Edward W. Piotrowski
Instytut Fizyki Teoretycznej
Uniwersytet w Białymstoku

ZAPOMNIANY PIERWOWZÓR DEFINICJI RYZYKA KAPITAŁOWEGO[1]

(RePEc:sla:eakjkl:105PL 9-VIII-1999)

Lichwa jednak nie pociągała za sobą żadnej kary
i procent, choćby największy, sąd mógł uznać za prawny.
Zygmunt Gloger, Encyklopedia staropolska

WSTĘP

W ostatnich latach media odnotowują wyłanianie się nowej dyscypliny naukowej, patrz np. [1], [2]. Nazywana jest ekonofizyką, a zajmuje się stosowaniem technik fizyki do zagadnień ekonomicznych. Poniższe wywody prowadzone są w duchu ekonofizyki i w konsekwencji mogą przyczynić się do nowego spojrzenia na klasyczne zagadnienia matematyki finansowej, która z uwagi na powszechność proponowanych w jej ramach aplikacji, wymaga czytelności i zrozumienia stosownych do swej rangi.

Celem przyświecającym autorowi w trakcie powstawania tego artykułu było wykazanie związku pojęcia ryzyka towarzyszącego decyzjom kapitałowym z pewną klasą problemów znanych z mechaniki klasycznej, które bazują wyłącznie na deterministycznej naturze konstruowanych w trakcie ich rozwiązywania modeli. Czasy w jakich formułowano takie zagadnienia cechowały się brakiem istnienia jakiegokolwiek rozróżnienia pomiędzy mechaniką a matematyką. Nie można wykluczyć, że pierwotnie niżej opisany mechaniczny obraz obejmo-

[1] artykuł opublikowany w „Modelowanie preferencji a ryzyko'99” pod red. T. Trzaskalika, t.1, Akademia Ekonomiczna, Katowice 1999, str. 337-353.

wał swoim zasięgiem także dziedziny racjonalnego poznania dalekie od mechaniki klasycznej.

Współczesne określenie ryzyka związanego z faktem posiadania kapitału najczęściej wiąże się z probabilistycznymi metodami modelowania ruchów cenowych na rynkach kapitałowych [3]. Zdarza się nawet, że autorzy książek (np.[4]) utożsamiają historię badań nad ryzykiem z rozwojem probabilistyki stosowanej. Używając języka geometrii opiszemy pokrótce stochastyczny sposób patrzenia na ryzyko finansowe, wskazując jednocześnie najpoważniejsze (zdaniem autora) z istniejących niejasności dotyczących tej teorii. Pozwoli to m.in. uwypuklić prostotę deterministycznej metody spojrzenia na ryzyko, której poświęcona jest pozostała część artykułu.

1. INDETERMINISTYCZNE MODELE RYZYKA FINANSOWEGO

Wyobrażamy sobie, podobnie jak to czynił Luis Bachelier na początku wieku, że logarytmy cen rynkowych wykonują swoisty jednowymiarowy ruch Browna analogiczny do ruchu drobin pyłu (zjawiska omawianego na lekcjach fizyki w szkole podstawowej). Matematycznie, w najprostszym z przypadków, ruch Browna opisywany jest równaniem dyfuzji, zwanym także równaniem przewodnictwa cieplnego (bądź jego dyskretnymi wariantami, modelującymi błądzenie losowe [3], [4]):

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x,t) = D \Delta f(x,t) .$$

W powyższym zapisie t jest czasem, a $f(x,t)$, dla ustalonej chwili t, ma interpretację gęstości rozkładu prawdopodobieństwa zaobserwowania chaotycznie poruszającego się obiektu w miejscu x.

Zanim wymienimy znaczenie pozostałych symboli przypomnijmy, że fundamentalne rozwiązanie równania dyfuzji na prostej ma postać funkcji Gaussa, co tłumaczy uniwersalność idei dyfuzji w dziedzinach badań statystycznych. Autor prezentowanego tekstu celowo wypisał powyższe równanie bez wyrażenia opisującego dryf, bowiem, pomimo powszechności jego uwzględniania w różnych opracowaniach (np. przy wyprowadzaniu standardowej formuły Blacka-Sholesa [4]), w przypadku niezerowego dryfu pojawia się niepokojący paradoks [5] prowadzący do logicznych sprzeczności o charakterze interpretacyjnym.

Operator Δ zwany laplasjanem (zwykle zastępowany w modelach jednowymiarowego błądzenia operacją dwukrotnego różniczkowania $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$, gdzie zmienna x jest logarytmem interesującej nas ceny dobra rynkowego) jest prawidłowo określony jedynie na rozmaitościach zaopatrzonych w strukturę metryczną. Fakt ten powinien prowadzić do badań własności metrycznych przestrzeni parametrów cenowych (kursowych), która wydaje się mieć już sama w sobie strukturę geometryczną (posiada cechy przestrzeni rzutowej [6]). Dla metrycznych struktur riemannowskich operator Laplace'a w przypadku wielowymiarowym (kilka parametrów cenowych $\{x_k\}$ charakteryzuje poszczególne dobra rynkowe) zadaje de facto formuła

$$\Delta := \sum_{i,j} g_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$$

w której konkretny wybór elementów tensora metrycznego $g_{ij}(x)$ powinniśmy zawsze usprawiedliwić operując argumentami ekonomicznymi. Z przeprowadzonych analiz wynika [8], że postać macierzy $g_{ij}(x)$ w typowych sytuacjach rynkowych wyznacza strukturę nieeuklidesowej geometrii hiperbolicznej. Ciekawostką jest, że dla najprostszego przypadku rynku dwóch dóbr istnieje naturalny opis cen oraz portfeli posiadający metryczną strukturę rzutową, dostrzeżoną na początku stulecia przez V. Varičaka [9] i A. Sommerfelda [10] w szczególnej teorii względności.

