

Oli i Uli



# DWOISTOŚCI WARTOŚCI KAPITAŁU

(Preprint RePEc:sla:aejkl:69PLv7 17-02-2003)

Edward W. Piotrowski



Copyright © 2002 by Edward W. Piotrowski

*Skład i łamanie:* Edward W. Piotrowski

## Prodrom

Niewątpliwie ważne są wnikliwe badania relacji zachodzących pomiędzy *wymienianymi na rynku dobrami* a ich *cenami*. Przecież dotyczą one podstawowych kategorii ekonomicznych, od których we wszelkich rozważaniach odnoszących się do gospodarki rynkowej abstrahować niepodobna. Ta elementarna para pojęć handlowych o charakterystykach liczbowych okazuje się ciągle mało rozpoznana pod względem swej matematycznej struktury, podsuwającej nowe możliwości metodologicznie poprawnego opisu rynku i ostatecznie wyznaczającej horyzonty ich wykorzystania. Zaś badania takie prowadzą — jak czytelnik będzie się mógł przekonać — do ujawnienia zaskakujących właściwości, których próżno by szukać w innych książkach. Jedynie przyszłość władna jest rozstrzygać o tym, czy owe wykryte symetrie staną się narzędziami uzupełniającymi warsztat ekonomii, pozwalając jednoznacznie oceniać rynek i formułować o nim precyzyjne i przydatne prognozy. Jednak już dziś wiadomo, że posługiwanie się prezentowaną tu techniką badawczą zaowocowało rozwijaną we współpracy z Janem Śładkowskim teorią *kwantowych gier rynkowych*. Jest to nowe spojrzenie na strategie i taktyki handlowania, dostępne zaledwie od dwóch lat w internetowych archiwach. Przez specjalistów od modelowania i symulacji już zostało ono uznane za wielkie wyzwanie<sup>1</sup>. Jeszcze kilka lat temu nikt nawet nie spekulował, że teoria kwantów i rynek mogą mieć ze sobą coś wspólnego. Pod koniec 2002 roku ukazała się pierwsza książka, napisana przez naczelnego dyrektora nowojorskiej Trilogy Advisors, wieszcząca, że kwantowe inwestycje zrewolucjonizują w tym stuleciu naszą ekonomię i nasze życie [Wai02]. Zaś dziś — autor został zaproszony przez włoskich ekonomistów do unijnego grantu pod jakże znaczącym i kreującym wizję przyszłości tytułem: *Economics and Market as Quantum Based Information Processor*. Ta, wykazywana przez innych badaczy, duża dynamika percepcji idei autora<sup>2</sup> wydaje się wystarczającą zachętą do zgłębiania tajemnic dotyczących dwoistości kapitałowych. Większość zamieszczonych w całej rozprawie wyników autor opublikował w odrębnych artykułach<sup>3</sup>.

---

<sup>1</sup> na konferencji poświęconej tej tematyce, która odbyła się w 2002 roku w Orlando [CK02]

<sup>2</sup>są one wysoce nieprzypadkowe, m.in. dlatego, że krępuje je poddająca się drobiazgowej kontroli spójność formalizmu rachunkowego, która marginalizuje wszelkiego typu niejasności rozważań werbalnych

Proponowana książka jest pierwszą z trzech części rozprawy o dwoistościach, pojawiających się w trakcie wyznaczania wartości kapitałowej zbiorów dóbr. Obejmuje ona geometryczne aspekty tego zagadnienia. Autor wyłączył z rozważań tematykę dotyczącą własności dwoistości w zagadnieniach programowania matematycznego, dobrze znaną ekonomistom i szeroko reprezentowaną w dostępnych opracowaniach książkowych.

Przejęty z greki *prodrom* oznacza przedmowę, ale także zwiastuna<sup>4</sup>. Autor chciałby również w tych początkowych zdaniach zawrzeć ową dwuznaczność, by pozostać w zgodzie z ideą przewodnią całej rozprawy.

