Edward W. Piotrowski
Instytut Fizyki Teoretycznej
Uniwersytet w Białymstoku

Jan Sładkowski
Instytut Fizyki
Uniwersytet Śląski

RYZYKO W KWANTOWYCH GRACH RYNKOWYCH

(RePEc:sla:eakjkl:117PL 1-XI-2001)

> Jeżeli ludzkie decyzje są wynikiem mikroskopowych procesów kwantowych to należy przypuszczać, że natura wykorzystała kwantowe obliczenia w ewolucji skomplikowanych mózgów. W tym sensie rzeczywiście można powiedzieć, że komputery kwantowe rozgrywają gry rynkowe zgodnie z kwantowymi regułami.
>
> Gottfried J. Mayer [1]

1. CO NOWEGO POJAWIŁO SIĘ W MINIONYM DWUDZIESTOLECIU W ALGORYTMICE I W TEORII GIER?

8-go sierpnia 1900 roku David Hilbert przedstawił do rozstrzygnięcia swoje 23 problemy, które zdeterminowały rozwój dwudziestowiecznej matematyki. W stulecie tego wyjątkowego wydarzenia, a także dla uhonorowania nowego Milenium, Clay Mathematics Institute of Cambridge ogłosił siedem fundamentalnych problemów, ustanawiając nagrodę 7 mln dolarów za ich rozwiązanie, po milionie dolarów za każdy z nich [2]. Na opublikowanej liście tematem numer jeden jest pytanie, czy klasy algorytmów P i NP są jednakowe[1]. Pytanie to jest stawiane w kontekście problemów rozwiązywanych przy użyciu komputera klasycznego[2]. W tym przypadku trudno jest przecenić znaczenie właściwej odpowiedzi. Dla uzmysłowienia jej wagi wystarczy nadmienić, że powszechnie stosowane zabezpieczenia prywatności operacji elektronicznych oparte są na kryptografii z kluczem publicznym[3], zatem ich bezpieczeństwo bazuje na założeniu o niemożliwości sprowadzenia klasy NP do P.

Należy w pełni zdać sobie sprawę z kontekstu, w jakim powyższy problem został postawiony. Otóż i on. Do modelowania zjawisk otaczającego nas świata przywykliśmy używać komputerów, których architektura opiera się na koncepcji Turinga. Jednak minie wnet 20 lat od czasu, gdy Richard P. Feynman [3] przedstawił powody, zdeterminowane podstawowymi i dobrze zbadanymi właściwościami natury, które uniemożliwiają symulowanie na tych urządzeniach prawie wszystkich zjawisk fizycznych. Zjawiska te opisuje teoria kwantowa – wyjątkowo dobrze weryfikowalna i doświadczalnie potwierdzona dyscyplina wiedzy. Jej idee umożliwiły powstanie nowoczesnych technologii, przy pomocy których zbudowaliśmy m.in. nasze klasyczne maszyny liczące. Konstruktywny wniosek ze spostrzeżenia Feynmana mógł być tylko jeden: ideę Turinga należy przeformułować tak, by uwzględnić w niej kwantowy charakter świata[4]. W 1994 Peter Shor [4] przedstawił kwantowy algorytm faktoryzacji liczby naturalnej na czynniki pierwsze[5], który wykonywany na komputerze kwantowym czyni takie zadanie obliczeniowo łatwym. Ostatnie lata przyniosły pierwsze udane próby budowy najprostszych kwantowych maszyn liczących. W nowej sytuacji zagadnienie $NP \overset{?}{\simeq} P$ uzyskało zaskakujący kontekst fizyczny, który deklasuje dawne pomysły s-f symulacji inteligencji na komputerze klasycznym. W międzyczasie niezwykłą popularność zyskała polemizująca ze współczesną wizją sztucznej inteligencji książka Rogera Penrose'a „Nowy umysł cesarza” [6], wydana w 1989 roku[6], która przedstawia wiele ważkich argumentów, przemawiających za

---

[1] klasę P definiują zagadnienia łatwo rozwiązywalne (przez komputer klasyczny), zaś klasę NP – zagadnienia, których rozwiązanie można łatwo zweryfikować komputerem klasycznym

[2] którego definicję stworzoną dla potrzeb teorii algorytmów zwykliśmy nazywać uniwersalną maszyną Turinga