Można wskazać elementarne przykłady pewnych metrycznych problemów rynkowych [8] o symetrii wymuszającej metryzację taką, że odległości pomiędzy punktami-cennikami (czy punktami-koszykami dóbr) nie zadaje już lokalnie dobrze określona symetryczna forma kwadratowa – tensor metryczny. Niejasny jest wtedy sposób konstruowania operatora Laplace`a, zaś w bogatej literaturze matematycznej brak na temat tej konstrukcji jakichkolwiek wskazówek.

Współczynnik dyfuzji D, mierzący ruchliwość punktu-ceny (notowania) na krzywej logarytmów cen (np. kursów akcji) wyraża w standardowej teorii ryzyko związane z posiadaniem danego typu kapitału, i bardzo często różni się dla różnych typów kapitału. Znajomość współczynnika dyfuzji (ryzyka) D dla portfeli złożonych z różnego typu składników kapitałowych (dóbr) pozwala minimalizować ryzyko przy ustalonej rentowności portfela poprzez przegrupowania prowadzące do zmiany proporcji składników portfela [6]. Dziedzina ta zwana jest teorią portfela.

Scharakteryzowane wyżej ujęcie zagadnienia ryzyka opiera się na paradygmacie metod probabilistycznych. W poniższym opracowaniu autor odchodzi od tego podejścia proponując spojrzenie na problem ryzyka, które operuje odmiennym kontekstem, gdy język opisu zagadnień finansowych nie wykracza poza wyobrażenia deterministyczne, a interpretacja probabilistyczna nie jest konieczna dla zrozumienia modelu.

Na początek rozważmy pewną scenkę, która powinna ułatwić rozpoznanie różnych aspektów analizowanego dalej problemu.

2. PROBLEM ŻONGLOWANIA

– Żołnierzu, dlaczego pociski armatnie pozostały po tej stronie przepaści?
– Kładka wytrzyma ciężar mojej osoby tylko wtedy, gdy będę przenosić najwyżej jeden pocisk, a pocisków jest wiele do przeniesienia, generale.
– Więc żongluj, durniu!

Interesujący nas problem dotyczący tej scenki można zawrzeć w pytaniu: *czy koncept generała jest dobrym pomysłem?* W ten, lub w podobny sposób postawione zagadnienie jest szeroko znanym wśród fizyków zadaniem o żonglowaniu, którego początków należy doszukiwać się w odległej przeszłości kształtowania się treści drugiej zasady dynamiki Newtona stanowiącej podstawę mechaniki klasycznej, a znanej wszystkim ze szkolnego kursu fizyki.

Z zasad Newtona wynika, że (poprzestając na rozważaniu składowej pionowej ruchu) zmiana pędu przenoszonych pocisków, o łącznym ciężarze Q, wyniesie:

$$dp = (Q - f(t))dt\,,$$

gdzie $-f(t)$ jest siłą reakcji żołnierza na pociski, więc także kładki na pociski.

Tak przed, jak i po przeniesieniu, pociski artyleryjskie będą spoczywać na ziemi, czyli ich pęd nie dozna zmiany na skutek tej operacji, co wyraża następująca całka:

$$p(T) - p(0) = \int_{p(0)}^{p(T)} dp = \int_0^T (Q - f(t))dt = 0$$

gdzie T jest czasem przejścia przez kładkę. Konsekwencją ostatniej równości jest stwierdzenie, że średni w okresie czasu T nacisk przenoszonych pocisków na kładkę jest równy ich ciężarowi:

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt = Q.$$

Minimaksowa, czyli najmniejsza z możliwych, maksymalna wartość tego nacisku w trakcie przechodzenia przez kładkę jest równa całkowitej wadze pocisków. Dowód tego stwierdzenia jest oczywistym wnioskiem wynikającym z elementarnej własności wartości średniej (tzw. twierdzenia o wartości średniej):

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt \leq f_{\max} := \max_{0\leq t\leq T}[f(t)].$$

Jakiekolwiek żonglowanie pociskiem(-ami) zwiększy jedynie maksymalną z wartości sił nacisku żołnierza na kładkę, co w najlepszym przypadku zwiększy ryzyko zerwania kładki.

Wyjaśnijmy opisaną sytuację mniej lakonicznie. Fizyczny kontekst naszego zadania powoduje, że rozwiązujący je próbuje określić największą wartość siły nacisku na kładkę bowiem, by przenoszenie pocisków było wykonalne, liczba ta musi być mniejsza od minimalnej siły powodującej zerwanie kładki. Dla różnych sposobów przenoszenia pocisku (zadanych jednoznacznie konkretnym kształtem funkcji $f(t)$) zagrożenie (ryzyko) zerwania kładki można mierzyć wartością $f_{\max}$ wyznaczoną dla poszczególnego sposobu. Stąd już prosty wniosek, że najlepszą metodą skutecznego transportu pocisków jest zrezygnowanie z żonglowania – wtedy $f_{\max}$ jest najmniejsza. Naturalną metryką mierzącą odległość (w stopniu zagrożenia) pomiędzy dwoma sposobami przenoszenia pocisku jest wartość bezwzględna różnicy wyznaczonych dla nich liczb $f_{\max}$. Taki pomiar ryzyka, jak i zastosowany wariant zasady minimaksu (obrazujący „preferencje" mechanizmu zrywającego kładkę w sytuacji pojawiającego się przeciążenia) wynikają z elementarnej wiedzy o wytrzymałości materiałowej i stanowią dodatkowe założenia, przyjęte po uprzednim zastosowaniu zasady mechanicznej Newtona.