Konstrukcje geometryczne dotyczące stopy mają swoje źródło w fundamentalnych ideach księgowości. Autorem ich był Fra Luca Paciolo (1445?-1514?). Ów pomysłodawca skutecznego, ilościowego oceniania elementarnych sytuacji rynkowych stworzył wenecką metodę prowadzenia ksiąg rachunkowych. Zasłynął traktatem *Divina proportione*, podziwianym przez mistrzów Renesansu, Leonarda da Vinci i Albrechta Dürera. Mniej znanym jest fakt, że postawił on (1487 r.) pierwsze zagadnienie matematyczne dotyczące gier losowych<sup>5</sup>. Proponowane przez niego zapisy *per cassa* i *a capitale* stały się podstawowym sposobem przedsiębiorców na unikanie niepowodzeń przez następujące potem kolejne stulecia nieznanego wcześniej rozwoju materialnego. Historyk gospodarowania Sombart [Som17] porównuje system genialnego franciszkanina do osiągnięć Galileusza i Newtona — prekursorów fizyki, która umożliwiła pojawienie się skomplikowanych urządzeń mechanicznych i odkrywanie kolejnych nowych typów źródeł energii. Czyż jest możliwe, że odkrywca podwójnej księgowości jedynie zbiegiem okoliczności był także mistrzem perspektywy? Wnioski wynikające z próby odpowiedzi na to pytanie doprowadzą nas m.in. do nowego i algorytmicznie prostego sposobu porównywania jakości zarządzania portfelami inwestycyjnymi, który uwzględnia nawet tak egzotyczne przypadki, jak skrajnie duże zyski, osiągalne przez wielokrotne stosowanie dźwigni finansowej w stanie hiperinflacji.

Część druga rozprawy dotyczy algebraicznej struktury stopy i opiera się na ideach matematycznych odkrytych przez żyjącego także w epoce Odrodzenia Gerolamo Cardano (1501–1576). Ten wynalazca stosowanego w niezliczonych mechanizmach przegubu miał odwagę zaproponować stosowanie w rachunkach pierwiastka kwadratowego z  $-1$ . W 1524 roku opublikował *Liber de Ludo Aleae* (Księga o grach losowych) — pierwszy podręcznik rachunku prawdopodobieństwa, reguły którego odkrył zajmując się hazardem (czym opłacał swe

---

<sup>3</sup>robocze warianty tych i innych prac autora, w tym wszystkie trzy części tej rozprawy w niedrukowanej formie, złożone w największym internetowym archiwum prac ekonomicznych, dostępne są w postaci elektronicznej pod adresem: <http://ideas.uqam.ca/ideas/data/slaeakjkl.html>. Tam oraz pod adresem <http://www.unifr.ch/econophysics/PHP/formulaire/rank.php> można odnaleźć ich aktualne notowania rankingowe.

<sup>4</sup>zob. [Sł095]

<sup>5</sup>zob. [Ste00]

studia medyczne w Pawii). W różnych kontekstach zagadnień poruszanych w części drugiej pojawi się zasadność użycia liczby urojonej  $i$  jako naturalnego sposobu ujednoczenia występującego tam formalizmu algebraicznego.

Część trzecia poświęcona jest sławnej ze swojego korpuskularno-falowego dualizmu teorii kwantowej, proponującej oparty na liczbach zespolonych i odmienny od tradycyjnego rachunek prawdopodobieństwa. Mechanika kwantowa, której formalizm zaadoptowany został przez autora do opisu transakcji rynkowych, bezspornie stanowi dziś centralny rdzeń paradygmatu naukowego, dotyczącego sfery zjawisk świata materii nieożywionej. Intensywnie prowadzone w ostatnich latach badania teoretyczne nad obliczeniami kwantowymi stwarzają wyjątkową możliwość przewyższenia jakościowych ograniczeń wyznaczających kres możliwości rachunkowych współczesnych komputerów, opartych na klasycznym wzorcu maszyny Turinga. Może opisany tam formalizm rynkowych gier kwantowych stanie się przyczynkiem do unifikacji teorii nauk ekonomicznych i ścisłych, przy okazji wyjaśniającym znaczenie nieobliczeniowych rozstrzygnięć, stanowiących niewzruszoną podstawę współczesnej praktyki ekonomicznej. Gry te, jako poszukiwania strategii będącej najlepszą ripostą na ruch przeciwnika, są nie wymagającymi przepływu energii unitarnymi przekształceniami<sup>6</sup> sposobów zachowań<sup>7</sup>, zmieniającymi je w sposób ciągły i zachowującymi pełną prywatność<sup>8</sup>.