[3] opartej na algorytmach NP

[4] zgodnie z obowiązującym paradygmatem wszystkie zjawiska opisywane formalizmem klasycznym są jedynie asymptotycznymi przypadkami dobrze poznanych fenomenów kwantowych

[5] jest to NP problem; bazuje na nim najpopularniejszy system kryptograficzny RSA [5]

[6] autorzy odsyłają czytelnika do pierwszego wydania tej książki

nieobliczeniowym charakterem procesów myślowych oraz za kwantową naturą świadomości. Wreszcie w 1999 roku czasopisma[7] obwieściły o powstaniu kwantowej teorii gier, reformułującej i uogólniającej znane ekonomistom klasyczne koncepcje Johna von Neumanna[8].

Dzięki tym wydarzeniom stan naszej wiedzy zmienił się na tyle, że dziś możemy konstruować modele opisujące m.in. zjawiska rynkowe, koherentne z paradygmatem kwantowym, który obowiązuje w badaniach podstawowych.

2. DEFINICJA RYZYKA W MATEMATYCE FINANSOWEJ

Mniej, czy bardziej świadome utożsamienie ryzyka ze zmienną losową będącą kwadratem odchylenia wielkości mierzonej od jej wartości średniej można odnaleźć w najstarszych pracach dotyczących teorii pomiaru. Teoria odnosząca ryzyko finansowe do wykonującego ruch błędny zysku, wyznaczanego logarytmem ceny rynkowej instrumentu finansowego, została zaproponowana już w 1900 roku w pracy doktorskiej Louisa Bacheliera. Na analizę konsekwencji takiego ujęcia ryzyka w odniesieniu do portfela kapitałowego musieliśmy czekać aż ponad 50 lat, do 1952 roku, gdy późniejszy noblista (1990) Harry Markowitz opublikował swoją teorię. Niestety inwestorzy zainteresowali się owym ilościowym opisem ryzyka dopiero po 1974 roku [9]. Ukoronowaniem badań nad znaczeniem ryzyka charakteryzowanego dyfuzją logarytmu ceny była nagroda Nobla z 1997-go roku.

W wielu sytuacjach rynkowych czas trwania transakcji jest zmienną losową. Wtedy ryzyko wyraża nie sama dyspersja logarytmu ceny, lecz czasowa intensywność tej wielkości. Poza tym handel ustalonym dobrem możemy prowadzić według niesymetrycznych reguł, innych dla kupna, a innych dla sprzedaży. Przykładowo możemy kupować towar tylko wtedy, gdy cena jego spada poniżej pewnej wartości, a odsprzedawać na aukcjach bez limitu w postaci ceny wywoławczej. Ryzyko towarzyszące takim transakcjom powinniśmy odnosić do pełnego cyklu kupna-sprzedaży. Intuicyjnie takie ujęcie wydaje się naturalne. Np. w przypadku handlu dobrami o niskiej płynności rynkowej, które są łatwo dostępne, lecz które ciężko zbyć, transakcję zakupu

[7] m.in. [7,8]
[8] paradoksem jest, iż ów wybitny matematyk był także twórcą formalizmu teorii kwantów

takiego dobra, choć sama cechuje się niską dyspersją, scharakteryzujemy dużą wartością ryzyka, uwzględniając w tym parametrze także wydłużony czas sprzedaży oraz metody (algorytmy) jakimi posługujemy się uczestnicząc w targach prowadzących tak do kupna, jak i do sprzedaży dobra[9].

Powyższe uwagi o sposobie definiowania miary transakcyjnego ryzyka znajdą odzwierciedlenie w formule (3). Jednak uprzednio przyjrzyjmy się formalizmowi matematycznemu kwantowej teorii, którego stosowanie wymaga zmiany wielu nawyków, które nabywamy w trakcie zajmowania się modelami opartymi na klasycznym rachunku prawdopodobieństwa.