Piękno rozwiązania problemu żonglowania wynika z faktycznego wzięcia pod uwagę, w trakcie rozwiązywania zadania, wszystkich możliwych sposobów żonglowania (dowolnie skomplikowanych przebiegów funkcji $f(t)$). Tak szeroką analizę zagadnienia umożliwił przyjęty tok rozumowania, który nie wymaga znajomości jawnych postaci tych funkcji.

Mimo powszechnej znajomości praw mechaniki pomysł generała nie spotyka się z kompromitacją, bowiem fizyka uważana jest za dyscyplinę niepraktyczną, a generał, sugerując niezręczność samego poszkodowanego, łatwo obarczy go ewentualnymi tragicznymi konsekwencjami żonglowania.

3. KAPITAŁOWE ODPOWIEDNIKI ZASAD DYNAMIKI

Przyjmijmy, że słowo *lichwa* oznacza dowolny proces przekazania kapitału, w zamian za co pożyczający zobowiązuje się dokonać w późniejszych terminach wypłat kapitału pożyczkodawcy, które w rozumieniu zawieranej umowy powinny uzasadnić pożyczkę, czyniąc ją usługą rynkową, wolną od jakiegokolwiek przymusu. W ostatnich stuleciach pejoratywne znaczenie słowa *lichwa*, sugerujące nieuczciwość tego przedsięwzięcia, nie było akceptowane przez regulacje rządzące długami kapitałowymi. Świadczy o tym zacytowane na początku tekstu zdanie z *Encyklopedii staropolskiej* Glogera. Dlatego wydaje się możliwym do przyjęcia użycie określenia *lichwa* w powyżej zaproponowanym znaczeniu.

Dopuśćmy, aby spłata kapitału występująca w lichwie mogła mieć (lecz niekoniecznie musiała mieć) charakter statystyczny, podobnie jak i pożyczka. Lichwą w tym rozumieniu słowa jest więc weksel, kredyt, obligacja, akcja, kontrakt terminowy, opcja, ale też umowa ubezpieczenia, zakład bukmacherski, czy wreszcie tak pozornie odmienny proces jak podział kapitału [11]. W czysto kredytowym modelu Wicksella [13], gdzie pieniądz jest jedynie przyrzeczeniem, wszystkie transakcje rynkowe posiadają znamiona lichwy. Przeprowadzona we wcześniejszym opracowaniu klasyfikacja podstawowych form kredytów niestatystycznych opiera się na interesującym zjawisku algebraicznej dwoistości lichwy [14].

Powyższe *zadanie o żonglowaniu* zostało zaprezentowane po to, by służyło jako metafora obrazująca istotę najbezpieczniejszej techniki lichwy, którą zdaniem autora trudno jest celniej uzasadnić, bowiem idea leżąca u podstaw problemów fizycznego i kapitałowego jest taka sama. Interesującym będzie wskazać pełny izomorfizm pomiędzy lichwą, a opisanym tu zagadnieniem żonglowania. W tym celu utożsamimy fizyczny pęd $p_\tau(t)$ z kapitałowym stanem posiadania (bądź zadłużenia w przypadku wartości ujemnych) w chwili t pewnej osoby, zwanej dalej *lichwiarzem*, wyrażony w dowolnych jednostkach kapitałowych – np. w złotych w z góry ustalonej chwili przeszłej (bądź przyszłej) τ – i nazwijmy go skrótowo *stanem konta*. Niech teraz $f_\tau(t)$ oznacza zdyskontowaną do chwili τ wartość natężenia przepływu kapitału na, bądź z konta. Natężenie to dotyczy chwili t, czyli nominalna wartość przepływu kapitału mierzona w chwili przepływu t wynosi $U(t,\tau)f_\tau(t)$. Funkcja $U(\tau,t)$ to czynnik multiplikatywny, uwzględniający procent o jaki wzrośnie do chwili t kwota f_τ wcześniej zdyskontowana do chwili τ (czynnik $U(t,\tau)$ można traktować jako użyteczność kapitału dla lichwiarza, zob. [14]). W Dodatku zostały przedstawione własności, które spełnia funkcja $U(t,\tau)$. Znane z literatury finansowej pojęcie strumienia przepływu kapitału zarezerwujemy dla oznaczenia wielkości będących przestrzennymi całkami po $f_\tau(t)$ (sumami po wielu jednoczesnych procesach przepływu), co jest zgodne z nazewnictwem fizycznym. Ekonomicznym odpowiednikiem drugiej zasady dynamiki okazuje się proste w swej treści stwierdzenie, że prędkość zmian stanu konta równa jest natężeniu przepływającego przez nie kapitału, czyli

$$\frac{dp_\tau(t)}{dt} = f_\tau(t)\,. \tag{3.1}$$

Elementarną konsekwencją tego prawa jest niewrażliwość opisu przepływów kapitałowych na korektę stanów konta o dowolną stałą $p_\tau(t) \mapsto p_\tau(t) + constans$. Drugą zasadę można sformułować w postaci całkowej, gdzie wyraża się następującą formułą

$$p_\tau(t_2) - p_\tau(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} dp_\tau = \int_{t_1}^{t_2} f_\tau(t)dt\,.$$

W swojej całkowej formie równanie (3.1) jest *zasadą zachowania kapitału* głoszącą, że różnica w stanie konta jest zawsze wynikiem zbilansowania zachodzących na koncie przepływów kapitałowych.