---

<sup>6</sup>taktykami

<sup>7</sup>strategii

<sup>8</sup>nie tolerującymi podsłuchu

Ilustrujące rozprawę wspaniałe grafiki Sir Johna Tenniela pełnią rolę metafor, wyrażających subiektywne skojarzenia autora, związane z aktualnie omawianym tematem.

Czytelnik poszukujący w zapoczątkowanej tym tomem rozprawie wyjaśnień dla różnych problemów ekonomiczno-finansowych, wertując kartki może odczuwać niedosyt przekazywanej niezmatematyzowanym językiem informacji. Pamiętać wtedy powinien o przykładach doniosłych teorii fizycznych, jakimi są szczególnie teoria względności, czy mechanika kwantowa, opartych odpowiednio na formalizmach geometrii nieeuklidesowej i przestrzeni Hilberta. W dyscyplinach tych wiele elementarnych opisów rzeczywistych sytuacji nie poddaje się przełożeniu na język potoczny, gdyż są one sprzeczne z wadliwie ukształtowanym zdrowym rozsądkiem. Opatrzanie ich nieformalnymi komentarzami staje się najczęściej powodem dwuznaczności, osłabiając wyjątkową skuteczność rachunkową tych koncepcji. Jednak żaden metodolog nie uważa wskazanej tu własności fizycznych teorii za ich wadę. Jest tak m.in. z tego powodu, że przeniesienie naukowych sporów z płaszczyzny luźnych koncepcji na twarde język formuł matematycznych zwykle owocowało spektakularnym wzrostem poziomu poznania naukowego oraz precyzyjniejszymi narzędziami prognostycznymi.



# Spis treści

Prodrom	i
Spis treści	v
<b>Część 1. Geometryczna struktura rynku</b>	<b>1</b>
Rozdział 0. Dyrektywy	3
§1. Metodologia	3
§2. Antycypacja informacyjnego modelu rynku	8
§3. Użyte instrumentarium	19
Rozdział 1. Rzutowa struktura geometrii rynku	24
§1. Portfele i ceny	24
§2. Rynek a geometria rzutowa	29
§3. Homografie przestrzeni współrzędnych portfela	31
§4. Współrzędne kursu	32
§5. Zysk z handlu pojedynczym dobrem	34
§6. Metryzacja przestrzeni rynkowej	35
§7. Stopa zysku z portfela	41
§8. Dynamika rynku	43
Rozdział 2. Grupa symetrii Lorentza	45
§1. Koszyki i cenniki, portfele i kursy	46
§2. Współrzędne fizyczne koszyków	48
§3. Metryka przestrzeni rzutowej portfeli	49
§4. Transformacje Lorentza	52
§5. Mankamenty geometryzacji rynku	53
Rozdział 3. Osiągalność — miara ryzyka finansowego	55
§1. Finansowe układy odniesienia	56
§2. Osiągalność instrumentu finansowego	58
§3. Co mierzy osiągalność?	59
§4. Euklidesowa niezmienniczość miary prostych	61
§5. Współrzędne biegunowe prostej	62
§6. Formuła Croftona	63
§7. Wykresy o nieskończonej długości	65