3. KWANTOWE GRY RYNKOWE

Dla prostoty i czytelności opisu załóżmy, że interesuje nas rynek obrotu jednym typem dobra, do którego ustalonej jednostki 1G odnosimy jego cenę c, wyrażoną w jednostkach pieniężnych (np.1$). Przyjmijmy, że dobro G (i pieniądz $) są dowolnie podzielne oraz, że k -ty uczestnik rynku, $k \in \mathbb{N}$, zwany dalej graczem, stosujący strategię (zwaną strategią czystą) $|\psi\rangle_k$, deklaruje udział w obrocie rynkowym całym oferowanym przez siebie kapitałem (na który składa się określony zasób $s_k \geq 0$ jednostek dobra G i pewna ilość $d_k \geq 0$ jednostek pieniężnych $), a o stopniu uczestnictwa gracza w obrocie rynkowym decyduje arbiter $\mathcal{A}$ na podstawie danych $\{|\psi\rangle_k, s_k, d_k\}$ pochodzących od wszystkich graczy. Obecność na rynku pod postacią kilku graczy umożliwia podmiotom rynkowym obrót częściami ich kapitału. Odwrotny mechanizm pozwala uczestnikom rynku na zawieranie koalicji. Wtedy $\mathcal{A}$ musi rozważać i rozliczać ich jako pojedynczego gracza. Kliki rynkowe modelujemy za pomocą skorelowanych strategii różnych graczy. Arbitrem jest działająca według zdeterminowanych zasad izba rozrachunkowa, lub określony prawem czy obyczajem niezinstytucjonalizowany sposób przeprowadzania transakcji. Arbitra $\mathcal{A}$ możemy utożsamić ze stosowanym przez niego algorytmem rozrachunkowym, stanowiącym reguły gry rynkowej. Transakcje rynkowe (wyznaczające wielkości przepływów kapitałowych) przebiegają, w oparciu o zgłoszone przez graczy strategie $|\psi\rangle_k$,

---

[9] abstrahując od złożoności zagadnienia, możemy ową metodę wyznaczania ryzyka uogólnić na sytuacje, w których dobro przed sprzedażą zostaje przetworzone

zgodnie z procedurą $\mathcal{A}$ i określoną przez nią, jednolitą dla przeprowadzanych w jednej turze (równoczesnych) transakcji, ceną c. Wprowadzając grę równoczesną na kilku rynkach, powiązanych zależnościami pomiędzy strategiami graczy na nich operujących, możemy modelować równoczesne transakcje przeprowadzane przy niejednolitych cenach. Graczom nie muszą być znane reguły gry rynkowej. Wiedza ta jest jednak potrzebna w sytuacjach, gdy chcą oni racjonalnymi metodami wpływać na osiągane przez siebie wyniki.

Rozważmy skłonności graczy do zawarcia transakcji przy różnych warunkach cenowych. Niech losowa zmienna rzeczywista q

$$q = \ln c - \mathrm{E}(\ln c) \tag{1}$$

oznacza wartość logarytmu ceny rezygnacji[10], powyżej której gracz stosujący strategię $|\psi\rangle_k$ zaniecha kupna G i która jest tak dobrana, aby wartość oczekiwana przy $|\psi\rangle_k$ tej zmiennej $\mathrm{E}(q)$ była równa zeru. Zmienna p

$$p = \mathrm{E}(\ln c) - \ln c \tag{2}$$

dotyczy analogicznej sytuacji, ale odnoszącej się nie do popytu, lecz do podaży dobra G wyrażanej strategią gracza $|\psi\rangle_k$, któremu przyszło zająć na rynku pozycję sprzedawcy (a nie nabywcy). Podaż dobra G można postrzegać jako popyt na pieniądz \$ przy cenie c^{-1} wyrażonej w jednostkach 1G, więc definicje (1) i (2) są równoważne. Zauważmy, że odpowiadające danej cenie c zmienne q i p są niezależne od wyboru jednostek przyjętych do określania ilości dobra G, czy \$. W celu uproszczenia zapisu przyjmijmy w dalszym tekście takie jednostki, w których $\mathrm{E}(\ln c) = 0$. Zakładamy, że strategie $|\psi\rangle_k$ (zwane też *stanami czystymi* graczy) są elementami przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}_k$. Przestrzenią Hilberta $\mathcal{H}$ nazywamy zespoloną przestrzeń liniową, w której zadano odwzorowanie $\langle \ldots | \ldots \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ zwane *iloczynem skalarnym*, posiadające dla dowolnych $\psi, \psi', \psi'' \in \mathcal{H}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ następujące własności[11]:

[10] por. [15]
[11] pozioma kreska nad liczbą symbolizuje operację sprzężenia liczby zespolonej

- $\langle\psi|\psi\rangle \geq 0$,
- $\langle\psi|\psi\rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \psi = 0$,
- $\langle\psi|\psi' + \psi''\rangle = \langle\psi|\psi'\rangle + \langle\psi|\psi''\rangle$,
- $\langle\psi|\lambda\psi'\rangle = \lambda\langle\psi|\psi'\rangle$,
- $\langle\psi|\psi'\rangle = \overline{\langle\psi'|\psi\rangle}$

i w której każdy ciąg zbieżny[12] $\{\psi_n\}$ posiada swoją granicę.