Dla kompletności przeprowadzanych rozważań można jeszcze zinterpretować I i III zasadę dynamiki Newtona. Pierwszej zasadzie odpowiada stała postać rozwiązania równania (3.1) dla przypadku $f_\tau(t) \equiv 0$, stwierdzająca że stan konta nie ulega zmianie, gdy natężenie przepływu kapitału jest zerowe. Podobnie jak ma to miejsce w fizyce, taką własność opisu kapitału powinniśmy traktować jako postulat o istnieniu konsystentnych zestawów funkcji użyteczności (które są odpowiednikami układów inercyjnych), umożliwiających posługiwanie się przedstawionymi tu zasadami. W tym sensie I zasada ma względem pozostałych zasad mechaniki znaczenie komplementarne.

Analogon trzeciej zasady Newtona (o akcji i reakcji) głosi, że *natężenie kapitału* $f_{B\mapsto A}$ *wpływającego na konto osoby* A *a pochodzącego od osoby* B *musi być zrównoważone natężeniem* $f_{A\mapsto B}$ *pochodzącym od osoby* A *i wpływającym na konto osoby* B, czyli

$$f_{A\mapsto B} + f_{B\mapsto A} = 0\,. \tag{3.2}$$

Równanie (3.2) nie jest jednak równaniem bilansu. Bilansem (w finansowym znaczeniu tego słowa) jest II zasada. Bilansując kapitał bierzemy pod uwagę wszystkie wpływy i wypływy zmieniające stan jednego konkretnego konta, zaś w przypadku III zasady odnosimy się do przepływów pomiędzy różnymi, powiązanymi ze sobą kontami. Przy tym w równaniu (3.2) należy pamiętać, by natężenia przepływów wyrażone były względem tej samej funkcji użyteczności. Model mechaniczny także jest opisywany jednym, dowolnie wybranym układem inercyjnym. Tak brzmiąca zasada stanowi wariant popularnego stwierdzenia o rynkach finansowych, głoszący nieistnienie zjawiska darmowego obiadu (*no free lunch theorem*). Występowanie, dla pewnego podmiotu rynkowego, niekompensujących się natężeń prowadziłoby do natychmiastowego zysku z arbitrażu. Ów proces przywróciłby pełne zbilansowanie dla tak utworzonego rozkładu natężeń. W poniżej przedstawionym przykładzie przekonamy się, że wystarczy, aby ekonomiczny wariant trzeciej zasady był spełniony jedynie w sensie statystycznym, obowiązując dla wartości oczekiwanych z natężeń przepływów kapitałowych. Ktoś może zjeść darmowy obiad, ale ktoś inny (niekoniecznie tego świadomy) musi kiedyś za ów dodatkowy obiad zapłacić. W ekonomii zasada akcji i reakcji jest mniej kategoryczna niż w mechanice. Dla rynków efektywnych można stosować pośrednią między podanymi (w sensie kategoryczności sformułowania) wersję III zasady przyjmującą, że natężenia przepływów kapitałowych są rezultatem procesów stochastycznych będących martyngałami [15]. O uniwersalizmie twierdzenia typu *no free lunch theorem* niech świadczy jego pojawienie się w gałęzi badań interdyscyplinarnych, jaką jest teoria algorytmów [16].

W ten sposób została wykazana odpowiedniość pomiędzy mechaniką klasyczną punktów materialnych, a opisem dowolnej postaci lichwy. Obszerne omówienie uogólnienia takiego modelu lichwy na przypadki, w których natężenia przepływów kapitałowych są formami liniowymi na wielowymiarowej przestrzeni kont, zostało przedstawione w pracy [12].

Warto w tym miejscu dodać, że zastosowana w odpowiednikach zasad mechaniki konwencja spłaty lichwy jest tzw. *konwencją z kapitalizacją* [14]. Jest ona sposobem rozliczania umowy lichwy według standardu, w którym koszty kredytowania są uwzględnione przez stosownie określonego czynnika dyskontującego $U(\tau,t)$ (będącego użytecznością kapitału dla strony dyktującej umowę lichwy) i uiszczane w chwilach zwrotu odpowiednich rat.

Przyjętym standardem podręcznikowym opisywania kredytów, stanowiących najczęściej omawianą formę lichwy, zob.np.[17], jest *konwencja bez kapitalizacji* [14]. Polega ona na interpretacji spłaty kapitału lichwy w ratach uznającej, że nominalna wysokość poszczególnej raty długu nie narasta z upływem czasu, zaś koszty kredytowania (ujęte w dyskoncie) stanowią odrębną formę kapitału, proporcjonalną do długu i spłacaną na bieżąco w formie odsetek.

Natężenie przepływu kapitału opisywanego w konwencji bez kapitalizacji oznaczymy przez $\underline{f}(t)$. Związek pomiędzy tymi dwoma konwencjami przybiera najbardziej zwartą formę jeżeli zapiszemy go w następującej postaci

$$\underline{F}(t) = U(t,\tau)F_\tau(t)\,, \tag{3.3}$$

gdzie τ jest chwilą czasu względem której dyskontowane są stany konta i natężenia przepływu kapitału, zaś symbole $F_\tau(t)$ oraz $\underline{F}(t)$ wyrażają pozostałą do spłacenia lichwiarzowi ilość kapitału, odpowiednio w konwencjach z kapitalizacją i bez kapitalizacji. W przypadku interpretacji probabilistycznej opisu lichwy wielkości te są proporcjonalne do dystrybuant rozkładów prawdopodobieństw zdefiniowanych względem chwili T zakończenia lichwy. Związki między natężeniem przepływu kapitału a pozostałą ilością kapitału pozostającego do spłacenia mają więc postać

$$F_\tau(t) = \int_t^T f_\tau(w)dw \qquad , \qquad f_\tau(t) = -\frac{dF_\tau(t)}{dt}$$

i w konwencji bez kapitalizacji są takie same.