§8. Średnia długość rzutu na prostą	66
§9. Czas finansowy	67
<b>Rozdział 4. Transformacja Legendre'a</b>	<b>70</b>
§1. Hiperpowierzchnia stanu równowagi	72
§2. Tożsamości dla współczynników intensywności	73
§3. Nowe warianty prawa zachowania	75
§4. Koszyki i cenniki	77
§5. Podwójna księgowość	79
§6. Zysk	81
§7. Podręcznikowe przykłady	83
§8. Uogólnienia formalizmu	85
<b>Rozdział 5. Termodynamika portfeli kanonicznych</b>	<b>86</b>
§1. Ciepła statyka równowagi	86
§2. Cisi i gracze	87
§3. Portfel urnowy	88
§4. Miara informacji o graczu	90
§5. Rozwiązanie równania kumulowania informacji	91
§6. Entropia koniunkcji niezależnych cech gracza	93
§7. Kanoniczny portfel urnowy	94
§8. Zmiany zysku zespołów kanonicznych	97
§9. Zrównoważone zespoły kanoniczne	99
§10. Nieznane rynkowe potencjały termodynamiczne	100
§11. Przykład liczbowy	103
§12. Portfele współzmiennicze z kursem	104
<b>Rozdział 6. Temperatura dźwigni finansowej</b>	<b>107</b>
§1. Oscylator z powolną obligacją	107
§2. Oscylator Bąsika-Gąsiorowskiego	109
§3. Oscylator z powolną gotówką	111
§4. Temperatura arbitrażu	113
<b>Część 2. Algebraiczne własności stopy</b>	<b>117</b>
<b>Rozdział 7. Stopa macierzowa</b>	<b>119</b>
§1. Liniowe jednorodne procesy kapitałowe	119
§2. Interpretacja macierzowej stopy zwrotu	123
§3. Formalizm ciągłego opisu kredytowania	126
§4. Równoważność modeli dyskretnych i ciągłych	127
§5. Urojone stopy wzrostu	129
§6. Nieoddziaływujące zespolone procesy kapitałowe	131
<b>Rozdział 8. Dwoistość konwencji kredytowania</b>	<b>134</b>
§1. Kapitał a czas	134

§2. Podstawowe formy kredytowania	137
§3. Różne spojrzenia na kredyt	138
§4. Zagadnienie równoważności konwencji	140
§5. Dwoiste typy kredytów	142
§6. Komentarze	149
<b>Rozdział 9. Reprezentacja Bernoulliego</b>	<b>150</b>
§1. Operatorowa stopa zwrotu	150
§2. Algebra stopy	152
§3. Formuła Cauchy'ego	153
§4. Złożenia operacji podstawowych	154
§5. Suma teleskopowa	155
§6. Komutator — operacja dyskontowania	157
§7. Przekształcenia kanoniczne	158
§8. Skale czasowe	159
§9. Przykłady	159
<b>Rozdział 10. Reprezentacja dolna Newtona</b>	<b>162</b>
§1. Reprezentacja generatorów algebry stopy	162
§2. Formuła Cauchy'ego	163
§3. Suma teleskopowa	164
§4. Operacja dyskontowania	165
§5. Przykłady	166
<b>Rozdział 11. Reprezentacja górna Newtona</b>	<b>168</b>
§1. Reprezentacja generatorów algebry stopy	168
§2. Formuła Cauchy'ego	169
§3. Suma teleskopowa	170
§4. Operacja dyskontowania	170
§5. Przykłady	171
§6. Wspólne cechy reprezentacji algebry stopy	172
§7. Reprezentacje efektywne	173
<b>Rozdział 12. Stochastyczna reprezentacja algebry stopy</b>	<b>175</b>
§1. Reprezentacja Gaussa	176
§2. Złożenia operacji $r$ i $s$	177
§3. Wielomiany Hermita $n! s^n 1$	178
§4. Funkcja tworząca	180
§5. Przestrzeń Hilberta	181
§6. Własność splotu wielomianów Hermita	183
§7. Operacja dyskontowania $[r, s]^{-1}$	184
§8. Od reprezentacji Bernoulliego do reprezentacji Gaussa	185
§9. Statystyczny pomiar pochodnych	187
§10. Ciąg stóp gaussowskich	188