W tekście przyjęto tzw. notację Diraca, zgodnie z którą wektory przestrzeni Hilberta $\psi \in \mathcal{H}$ zapisywane są wraz z „częścią” nawiasu-symbolu iloczynu skalarnego[13], a wektory będące elementami specyficznej przestrzeni Hilberta $\mathcal{L}^2$, jaką tworzą funkcje $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ całkowalne z kwadratem[14] oznaczane są symbolami $\langle x|\psi\rangle$ (zamiast $\psi(x)$) i nazywane *amplitudami prawdopodobieństwa*. Nazwa ta posiada uzasadnienie w probabilistycznym postulacie mechaniki kwantowej, który głosi, że kwadrat modułu tej wielkości $|\langle x|\psi\rangle|^2 dx$ jest gęstością prawdopodobieństwa pomiaru wartości x zmiennej losowej *x*. Stosując notację Diraca należy pamiętać, że funkcje $\langle x|\psi\rangle$ nie są funkcjami liniowymi (co mogą sugerować własności iloczynu skalarnego). Loterie, w których rolę urn pełnią różne, wzajemnie ortogonalne[15] stany czyste gracza, nazywamy *strategiami mieszanymi* (bądź stanami mieszanymi). Dzięki iloczynowi skalarnemu potrafimy dowolny stan $|\psi\rangle$ rzutować na jednowymiarową podprzestrzeń rozpiętą przez inny stan $|\varphi\rangle$, którą to operację $\mathcal{X}_{|\varphi\rangle}$, w przypadku wybrania unormowanego[16] wektora $|\varphi\rangle$, możemy zapisać następująco $\mathcal{X}_{|\varphi\rangle}|\psi\rangle := \langle\varphi|\psi\rangle\ |\varphi\rangle$. Każdy stan mieszany $\mathcal{M}$ możemy przedstawić jako pewną kombinację wypukłą

[12] w indukowanej przez ten iloczyn normie, czyli $\lim\limits_{m,n\to\infty} \langle\psi_n - \psi_m|\psi_n - \psi_m\rangle = 0$

[13] tj. w postaci $|\psi\rangle$

[14] $\langle\psi|\psi\rangle := \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\psi(x)} \cdot \psi(x) dx < \infty$

[15] $\forall_{m \neq n} \langle\psi_m|\psi_n\rangle = 0$

[16] tj. takiego, który spełnia warunek $\langle\varphi|\varphi\rangle = 1$

stanów czystych $\mathcal{M} = \sum_k w_k \mathcal{X}_{|\varphi_k\rangle}$. Entropia stanu nie będącego stanem czystym jest większa od zera. *Ewolucją kwantową* nazywamy odwzorowanie liniowe $\mathcal{H} \to \mathcal{H}$ nie zmieniające entropii stanu układu.