W bieżącym paragrafie nie miało znaczenia, czy wielkości takie jak p_τ i f_τ dotyczą jednego, czy więcej dóbr. Sformułowane zasady są prawdziwe dla modeli w przestrzeniach liniowych R^n o dowolnym wymiarze. Istotną modyfikacją jest wtedy możliwość pojawienia się stopy macierzowej [12], dyskontującej użyteczność dóbr. Wtedy, dla osobliwych macierzy użyteczności, zachowane będą jedynie własności półgrupy.

Zależność (3.3) w wariancie dyskretnym została wykazana w pracy [14]. Ze względu na obszerność zagadnienia pełne omówienie powiązań ilościowych między wielkościami opisującymi lichwę w obydwu konwencjach kapitalizacyjnych, modelowanych na dziedzinie czasowej ciągłej, zostanie zamieszczone w odrębnym opracowaniu.

4. NAJBEZPIECZNIEJSZA FORMA LICHWY

Rozważmy dalsze podobieństwa pewnych typów lichwy do zadania o żonglowaniu. W przypadku najprostszego, dyskretnego modelu spłat natężenie $f_\tau(t)$ jest uogólnioną funkcją (w argumencie t), równą kombinacji liniowej kilku miar δ Diraca (*delt Diraca*, patrz np.[18], [19]) o nośnikach w punktach reprezentujących kolejne momenty spłat i współczynnikach równych zdyskontowanym do jednej chwili (np. τ) wysokościom kolejnych rat

$$f_\tau(t) = \sum_{l=0}^{N} \varphi_\tau(l) \cdot \delta(t - t_l)\ ,$$

gdzie $\varphi_\tau(l) = U(\tau, t_l)\varphi(l)$, zaś $\varphi(l)$ jest nominałem l-tej raty spłaty. Liczba N stanowi ilość wszystkich rat.

Przyjmijmy naturalne, choć niekonieczne założenie, że $\varphi_\tau(0)$ wyraża wysokość udzielonej pożyczki i jest liczbą ujemną, $\varphi_\tau(k)$ dla $k = 1, \ldots, N$ są zdyskontowanymi do chwili τ kolejnymi ratami spłaty (liczby dodatnie), oraz że pożyczka jest zbilansowana z punktu widzenia lichwiarza, czyli że

$$p_\tau(T) - p_\tau(0) = \int_0^T f_\tau(t)dt = \sum_{l=0}^{N} \varphi_\tau(l) = 0\ .$$

Analogonami dodatkowo uwzględnionego ciężaru $Q(t)$ z zadania o pociskach byłyby w tym przypadku dowolne, nie objęte umową lichwy, natężenia przepływu płatności przez konto lichwiarza. Dla dbałości o prostotę przykładu zaniedbujmy owe zbędne komplikacje. Niech preferencje lichwiarza będą minimaksowe, tzn. niech zabiega on o taką umowę lichwy, by ewentualna największa z możliwych strat, polegająca na nieoddaniu mu raty długu, była najmniejsza. Minimalna strata występuje dla wszystkich rat jednakowo użytecznych (patrz wyżej stosowane twierdzenie o wartości średniej). Wtedy umowa lichwy będzie miała postać

$$\varphi_\tau(k) = \text{constans}_\tau = \frac{1}{N}\sum_{l=1}^{N}\varphi_\tau(l)$$

dla $k = 1,\ldots,N$.

Jest to lichwa o najmniejszym ryzyku dla lichwiarza w kontekście jego preferencji. Standardowo nosi ona nazwę kredytu o realnie stałych ratach spłaty – dwoistym do tego rodzaju lichwy jest kredyt o nominalnie stałych ratach kapitałowych, czyli w praktyce najpopularniejszy spośród wszystkich rodzajów kredytu.

Za naturalną miarę ryzyka dowolnej umowy lichwy przy minimaksowych preferencjach lichwiarza może np. posłużyć średnie odchylenie kwadratowe ciągu spłat $\{\varphi_\tau(k)\}$ od jego wartości średniej, por. klasyczny artykuł H. Steinhausa [20]. Oczywiście taka miara gwarantuje, że najbardziej bezpieczną jest spłata długu nie pozwalająca na żadne żonglowanie polegające na przyjmowaniu różnych wartości realnych dla kolejnych rat spłaty. W cytowanej pracy Steinhaus wyjaśnia, w jaki sposób w podobnych modelach zmiana preferencji wpływa na definicję stosownej miary ryzyka, tak więc możemy określić miary ryzyka dla przypadków odmiennych preferencji lichwiarza, lub miary ryzyka dla osoby zaciągającej dług, gdy $U(\tau,t)$ jest funkcją użyteczności dłużnika. Wtedy w rachunkach należy uwzględnić zmianę stanu konta po pełnym procesie lichwy

$$p_\tau(T) - p_\tau(0) = \int_0^T f_\tau(t)dt = \sum_{k=0}^{N}\varphi_\tau(k) \neq 0 ,$$

gdyż stosowne bilansowanie pożyczki zachodzi jedynie dla użyteczności lichwiarza. Ten drugi wariant miar ryzyka jest równie ważny, bowiem często umowę lichwy dyktuje osoba zaciągająca dług (np. w przypadku emisji obligacji, czy wystawienia polisy ubezpieczeniowej).