§11. Przykłady liczbowe	189
§12. Rachunek operatorowy Mikusińskiego	190
§13. Dygresja	192
<b>Rozdział 13. Hiperstopa</b>	<b>193</b>
§1. Funkcje liczbowe na $\mathbb{R}_+$	194
§2. Funkcje schodkowe na $\mathbb{R}_+$	196
§3. Ułamki funkcyjne	197
§4. Ułamek przesunięcia $\delta_\tau$	203
§5. Hiperstopa procentowa	204
§6. Renta wieczysta	206
§7. Przykład wyznaczania hiperstopy	207
§8. Popadanie w długi	209
§9. Przykład hiperstopy zespolonej	210
§10. Uwagi	211
<b>Część 3. Rynek kwantowy</b>	<b>213</b>
<b>Rozdział 14. Taktyka racjonalnego kupca</b>	<b>215</b>
§1. Natężenie zysku	215
§2. Model racjonalnego kupca	216
§3. Unikalna własność kupieckiego zysku	219
§4. Dwoisty model kontrolowanej sprzedaży	221
§5. Krzywe podaży i popytu	222
<b>Rozdział 15. Rynkowe gry kwantowe</b>	<b>225</b>
§1. Gry rynkowe	226
§2. Kwantowy model rynku	227
§3. Algorytm maksymalizujący obrót kapitałowy	230
§4. Rynek instrumentem pomiarowym	232
§5. Stany czyste graczy rynkowych	234
§6. Stany mieszane, strategie termiczne	236
§7. Rynek rozliczany komputerem kwantowym	238
<b>Rozdział 16. Interferencja strategii rynkowych</b>	<b>239</b>
§1. Taktyki zmieniające popyt	239
§2. Efekty taktyki $\mathcal{D}_\Delta(\xi_0, \xi_1)$ dla strategii gaussowskiej	241
§3. Transformacja Fouriera obrazów taktyk $\mathcal{D}_\Delta(z)$	244
§4. Popyt warunkowy	245
§5. Samouzgadniająca się taktyki nieliniowe	249
<b>Rozdział 17. Kwantowa dyfuzja cen i zysków</b>	<b>251</b>
§1. Tomografia rynkowa	251
§2. Transformacje kanoniczne	254
§3. Dyfuzja ceny	255

§4. „Klasyczny” obraz kwantowej dyfuzji	257
§5. Paradoksalna własność dryfu cenowego	260
§6. Résumé	261
<b>Rozdział 18. Targi kwantowe</b>	<b>262</b>
§1. Sfera Riemanna stanów polaryzacji Alicji	263
§2. Polaryzacja $q$ -targu	265
§3. Warunek racjonalności decyzji o dobieciu targu	268
§4. Model $q$ -targów Alicji z resztą świata	270
§5. Temperatury mieszanin $q$ -targów	273
§6. Końcowe uwagi	275
<b>Rozdział 19. Kwantowe aukcje angielskie</b>	<b>277</b>
§1. $Q$ -targ z jednostronną licytacją	277
§2. $Q$ -aukcja z dominującym licytującym	279
§3. Jednakowe strategie licytujących	280
§4. Asymptotyka natężenia zysku	284
§5. Zysk uczestnika licytacji	285
§6. Zyski a posteriori	287
§7. Ku pełnej teorii $q$ -aukcji	288
<b>Rozdział 20. Komputer kwantowy instrumentem gry rynkowej</b>	<b>290</b>
§1. Interferencje decyzji kupieckich	291
§2. Niekolektywne taktyki kwantowe	292
§3. Funkcja Wignera jednej strategii	295
§4. Niekolektywna gra z rynkiem proponującym ceny	298
§5. Alianse	299
§6. Alianse a pomiar i interferencja	301
§7. Uwagi o rynkowych grach kolektywnych	304
<b>Rozdział 21. Kwantowe rozwiązanie paradoksu Newcomba</b>	<b>308</b>
§1. Newcombmania	308
§2. Kwantowy opis gry	309
§3. Paradoks Newcomba	310
§4. Taktyki Ziemian i Omegi	311
§5. Przebieg gry i jej wyniki	312
§6. Rynkowa interpretacja gry	314
<b>Uzupełnienia</b>	<b>317</b>
§1. Obrazy krzywych na rurze Croftona	317
§2. Wyznaczanie temperatury portfela	319
§3. Wyznaczanie stóp w reprezentacji Bernoulliego	320
§4. Postać całkowita wielomianów Hermita	321
§5. Równoważność konwencji kredytowych	322