Zakończmy tą z konieczności bardzo skrótową dygresję o podstawowych ideach teorii kwantów wyjaśnieniem czym są znane nam z podręczników „zdroworozsądkowe", oparte na klasycznym rachunku prawdopodobieństwa, znane z podręczników modele, których większość objęta jest przez teorię kwantową jako przypadki graniczne. W ramach teorii kwantowej poznajemy ograniczenia i nieścisłości tkwiące w ułomnych (dla paradygmatu kwantowego) modelach klasycznych, a ujawniające się dopiero w kontekście kwantowym. Czym jest, wyrażony w języku przestrzeni Hilberta, *obiekt klasyczny* (zwany także, w zależności od sytuacji przyrządem pomiarowym, obiektem makroskopowym, aparatem, urządzeniem itp.)? Dla naszych potrzeb wystarczy stwierdzenie, że obiekt klasyczny to taki, który może znajdować się tylko w jednym z wektorów-stanów $\{|\Psi_n\rangle\}$, ortogonalnych względem siebie. Oznacza to, że obiekty klasyczne, na skutek ich złożonej budowy, czy oddziaływania z otoczeniem, mogą być znajdowane (mierzone) jedynie w tych stanach [10]. Nie wchodzi wiec w rachubę obserwacja (pomiar) sumy (tzw. superpozycji) ich wektorów-stanów (w tym kontekście stany czyste wolne są od niepewności, charakterystycznej dla rachunku prawdopodobieństwa), choć wtedy możemy stwierdzać istnienie odpowiednich stanów mieszanych (operatory, będące kombinacjami wypukłymi operatorów rzutowania na stany czyste). Na przykład znane z klasycznej teorii gier strategie mieszane są takimi stanami. Dlatego pojawiające się w rachunkach kombinacje liniowe ortogonalnych wektorów-stanów obiektu klasycznego będziemy interpretować jako stany mieszane.

Wszystkie próby ingerencji w zjawiska kwantowe z zewnątrz mogą odbywać się jedynie za pomocą obiektów klasycznych. Między innymi wszelkie wyniki pomiarów poznajemy tylko dzięki zmianom stanów jakichś obiektów klasycznych. W bieżącym rozdziale, gdzie rozważamy transakcje dotyczące jednoczesnego obrotu dowolną ilością dóbr, stan gry $|\Psi\rangle_{\mathrm{in}} := \sum_k |\psi\rangle_k$ jest wektorem należącym do sumy prostej[17] przestrzeni Hilberta dotyczących poszczególnych graczy $\sum_k \oplus \mathcal{H}_k$. Działające w przestrzeniach $\mathcal{H}_k$ operatory hermitowskie[18] (tzw. *obserwable*) popytu $\mathcal{Q}_k$ i podaży $\mathcal{P}_k$ są operatorami kanonicznie sprzężonymi (na wzór ich fizycznych odpowiedników: położenia i pędu) [11]. Założenie wydaje się zasadne, gdyż np. przy jednoznacznie określonej cenie e^{-p}, gdzie p jest wynikiem działania operatora $\mathcal{P}_k$ na jego stan własny (wektor własny), będący precyzyjnie zadeklarowaną przez k-tego gracza ofertą sprzedaży $|p\rangle_k$, nie ma sensu jakiekolwiek określenie popytu zgłaszanego przez tego gracza, który dotyczyłby tej samej transakcji. Przepływy kapitałowe odnoszące się do równoczesnego zestawu transakcji przeprowadzonych na podstawie algorytmu $\mathcal{A}$ stanowią odpowiednik procedury pomiaru zjawiska kwantowego w fizyce. Transakcja polega na przejściu stanu przyjętych przez graczy strategii $|\Psi\rangle_{\mathrm{in}}$ w określający przepływy kapitałowe stan $|\Psi\rangle_{\mathrm{out}} := \mathcal{T}_\sigma |\Psi\rangle_{\mathrm{in}}$, gdzie

$$\mathcal{T}_\sigma := \sum_{k_d} |q\rangle_{k_d}\, {}_{k_d}\langle q| + \sum_{k_s} |p\rangle_{k_s}\, {}_{k_s}\langle p|$$

jest operatorem rzutowym zadanym rozbiciem σ zbioru graczy $\{k\}$ na dwa rozłączne podzbiory $\{k\} = \{k_d\} \cup \{k_s\}$, czyli kupujących za ceny $\mathrm{e}^{q_{k_d}}$ i sprzedających po cenach $\mathrm{e}^{-p_{k_s}}$ obowiązujących w bieżącej turze transakcji. Zadaniem algorytmu $\mathcal{A}$ jest wyznaczenie: rozbicia rynku σ, zbioru parametrów cenowych $\{q_{k_d}, p_{k_s}\}$ i zbioru wartości przepływów kapitałowych. Te ostatnie ustalane są zgodnie z interpretacją dystrybuanty

---

[17] suma prosta przestrzeni Hilberta to ich iloczyn kartezjański z iloczynem skalarnym równym sumie iloczynów skalarnych w poszczególnych jego składnikach