Przedstawiona tu wersja zasady najmniejszego ryzyka (obejmująca m.in. klasę problemów minimaksowych) opisuje wiele sytuacji spośród zjawisk przyrodniczych i społecznych, których przykłady - znając istotę zadania o żonglowaniu - łatwo mnożyć, więc posługiwanie się ową zasadą nie powinno wywoływać jakichkolwiek kontrowersji. Równoważne rachunkowo omówienie problemu, odnoszące się jednak do zagadnień probabilistycznych, można odnaleźć w artykule Steinhausa [20].

5. PRZYKŁAD LICHWY STATYSTYCZNEJ: UBEZPIECZENIA KAPITAŁOWE

Autor pozostawia zainteresowanym sprecyzowanie stosownych interpretacji ekonomicznych, powstałych przez traktowanie natężeń $f_\tau(t)$ (w modelach dyskretnych $\varphi_\tau(k)$) jako wielkości stochastycznych. Analogie w bogatym wachlarzu zastosowań probabilistyki powodują, że czynności takie stanowią przyjemne, skazane na sukces doświadczenie. Przejdźmy zatem od razu do przykładu lichwy statystycznej tak dobranego, aby maksymalnie uprościć tło czasowe modelu eksponując jego aspekty losowe. Uogólnienie problemu na ciągłą dziedzinę zdarzeń można otrzymać opierając się na pracy [7], gdzie przedstawiono formuły prowadzące w szczególnym przypadku do poniższych wzorów.

Załóżmy, że ubezpieczony zaangażował swój kapitał p w opłacalne, lecz ryzykowne przedsięwzięcie, więc ubezpieczył go na sumę $a \cdot p \geq 0$. W wyniku zdarzenia k ($k = 1, \ldots, N$) przedsięwzięcie to daje finalny kapitał l_k, po zdyskontowaniu do chwili początkowej równy kapitałowi wyjściowemu $p = e^{-r_k} \cdot l_k$, czyli $l_k = e^{r_k} \cdot p$, gdzie logarytmiczna stopa procentowa r jest zmienną losową, której wartość r_k pojawia się z prawdopodobieństwem P_k. Na skutek tegoż zdarzenia ubezpieczyciel wypłaca ubezpieczonemu kwotę $h_k \cdot p \geq 0$, która, po zdyskontowaniu zgodnym ze stopą ubezpieczyciela, wynosi $\varphi_1(k) = e^s \cdot h_k \cdot p$ (stopa asekurującego s nie jest zmienną losową). Dla wygody wielkości h_k zostały wybrane tak, aby mierzyły wysokość odszkodowania przypadającego na jednostkę ubezpieczonego kapitału.

Zwróćmy uwagę, że w zagadnieniach asekuracyjnych ubezpieczyciel jako lichwiarz pożycza ubezpieczonemu ujemny kapitał.

W lichwach statystycznych wymagamy, by odpowiednik III zasady Newtona był dla lichwiarza prawdziwy jedynie w sensie wartości średnich. Asekurujący przyrzeka skrzywdzonemu przez los ubezpieczonemu darmowy obiad, jednak dywersyfikuje ryzyko takiego zdarzenia likwidując swoje straty poprzez rozproszenie pochodzącego ze składek kapitału na dużą liczbę ubezpieczonych. W tym przypadku trzecia zasada stwierdza, że

$$E[\varphi_1(k)] = a \cdot p \,,$$

gdzie $E[x]$ oznacza wartość oczekiwaną zmiennej losowej x. Po przekształceniu otrzymamy, że

$$e^{s} \cdot \sum_{k} h_k \cdot P_k = a \,. \tag{5.1}$$

Pełny kapitał ubezpieczającego się wynosił $p_0(0) = \underline{p}(0) = (1+a) \cdot p$, by po wypłacie odszkodowania mieć wartość nominalną

$$U(t,0) \cdot p_0(t) = \underline{p}(t) = l_k + h_k \cdot p = (e^{r_k} + h_k) \cdot p \,.$$

W przyjętej przez ubezpieczonego mierze użyteczności (czyli w jego układzie odniesienia) przedsięwzięcie winno się bilansować, dlatego na podstawie drugiej zasady wnioskujemy, że

$$0 = \int_0^T f_0(t)dt = p_0(T) - p_0(0) = U(0,T) \cdot (e^{r_k} + h_k) \cdot p - (1+a) \cdot p \,.$$

Powyższy bilans był dyskontowany na moment zawierania umowy. Dla tego celu chwila $t = 0$ jest równie dobra jak każda inna. Ponieważ $U(0,T) = e^{-R(h_k)}$, więc logarytmiczna stopa zysku ubezpieczonego (z przedsięwzięcia kapitałowego uwzględnianego łącznie ze składką ubezpieczeniową) wynosi

$$R(h_k) = \ln(e^{r_k} + h_k) - \ln(1+a) \,.$$

Z pozycji użyteczności ubezpieczyciela, czy użyteczności osoby trzeciej konto ubezpieczonego nie musi się bilansować. Zbilansowanie jest konieczne w przypadku ubezpieczonego, bowiem stanowi ono jedyny sposób pomiaru użyteczności kapitału. Użyteczność nie jest miarą subiektywnego sądu podmiotu rynkowego. Jest ona wynikiem rozrachunku jego obiektywnych decyzji, oraz niezależnych od niego sytuacji rynkowych, generujących wszystkie natężenia przepływów, oddziaływujące bezpośrednio na stan jego konta. Tyle możemy wywnioskować z odpowiedników zasad mechanicznych (I zasada uprawniła nas do przeprowadzenia przedstawionych kalkulacji).