Zestaw niektórych oznaczeń	325
Bibliografia	328
Skorowidz	336

**Część 1**

**Geometryczna struktura rynku**

Geometria analityczna rzutowa odznacza się jednak – w porównaniu z geometrią metryczną – dużo większą symetrią i ogólnością. Na odwrót, jeżeli chcemy zinterpretować geometrycznie subtelniejsze związki algebraiczne, nadajemy im zazwyczaj formę jednorodną i interpretujemy zmienne jako współrzędne jednorodne, gdyż interpretacja metryczna w układzie kartezjańskim byłaby nieprzejrzysta. Możemy nawet traktować metrykę jako specjalną część geometrii rzutowej.

*Dawid Hilbert, [HCV56]*



## Dyrektywy

*Zamek*, pełna koszmarów powieść Franza Kafki, jest właśnie opisem zgubnych skutków zdalnego sterowania. Geometra K. zatrudniony został przez władze, nikt jednak nie wie jak ani dlaczego. Ludzie, których spotyka, mówią mu: „...niestety my nie potrzebujemy geometry. [...] Do czegoż mógłby przydać się nam geometra?”.

Fritz Schumacher<sup>1</sup>[Sch81]

---

### § 1. Metodologia

Wydaje się, że dynamiczna zmiana obszarów intensywnych badań ekonomicznych prowadzonych w ostatnich dziesięcioleciach w USA była konsekwencją głębokiej rewizji stosowanych przez nie narzędzi matematycznych i wdrożenia nowych technik, jakie zaproponowała informatyka. Przeżyła się zawsze podejrzana teza, jakoby ze studiowania i doskonalenia jedynie samego formalizmu nie możemy się niczego naprawdę nowego dowiedzieć o *porządkowanej przy jego pomocy rzeczywistości*. Przeczą jej najbardziej innowacyjne osiągnięcia badawcze. Ograniczająca się jedynie do aparatu matematycznego próba Harry’ego Markowitza odpowiedzi na proste pytanie: *jak mierzyć i dywersyfikować ryzyko finansowe?* doprowadziła do powstania wykorzystywanej dziś przez każdego nowoczesnego inwestora teorii portfela. Rozwiązanie zadania wyznaczenia oczekiwanej ceny opcji europejskiej na podstawie modelu dyfuzji logarytmów cen<sup>2</sup> wyposażyło nas w najczęściej używaną formułę rachunkową. Może imponować powszechność wykorzystywania tych cieszących

---

<sup>1</sup>angielski ekonomista Fritz (Ernst Friedrich) Schumacher w latach 1946-50 był doradcą ekonomicznym British Control Commission w Niemczech, potem m.in. pełnił funkcję doradcy ekonomicznego rządu brytyjskiego do spraw krajów rozwijających się

<sup>2</sup>czyli bazujący na teorii Bacheliera model Blacka-Mertona-Scholesa

się szerokim uznaniem i nagrodzonych medalem noblowskim<sup>3</sup> bezprecedensowych osiągnięć. Nawet teoria liczb, podawana kiedyś jako koronny przykład niezdatnego nikomu formalizmu, w wyniku studiowania posiadającego kluczowe kryptograficzne znaczenie problemu złożoności obliczeniowej algorytmów, okazała się dla badaczy wszelakich dyscyplin nauką wyjątkowo pouczającą i użyteczną<sup>4</sup>. Ilość możliwych do wygenerowania nierzeczywistych, acz formalnie spójnych problemów i prawidłowości, w ramach twardej i rozwijanej w interakcji z teoriami empirycznymi matematyki, jest znikomo mała w porównaniu z liczbą skompromitowanych, choć kiedyś znaczących teorii, które zbudowano na bazie języków miękkich [Nal76]. Dla przykładu arystotelesowska „nauka”, mimo swej bez wątpienia wyjątkowej logicznej spójności i ciągłego odwoływania się do zjawisk rzeczywistych, charakteryzowała się dużą ilością kompletnie bezużytecznych i błędnie rozpoznających rzeczywistość, niefalsyfikowalnych<sup>5</sup> w jej ramach wniosków<sup>6</sup>. Fascynujący jest problem występowania tego, dla wielu ewidentnego, paradoksu. Wybitny i uznany badacz David Deutsch objaśnia go w ramach swego szokującego wielu, lecz w pełni zgodnego z całą współczesną wiedzą naukową światopoglądu, który prezentuje w popularnym i przetłumaczonym na wiele języków dziele [Deu98].