[18] operator hermitowski to odwzorowanie liniowe o rzeczywistych wartościach własnych, z których każdą interpretujemy jako wynik pomiaru obiektu znajdującego się w stanie opisywanym odpowiednim wektorem własnym

$$\int_{-\infty}^{\ln c} \frac{\left|\langle q|\psi\rangle_k\right|^2}{{}_k\langle\psi|\psi\rangle_k} dq$$

jako prawdopodobieństwa tego, że przy cenie transakcyjnej c (bądź mniejszej) gracz $|\psi\rangle_k$ ma zamiar nabyć dobro G. Analogicznie dystrybuanta

$$\int_{-\infty}^{\ln\frac{1}{c}} \frac{\left|\langle p|\psi\rangle_k\right|^2}{{}_k\langle\psi|\psi\rangle_k} dp$$

określa prawdopodobieństwo sprzedaży przez $|\psi\rangle_k$, po cenie c, dobra G. Powyższe prawdopodobieństwa mają charakter warunkowy, gdyż odnoszą się do sytuacji następującej po rozstrzygnięciu o postaci rozbicia σ.

Grę charakteryzują zasady jej rozgrywania. W artykule [12] autorzy rozważyli ilustrujący działanie algorytmu $\mathcal{A}$ przykład izby rozrachunkowej, która przyjmując założenie o jednolitej cenie transakcyjnej, maksymalizuje mierzony pieniądzem obrót kapitałowy. Izba rozrachunkowa jest w tym modelu kwantowym obiektem klasycznym. Założenie o jednakowej dla wszystkich cenie

$$\forall_{k_d,k_s} \left(\mathcal{Q}_{k_d} + \mathcal{P}_{k_s}\right) |\Psi\rangle_{\text{out}} = 0$$

jest odpowiednikiem efektu *splątania* stanów w zjawiskach kwantowomechanicznych. Przeprowadzane przez fizyków doświadczenia ze stanami splątanymi stanowią koronny dowód, przemawiający za niemożliwością konstrukcji teorii klasycznych, które prowadziłyby do uzyskiwanych wyników pomiarowych. Inspiracją do tych badań był najsławniejszy eksperyment XX wieku, tzw. *eksperyment EPR*. Jest to jedynie eksperyment myślowy, którego opis znajduje się w pracy Einsteina, Podolskiego i Rosena z 1935 roku [13,14]. Na rynku gdzie transakcje zawierane są bezpośrednio pomiędzy dwoma kupcami powyższy warunek będzie spełniony jedynie w ramach każdej takiej pary graczy.

4. RYZYKO KWANTOWE

Argumenty przedstawione w paragrafie 2 sugerują one następującą definicję operatora skłonności do ryzyka:

$$H(\mathcal{P}_k, Q_k) := \frac{(\mathcal{P}_k - p_{k0})^2}{2m} + \frac{m\omega^2 (Q_k - q_{k0})^2}{2}, \tag{3}$$

gdzie $p_{k0} := \frac{{}_k\langle\psi|\mathcal{P}_k\psi\rangle_k}{{}_k\langle\psi|\psi\rangle_k}$, $q_{k0} := \frac{{}_k\langle\psi|Q_k\psi\rangle_k}{{}_k\langle\psi|\psi\rangle_k}$, $\omega = \frac{2\pi}{\theta}$. θ jest charakterystycznym czasem trwania transakcji [15], który, z grubsza mówiąc, jest równy średniemu interwałowi między dwoma przeciwnymi transakcjami danego gracza opisuje asymetrię ryzyka między transakcjami kupna i sprzedaży. Parametr $m > 0$ opisuje asymetrię ryzyka pomiędzy transakcjami kupna i sprzedaży. Porównanie z kwantowym oscylatorem harmonicznym pozwala na następującą charakteryzację kwantowych gier rynkowych. Stała h_E opisuje minimalną skłonność gracza do ryzyka. Jest ona równa iloczynowi najmniejszej wartości własnej operatora $H(\mathcal{P}_k, Q_k)$ i 2θ. Oczywiście 2θ jest także najkrótszym przedziałem czasu, w którym sens ma mierzenie zysku. Z wyjątkiem stanu podstawowego wszystkie inne strategie adiabatyczne $|\psi_H\rangle$[19] są giffenami [12, 16], tzn. dobrami, które nie podlegają prawu popytu i podaży. Zauważmy, że na ogół operatory Q_k nie są przemienne, gdyż gracze obserwują ruchy pozostałych graczy i co rusz działają analogicznie. Wpływy euforii, paniki czy instynktu stadnego na ceny są często obserwowane na rynkach. Na giełdzie jedno duże zlecenie może, przynajmniej w ograniczonym przedziale czasowym, zmienić wartość kursu. Dlatego naturalnym krokiem jest stosowanie formalizmu niekomutatywnej mechaniki kwantowej, w której zakłada się, że[20]