Załóżmy teraz, że rynkowo najbardziej atrakcyjnym jest wybranie ze wszystkich zbiorów odszkodowań $\{h_k\}$ takiego sposobu wypłaty $h^* := \{h_k^*\}$, który gwarantuje statystycznie najwyższy z możliwych zysk ubezpieczonego. To potrzebujący wybiera ubezpieczalnię, zaś konkurującą na rynku ubezpieczalnię interesuje przede wszystkim przeciętny poziom zadowolenia klienta. Ubezpieczalnia powinna wybrać zbiór odszkodowań h^* spełniających warunek (5.1), przy którym średnia logarytmiczna stopa zysku klienta jest najwyższa

$$R(h^*) = \max_{\{h_k\}}\{E[R(h_k)]\}.$$

Rozwiązanie tego zadania na ekstremum warunkowe jest następujące

$$h_k^* = \max\{0, e^{-s}(1+a^*) - e^{r_k}\},$$

gdzie $a^* = e^s \cdot \sum_k h_k^* \cdot P_k$, więc powyższa formuła ma charakter rekurencyjny. Jednak nie stanowi to problemu obliczeniowego przy ustalaniu optymalnych stawek odszkodowań $\{h_k^*\}$ w konkretnym przypadku wag P_k i stóp zysku r_k dla różnych wariantów przedsięwzięcia kapitałowego. Praktyka ubezpieczeń kapitałowych niewiele odbiega od wyżej wypisanego rozwiązania optymalnego, które nakazuje (dla $s = 0$), by przy ruinie przedsięwzięcia ($r_k \to -\infty$) wypłacić pełne odszkodowanie z nawiązką, równą poniesionym wydatkom na ubezpieczenie, zaś w przypadku wyraźnego sukcesu kapitałowego ($l_k \geq (1+a^*)\cdot p$) nie wypłacać nic.

Jeżeli bezmyślnie przyjąć w prezentowanym przykładzie minimaksowe preferencje optymalnego kredytowania, otrzymane rozwiązanie byłoby całkowicie rozbieżne z ideą ubezpieczenia. Odszkodowania h_k utraciłyby zależność od stóp zysku ubezpieczonego r_k. Przyczyną dla której decydujemy się na ubezpieczenie kapitału nie jest bezpieczeństwo składki, czy awersja do ryzyka (bo mogłaby być nieopłacalna), lecz jedynie pragnienie maksymalizacji oczekiwanego zysku, co dobitnie ukazuje postać znalezionego optymalnego rozwiązania h^*. Interesującym byłoby znalezienie miary ryzyka niezmienniczej przy operacji transferu ryzyka, następującego podczas zawierania umowy ubezpieczenia, w przypadku braku możliwości dywersyfikacji ryzyka z powodu wielości umów. Rynkowa wartość stopy s wyznaczyłaby wtedy koszty ponoszenia tak mierzonego ryzyka.

Na koniec warto zapytać o najwyższą dopuszczalną stopę ubezpieczalni s^*, przy której $R(h^*, s^*) = 0$. Jest ona dana wzorem

$$s^* = \frac{\sum_k^{'} (r_k - \ln(1 + a^*)) P_k}{\sum_k^{"} P_k}.$$

Sumowanie $\sum_k^{'}$ przebiega te indeksy k, dla których $h_k^* = 0$, a $\sum_k^{"}$ pozostałe przypadki, wtedy gdy $h_k^* \neq 0$. Zysk ubezpieczalni powyżej stopy s^* spowoduje statystycznie widoczną stratę ubezpieczających się i powinien skutkować zjawiskiem zaniku omawianego typu lichwy.

Ubezpieczenie dotyczyło przedsięwzięć kapitałowych, więc statystyczny brak zysku będzie skutecznie do niego zniechęcał. Każde rozwiązanie s_0 równania $R(h,s) = 0$ względem stopy s posiada własność $s_0 \leq s^*$, dlatego empatia lichwiarza względem ubezpieczonego, wyrażającą się jego propozycją optymalnego scenariusza odszkodowań h^*, skutkuje możliwością zwiększenia zysku ubezpieczonego. Pomimo antagonizmu graczy asekuracja kapitałowa nie jest grą o sumie zerowej, zaś maksymalizacja tej sumy leży w interesie obydwu stron umowy.

PODSUMOWANIE

Poznawanie przy pomocy porównywania przez szukanie analogonów było i pozostanie fundamentalną metodą badania rzeczywistości. W czasach pogłębiającej się specjalizacji uczonych, gdy problemy techniczne zajmujących ich zagadnień powodują zjawisko utraty komunikacji pomiędzy różnymi dziedzinami wiedzy, uchwycenie podobieństw budowy modeli wyjaśniających naturę odległych od siebie zjawisk może przynieść wielorakie korzyści. Zadanie o żonglowaniu i analogiczne do niego zagadnienie najbezpieczniejszej lichwy wyraźnie obrazuje, że problem ryzyka odnosi się do wielu kontekstów deterministycznych, w których ryzyko nie posiada koniecznego tła zjawisk przypadkowych.

Zaproponowany sposób myślenia, oparty na analogonach zasad mechaniki klasycznej, zachowuje swoją atrakcyjność przy stosowaniu go w kontekście problemów statystycznych, co obrazuje przykład ubezpieczeń kapitałowych. Same zasady stanowią wyrazisty fundament rachunkowy, precyzyjnie określający stosownie zdyskontowane przepływy kapitałowe. Dopiero na tej podstawie uwydatniają się odpowiednie preferencje zainteresowanych stron lichwy, wyrażające skłonność do maksymalizacji zysku, czy też górny poziom akceptowanego ryzyka.