Mimo iż w minionych kilkudziesięciu latach obserwowaliśmy burzliwe pasmo przełomowych odkryć naukowych i wyłaniania się nowych dyscyplin poznawczych na stykach wielu dziedzin wiedzy, to w tym okresie nauki empiryczne mogły cieszyć się względną trwałością obowiązujących paradygmatów<sup>7</sup>. Jednak istnieją dziedziny badań nie pasujące do tej prawidłowości. Np. neoklasyczna ekonomia — w niej ciągle koegzystują wzajemnie sprzeczne koncepcje i zwalczające się szkoły [Bla94, Bla95]. Może, przynajmniej po części, jest tak dlatego, że dominujące techniki badawcze nazbyt często bagatelizują znaczenie, jakie ma w nauce precyzyjne definiowanie wielkości mierzalnych, które występują w modelach? Chodzi tu nie tyle o dokładne wykonywanie ich pomiaru<sup>8</sup> ile o zgodne z wewnętrzną symetrią procesów definiowanie zmiennych w konstruowanych modelach. Brak takiej koherencji nęci, gdyż z reguły znacznie zwiększa siłę predykcji teorii, atoli sukces ten jest pozorny, bo osiąganym jest

<sup>3</sup>odpowiednio w 1990 i 1997 roku

<sup>4</sup>historia tego przypadku stanowi znakomitą przestrożę dla „myślących inaczej”, którzy w wielu środowiskach ciągle lansują swe zdezawuowane poglądy jako „jedyne rozsądne stanowisko”. Nawet wielki Godfrey Harold Hardy mógł głosić w swej *Apologii* [Har97] (którą Graham Green nazwał bodaj najlepszym opisem kreatywnego umysłu, jaki kiedykolwiek powstał) rychło skompromitowane stanowisko, lecz on czynił to trzydzieści lat przed nie dającą się zanegować kryptograficzną rewolucją końca lat 70-tych XX wieku.

<sup>5</sup>książka Karla Poppera [Pop77] stanowi pierwsze pod każdym względem studium falsyfikowalności teorii naukowej — kategorii mającej kluczowe znaczenie dla odkrycia naukowego

<sup>6</sup>kariera arystotelesowskich „teorii” była możliwa jedynie w czasach prymitywnego i nieewolucyjnego, autarkicznego i autorytarnego modelu „nauki”

<sup>7</sup>więc nie mieliśmy do czynienia z rewolucją naukową [Kuh68]

<sup>8</sup>zob. pomiar pozbawiony teorii [Bla95]