$$[Q_j, Q_k] = \mathrm{i}\Theta_{jk} = \mathrm{i}\Theta\varepsilon_{jk},$$

$\Theta_{jk} \in \mathbb{C}$. Analiza rozwiązań równania wielowymiarowego oscylatora harmonicznego w niekomutatywnej mechanice kwantowej podana w pracy [17] sugeruje, że parametr Θ modyfikuje stałą $h_E \to \sqrt{h_E^2 + (2\pi\Theta)^2}$ oraz, odpowiednio, wartości własne operatora ryzyka $H(\mathcal{P}_k, Q_k)$. Prowadzi to do naturalnego wniosku, że poczynania innych graczy mogą wpłynąć na naszą skłonność do podejmowania ryzyka. Na rynku efektem wzrostu wartości stałej h_E jest nasilenie skali występowania zjawisk kwantowych.

---

[19] czyli strategie $|\psi_H\rangle$ będące wektorami własnymi operatora ryzyka, tj. posiadające własność $H(\mathcal{P}_k, Q_k)|\psi_H\rangle = \mathrm{const.}|\psi_H\rangle$

[20] parametry Θ_{jk} nie mają nic wspólnego z charakterystycznym czasem transakcji θ

Szerzej własności rynków kwantowych przedstawiono w pracach [18,19], w których dyskutowane są przykłady gier kwantowych bez izby rozrachunkowej (targi kwantowe i kwantowe aukcje angielskie[21]). Opisowi kwantowych zjawisk ekonomicznych, ujętych w kontekście różnych zagadnień dotyczących rynku, których modele mają dwoisty charakter, poświęcona jest książka [20].

5. **KWANTOWA ZASADA ANTROPICZNA**

Mechanika kwantowa nie jest domeną jedynie mikroświata. Tak różnorodne, poznane już zjawiska, takie jak np. stabilność materii, reakcje chemiczne, przewodnictwo metali, ewolucja gwiazd, są niezrozumiałe na gruncie teorii klasycznych. Przyroda nie jest klasyczna. Dlaczego więc procesy ekonomiczne miałyby stanowić szczególny wyjątek? Może skromne, w porównaniu z rozwojem nauk ścisłych, osiągnięcia nauk społecznych są jedynie efektem pozostawania ich modeli w ramach wyznaczonych przez zdewaluowany w minionym stuleciu paradygmat klasyczny? Po stuleciach kolejnych metamorfoz opisu świata nauka stała się antyplatońska konstatując, że *abstrakcje prawie zawsze okazują się przybliżeniami rzeczywistej fizycznej sytuacji* [21]. Dzięki nowym paradygmatom uczeni ciągle głębiej, szerzej i precyzyjniej opisują obserwowane zjawiska. Pouczający przykład antynomii „Achilles i żółw" [22] wskazuje na bezradność rozstrzygnięć zagadnień dotyczących rzeczywistości na gruncie abstrakcyjnych konstrukcji, bez odwoływania się do podstawowych koncepcji fizycznych. Dziś jedynie solipsyzm wydaje się usprawiedliwiać wierność upodobaniu klasycznym wizjom świata.

Tworząc jedną z konkurencyjnych interpretacji mechaniki kwantowej fizycy posiłkowali się modelem rynku[22]. Znane finansistom właściwości portfeli wykorzystywane są przez badaczy algorytmów kwantowych [24]. Czas już na rewanż – teoria kwantów oferuje bezsprzecznie największy warsztat rachunkowy i jedyną poważną propozycję unifikacji dyscyplin naukowych [21].

