R_{t+\tau,t+\tau+\rho}.$$

Łatwo zauważyć, że powyższa definicja stopy zwrotu nie posiada tej własności. Jeżeli dodatkowo zażądamy by miara zysku była funkcją rosnącą i ciągłą to

<sup>4</sup>Nic nie stoi na przeszkodzie by tak było w praktyce. Banki jednak najczęściej walczą o klienta podając jak najniższe stopy oprocentowania kredytu i ukrywają koszty dodatkowe w nie zawsze uczciwy sposób, np wprowadzanie opłaty za rozpatrzenie wniosku kredytowe, wszelkiego rodzaju opłaty manipulacyjne i prowizje, często zmieniając nazwy i sposób pobierania tych opłat, jeśli prawo zabrania takich czy innych czynności.

<sup>5</sup>Na przykład od wartości początkowej kapitału, itp.

łatwo można pokazać[Fichtenholtz], że logarytm ze stopy zwrotu brutto posiada te własności:

$$\log_a(R_{t,t+\tau+\rho}) = \log_a(R_{t,t+\tau}) + \log_a(R_{t+\tau,t+\tau+\rho}),$$

gdzie  $a$  jest podstawą logarytmu. Jeśli skorzystamy z rozwinięcia funkcji logarytm w szereg

$$\log_a(1 + \epsilon) = \frac{1}{\ln(a)} \left( \epsilon - \frac{\epsilon^2}{2} + \frac{\epsilon^3}{3} + \dots \right)$$

to dla podstawy  $a = e$ , czyli dla  $\ln(a) = 1$

$$\ln(R_{t,t+\tau}) = 1 + r_{t,t+\tau}$$

dla  $r_{t,t+\tau} \rightarrow 0$ . Dlatego definiuje się logarytmiczną stopę zwrotu z inwestycji:

**Definicja 3.11** Niech  $t, v_t, v_{t+\tau}$  oznaczają odpowiednio, chwilę początkową, wartość dobra  $v$  w chwilach  $t$  i  $t + \tau$ . Logarytmiczną stopą zwrotu z inwestycji nazywamy wielkość

$$r_{t,t+\tau}^{\ln} = \ln\left(\frac{v_{t+\tau}}{v_t}\right).$$

W granicznym przypadku definiujemy chwilową stopę zwrotu jako

$$r(t) = \frac{\partial \ln(R_{t,t+\tau})}{\partial \tau}.$$

Algebraiczne i analityczne własności funkcji  $\ln$  i  $\exp$  powodują, że w większości rozważań teoretycznych zakłada się ciągłą kapitalizację. Wtedy wartość dobra  $v$  zmienia się w od przedziale  $[t, t + \tau]$  zgodnie ze wzorem:

$$v(t + \tau) = v(t) \exp\left(\int_t^{t+\tau} r(t) dt\right).$$

czasami definiuje się również tzw. składaną stopę zwrotu, która jest średnią geometryczną stóp  $r_i$  w  $n$  kolejnych okresach bazowych:

$$r_c = [(1 + r_1)(1 + r_2) \cdots (1 + r_n)]^{1/n}.$$

### 3.8 Problemy i zadania

1. Wyprowadzić wzór na stopę przeciętną w przypadku, gdy wszystkie okresy zmiennej stopy mają tę samą długość  $n_j = \frac{n}{m}$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ .
2. Pokazać, że model zmienności kapitału w czasie oparty o zasadę oprocentowania prostego nie spełnia naturalnego żądania by wartość  $K(t)$  była taka sama, jeśli  $t_0$  zastąpimy chwilą  $t_1$ , a  $K(t_1)$  będzie równe zaktualizowanej wartości  $K(t_0)$ .
- 3.





## ROZDZIAŁ 4

# Papiery wartościowe

W rozdziale tym przedstawimy krótkie charakterystyki podstawowych papierów wartościowych wchodzących w zakres zainteresowań matematyki finansowej.

### 4.1 Akcje

Akcja (share), to dokument stwierdzający prawo jej właściciela<sup>1</sup> do udziału w części majątku spółki akcyjnej. Może ona dawać, w zależności od statutu<sup>2</sup> i rodzaju akcji, między innymi prawo do uczestniczenia w podziale zysków, zarządzaniu spółką i podziale majątku w przypadku jej likwidacji.

### 4.2 Obligacje

### 4.3 Fundusze inwestycyjne

### 4.4 Problemy i zadania

---

<sup>1</sup>Zwanego akcjonariuszem

<sup>2</sup>W Polsce regulacje prawne są zawarte w Kodeksie Handlowym.