Autor prosi czytelników, którzy dobrnęli do końca tego tekstu i dostrzegają nowe przykłady zastosowania zasad mechaniki w ekonomii, o kontaktowanie się z nim pod adresem: ep@alpha.uwb.edu.pl

DODATEK: FUNKCJA UŻYTECZNOŚCI KAPITAŁU $U(t,\tau)$

Funkcję użyteczności wyznacza wybór układu odniesienia, w którym stosujemy zasady II i III. Istnienie takich układów postuluje zasada I. Funkcja użyteczności kapitału $U(t,\tau)$ posiada następujące własności:

- **monotoniczność**: Gdy $t_1 < t_2$ to $U(t_0,t_1) > U(t_0,t_2)$, czyli $U(t_0,t)$ jest malejącą funkcją drugiego argumentu. Dla ustalonej nominalnie wartości pewnego dobra oznacza to, że czym bardziej jest ono czasowo odległe, tym mniejsza jest jego obecna użyteczność.
- **istnienie kresu górnego**: $\lim_{t\to t_0} U(t_0,t) = 1$. Teraźniejsza użyteczność dobra jest równa jego wartości.
- **istnienie kresu dolnego**: $\lim_{t\to\infty} U(t_0,t) = 0$. Obecna użyteczność dostatecznie odległego w czasie dobra jest znikoma. Wraz z poprzednią własnością oznacza to, że dla $t \ge t_0$ wartości funkcji użyteczności należą do odcinka jednostkowego, $U(t_0,t) \in (0,1]$.
- **racjonalność**: Dla dowolnej chwili pośredniej $\tau \in [t_0,t]$ zachodzi własność: $U(t_0,\tau)\cdot U(\tau,t) = U(t_0,t)$. Oznacza to, że użyteczność dobra zdyskontowanana na chwilę t_0 równa jest jego użyteczności na chwilę τ, dodatkowo zdyskontowanej z chwili τ do chwili t_0.
- **istnienie elementu odwrotnego**: W zagadnieniach o charakterze deterministycznym dla czasów t wcześniejszych od t_0 ($t < t_0$), postuluje-

my funkcję użyteczności określoną następującą formułą: $U(t_0,t) := \left(U(t,t_0)\right)^{-1}$ więc wtedy $U(t_0,t) \in (1,\infty)$.

Powyższe własności powodują , że użyteczność ustalonego dobra posiada strukturę grupy.

Po zlogarytmowaniu grupa użyteczności staje się izomorficzna z grupą liczb rzeczywistych $(\mathrm{R},+)$. Logarytm funkcji użyteczności $r(t,\tau) := \ln(U(t,\tau))$ jest nazywany przedziałową stopą dyskontową, dotyczącą odcinka czasu $[t,\tau]$. Stopa ta pozwala na korzystanie z własności użyteczności w sposób addytywny. Zwyczajowo używane rodzaje stóp procentowych (czy dyskontowych) nie sumują się, co stanowi przyczynę wielu nieporozumień i nadużyć finansowych.

W prezentowanym ujęciu funkcja $U(t,\tau)$ multiplikatywnie wpływa na dyskontowany kapitał, czyli np. wielkość $p_\tau(t) = U(\tau,t) \cdot \underline{p}(t)$ (gdzie $\underline{p}(t)$ jest nominalnym stanem konta w chwili t) jest liniową funkcją od $\underline{p}(t)$. W ogólności wcale tak być nie musi. Na przykład banki z reguły dyskontują pożyczane kwoty w różny sposób, m.in. zależny od ich wysokości. Ogólne własności nieliniowej użyteczności przedstawione zostały w opracowaniu [14].

BIBLIOGRAFIA

1. http://www.aip.org/enews/physnews/1998/split/pnu395-1.htm
2. Stix G., (1998). Rachunek ryzyka. Świat Nauki, 7, 70-76.
3. Bernstein P.L., (1998). Intelektualna historia Wall Street. WIG PRESS, Warszawa.
4. Bernstein P.L., (1997). Przeciw bogom. Niezwykłe dzieje ryzyka. WIG PRESS, Warszawa.
5. Nelson E., (1967). Dynamical theories of brownian motion. Princeton University, Princeton.
6. Elton E.J., Gruber M.J., (1998). Nowoczesna teoria portfelowa i analiza papierów wartościowych. WIG PRESS, Warszawa.
7. Piotrowski E.W., (1997). Paradoks równowagi cen, a optymalna asekuracja kapitału. Instrumenty pochodne, 233-236. Universitas, Kraków.
8. Piotrowski E.W., (1999). Geometria rynku, w druku w Optimum .
9. Pauli W., (1921). Relativittstheorie. Encyklopdie der mathematischen Wissenschaften, V19. B.G.Teuber, Lipsk.
10. Smorodinskij J., (1976). Łobaczewskij i fizika. Kvant, 2, 22-26.
11. Piotrowski E.W., (1999). Podział kapitału, czyli o cenie rezygnacji i sile pieniądza. Optimum 3, 163-177.
12. Piotrowski E.W., (1999). Algebra kredytów. Przegląd Statystyczny.
13. Hicks J.R., (1988). Perspektywy ekonomii. PWN, Warszawa .
14. Piotrowski E.W., (1999). Macierzowa stopa zwrotu. Przegląd Statystyczny.
15. Weron A., Weron R., (1998). Inżynieria finansowa. WNT, Warszawa.
16. http://lucy.ipk.fhg.de/~mario/nfl/
17. Dobija M, Smaga E., (1996). Podstawy matematyki finansowej i ubezpieczeniowej. PWN, Warszawa-Kraków.
18. Maurin K., (1971). Analiza II. PWN, Warszawa.
19. Karpio A.. Skokowe zmiany kapitału i chwilowa stopa procentowa. W druku w Przeglądzie Statystycznym.
20. Steinhaus H., (1956). O prognozie. Zastosowania Matematyki, 3, 1-7.