Jeśli nawet we wczesnych stadiach rozwoju cywilizacji rynkiem rządziły prawa teorii klasycznej[23] (podobnie jak koncepcjami naukowymi starożytnych, nie zmuszanymi do rywalizacji gospodarczej, rządziły zasady logiki klasycznej),

[21] w teorii kwantowej opisy uogólnień aukcji angielskiej i aukcji Vickrey'a są zunifikowane w ramach jednolitego modelu.
[22] interpretacja transakcyjna [23]
[23] wcale to nie jest oczywiste

to wyjątkowa skuteczność pomnażania zysków przy pomocy algorytmu[24] „akceptuj przynajmniej taki zysk, jaki udało ci się już wcześniej przeciętnie osiągnąć" [15,12] powinna spowodować ewolucyjne zdominowanie rynku przez zachowania oparte na mechanizmach kwantowych. Funkcjonowanie tej kwantowej wersji zasady antropicznej [25] obserwowaliśmy w minionym stuleciu w fizyce – technologicznie, więc i ekonomicznie, skuteczniejszy kwantowy opis rzeczywistości wyparł dawny klasyczny paradygmat fizyczny. Z przyczyn merkantylnych cywilizacja opowiedziała się za koncepcjami kwantowymi.

BIBLIOGRAFIA

1. Complexity Digest, nr 27, 2 VII 2001.
2. http://www.claymath.org/prizeproblems/index.htm, http://www.claymath.org/prizeproblems/p_vs_np.pdf.
3. Feynman R. P., (1982). Simulating physics with computers. Int. J.Theor. Phys. 21, 467.
4. Shor, P.W., (1994). Algorithms for quantum computation: discrete logarithms and factoring. Proceedings, 35th Annual Symposium on Foundations of Computer Science, IEEE Press.
5. SchneierB., (1995). Kryptografiadla praktyków. WN-T, Warszawa.
6. Penrose R., (1995). Nowy umysł cesarza. PWN, Warszawa.
7. Scharf R., (1999). Spielen mit Quantenstrategien. Frankfurter Allgemeine Zeitung, 21 VII.
8. Ball Ph., (1999). Everyone wins in quantum games. Nature, Science News, 18 X.
9. Bernstein P.L., (1997). Przeciw bogom. Niezwykłe dzieje ryzyka. WIG PRESS, Warszawa..
10. Penrose R., (2000). Cienie umysłu. Zysk i S-ka, Poznań.
11. Byron F.W., Fuller R.W., (1975). Matematyka w fizyce klasycznej i kwantowej. PWN, Warszawa
12. Piotrowski E.W., Sładkowski J., (2001). Quantum market games. Wysłane do Phys. Lett. A; quant-ph/0104006.
13. Einstein A., (2001). Pisma filozoficzne. De Agostini, Warszawa.
14. Bernstein J., (1999). Teoria wszystkiego. Prószyński i S-ka, Warszawa.

[24] spójnego logicznie dopiero w ramach teorii kwantowej

15. Piotrowski E.W., (1999). Natężenie zysku – model racjonalnego kupca. Przegląd Statystyczny 46/2, 191-197.
16. Piotrowski E.W., Sładkowski J., (2001). The merchandising mathematician model. Stochastic demand and supply . Wysłane do Ann. of Statistics; cond-mat/0102174.
17. A. Hatzinikitas A., Smyrnakis I., (2001). The noncommutative harmonic oscillator in more than one dimensions . hep-th/0103074.
18. Piotrowski E.W., Sładkowski J., (2001). Quantum bargaining games. Wysłane do Physica A; quant-ph/0107140.
19. Piotrowski E.W., Sładkowski J., (2001). Quantum english auctions. Wysłane do J. Phys. A; quant-ph/0108017.
20. Piotrowski E.W., (2001). Dwoistości wartości kapitału. Preprint; http://alpha.uwb.edu.pl/ep/RePEc/sla/eakjkl/69PL.pdf
21. Deutsch D., (1998). The fabric of reality. Penguin, Londyn.
22. Morris R., (1999). Krótka historia nieskończoności. CiS, Warszawa.
23. Cramer J. G., (1986). The transactional interpretation of quantum mechanics. Reviews of Modern Physics 58, 647-688.
24. Maurer S. M., Hogg T., Huberman B. A., (2001). Quantum portfolios. quant-ph/0105071.
25. Piotrowski E.W., Sładkowski J., (2001). Quantum-like approach to financial risk: quantum anthropic principle. W druku w Acta Physica Polonica B; quant-ph/ 0110046.