## ROZDZIAŁ 5

# Instrumenty pochodne

### 5.1 Problemy i zadania



## ROZDZIAŁ 6

# Kontrakty terminowe i opcje

### 6.1 Problemy i zadania



## ROZDZIAŁ 7

# Wstęp do teorii ryzyka finansowego

### 7.1 Problemy i zadania





## ROZDZIAŁ 8

# Wstęp to teorii portfela inwestycyjnego

### 8.1 Problemy i zadania



## ROZDZIAŁ 9

# Organizacja i specyfika polskiego rynku kapitałowego

### 9.1 Problemy i zadania



## ROZDZIAŁ 10

# Ekonofizyka

### 10.1 Problemy i zadania



## ROZDZIAŁ 11

### Rozwiązania i odpowiedzi





# LITERATURA

[Baaquie] R. N. Mantegna, H. E. Stanley, Ekonofizyka: wprowadzenie PWN 2001, (An Introduction to Econophysics CUP 2000).

[Bouchaud] J.-P. Bouchaud, M Potters, Theory of Financial Risks, CUP 2000.

[Fichtenholtz]

[Jajuga] K. Jajuga, T. Jajuga, Inwestycje. Instrumenty finansowe; ryzyko finansowe, inżynieria finansowa, PWN 1996.

[Luenberger] D. G. Luenberger, Teoria inwestycji finansowych, PWN 2003 (Investment Science, OUP 1998).

[McCauley] J. McCauley, Dynamics of Markets. Econophysics and Finance, CUP 2004.

[Podgórska] M. Podgórska, J. Klimkowska, Matematyka finansowa, PWN 2005.

[Weron] A. Weron, A. Weron, Inżynieria finansowa, WNT 1998.

# INDEKS

- akcje, 33
- Centralna Tabela Ofert, 17
- czas
  - bankowy, 19
  - kalendarzowy, 19
- dłużnik, 29
- dług
  - spłata ratalna, 29
- DJIA, 9
- Dow Jones Industrial Average, 9
- dyskonto, 26
- dyskontowanie, 26
- ekonofizyka, 45
- fundusze inwestycyjne, 33
- giełda
  - papierów wartościowych, 8
    - w Warszawie, 9
    - towarowa, 8
- GPWW, 8
- harmonogram sesji, 14
- indeksy giełdowe, 8
- instrument pochodny, 35
- instrumenty finansowe, 7
- kapitał, 23
  - zasada równoważności, 27
  - końcowy, 23
  - odsetkowy, 24
  - początkowy, 23
- kapitalizacja, 23
- kapitalizacja ciągła, 25
- karencja, 28
- kredyt
  - spłata ratalna, 29
- MIDWIG, 9
- miesiąc bankowy, 19
- mWIG40, 9
- NASDAQ, 17
- obligacje, 33
- okres bazowy, 20, 23, 27, 30
- okres kapitalizacji, 25
- oprocentowanie proste, 24
- oprocentowanie składane, 25
- papiery wartościowe, 33
- pieniądz, 20
- przepływ pieniężny, 20
  - deterministyczny, 20
  - uogólniony, 20
- rata, 27
- reguła bankowa, 20
- renta, 27
  - czasowa, 27
  - odroczone, 28
  - okres bazowy, 27
  - płatna z dołu, 27
  - płatna z góry, 27
  - prosta, 27
  - uogólniona, 27
    - zamiana na rentę prostą, 29
  - wartość końcowa, 27
  - wartość początkowa, 27
  - wieczysta, 27
  - wycena, 27
- rok bankowy, 19

- rynek, 7
  - finansowy, 7
  - pozagiełdowy, 17
  - segmenty, 7
- stopą zwrotu
  - logarytmiczna, 31
  - z inwestycji, 31
- stopa logarytmiczna, 31
- stopa procentowa
  - nominalna, 25
  - okres bazowy, 23
  - przeciętna, 24
  - równoważność, 25
  - realna, 26
- stopa zwrotu, 30
  - brutto, 30
  - chwilowa, 31
  - składana, 31
- strumień przepływów pieniężnych, 20
- system notowań ciągłych, 10
- system notowań jednolitych, 12
- S&P500, 9
  
- Teoretycznego Kursu Otwarcia, 10
- TKO, 10
- transakcje pakietowe, 13
  
- WARSET, 9
- wartość obecna, 26
- widelki dynamiczne, 14
- widelki statyczne, 14
- wierzyciel, 29
- WIG, 9
- WIG20, 9
- wycena
  - renty, 27
  
- zlecenie
  - Po Cenie Rynkowej, 15
  - Po Cenie Rynkowej na Otwarcie, 15
  - Po Każdej Cenie, 16
  - rodzaje, 14
  - termin ważności, 16
  - warunki dodatkowe, 16