kosztem utraty podatności teorii na falsyfikację. Rozważmy powszechnie znane z innych nauk przykłady. Teoria ruchu planet wyposażona w arytmetykę i logikę klasyczną, lecz pozbawiona symetrii ptolomeuszowych epicykli, współzmienników Johanna Keplera, czy niezmienników energii i momentu pędu układu stałaby się jedynie pozbawioną walorów poznawczych astrologią<sup>9</sup>. W szczególnej teorii względności uwzględnianie addytywne kumulowanej prędkości przy przechodzeniu do kolejnych, poruszających się względem siebie, układów prowadzi do błędnych (choć precyzyjnych liczbowo) wyników<sup>10</sup>. Mierzenie ilości substancji kilogramami, a nie molami, nie pozwoliłoby uchwycić uniwersalnych prawidłowości bilansu rządzącego reakcjami chemicznymi. Taksonomia formułowała wiele tez, niedopuszczalnych z punktu widzenia genetyki. Zaś genetycy musieli dokonać gruntownej rewizji swej wiedzy po odkryciu struktury kodu genetycznego. Jednak ekonomista zapytany o symetrię opisywanych przez niego zjawisk daleki jest od wyrażenia jej w dającym się zweryfikować języku teorii grup, czy przynajmniej opisanie charakterystyki niezmienników bądź współzmienników, właściwych dla analizowanego zjawiska. Jest tak, gdyż większość stosowanych obecnie w ekonomii wielkości liczbowych nie posiada właściwości niezmienniczych, bądź współzmienniczych. A nie ma mowy o pełnym zrozumieniu głębokich konsekwencji wynikających z matematycznego modelu zjawiska bez tej wiedzy. Przypomnijmy, że *niezmiennik* danego procesu (transformacji) to wielkość liczbowo stała w trakcie tego procesu, w przeciwieństwie do *współzmiennika*, którego wartość liczbowo ma sens jedynie w kontekście do wybranego wcześniej układu odniesienia i podlega ściśle określonym (zwykle liniowym) przekształceniom. Poza tym warto jest zauważyć, że w dominującym sposobie przedstawiania ekonomii większość definicji i krzywych ilustrujących zjawiska rynkowe ma w pełni transcendentálny charakter. Wtedy staje się niemożliwe konstruowanie realizowalnych in posse myślowych eksperymentów krzyżowych, które pozwoliłyby definitywnie rozstrzygać pomiędzy znoszącymi się wzajemnie hipotezami. Za przykład niech posłużą wszechobecne w podręcznikach ekonomii krzywe podaży czy popytu, zob. np. [SN89, Bla94]<sup>11</sup>. Opisywane przez nie zagregowane strumienie dóbr, odnośnie których zwykle mamy do czynienia z sybstitutami, przepływami odroczonymi (lub zaniechanymi,

---

<sup>9</sup>wiele ciekawych spostrzeżeń na temat zgubnych skutków tolerancji dla wszelkich pseudonauk znajdziemy u wybitnego tropiciela tych omamów, wieloletniego autora stałego działu w *Scientific American*, Martina Gardnera [Gar97]

<sup>10</sup>w rozdziale 2 tej części monografii znajdziemy argumenty wskazujące na związek cen czy koszyków rynkowych z symetriami szczególnej teorii względności. Nieświadomość tej własności musi prowadzić do sprzeczności znanych fizykom z błędów, jakie zwolennicy teorii Newtona generują w trakcie wyjaśniania zjawisk relatywistycznych.

<sup>11</sup>choć u tego samego Blauga w [Bla95] czytamy: „Zamiast próbować obalać testowalne prognozy, współcześni ekonomiści ciągle zbyt często zadowolają się demonstrowaniem, że realny świat potwierdza ich przepowiednie, zastępując w ten sposób trudną falsyfikację łatwą weryfikacją.”

байдь wtórnymi) czy z niezdeteminowaną<sup>12</sup> reakcją podmiotów rynkowych na informację, są w zasadzie wyobrażalne. Jednak na tle gospodarki rynkowej, do której odnoszą się te charakterystyki, nie sposób wyobrazić sobie jakikolwiek, niezaburzających rynku, metod reprezentatywnego pozyskania takich danych<sup>13</sup>, nawet jeśli nie dotyczą one jedynie rzeczywistości wirtualnej<sup>14</sup>. Także niejasny jest (więc i nieprecyzowany) pełny zakres dziedziny tych relacji podaży i popytu. A przecież wcale tak być nie musi<sup>15</sup>. Przedstawione w kolejnych rozdziałach koncepcje powinny przekonać czytelnika świadomego kluczowego znaczenia, jakie, dla poznania głębokich prawidłowości rządzących rzeczywistością, mają w nauce badania nad symetrią.

Celem dociekań przedstawionych w kolejnych rozdziałach wszystkich trzech części tej rozprawy jest określenie precyzyjnej, matematycznie niesprzecznej i posiadającej duży stopień geometrycznej symetrii metody badawczej, tj. struktury abstrakcyjnych pojęć, zawierającej elementarne „cegiełki”, które mogą posłużyć do konstrukcji jak najszerszego spektrum modeli ekonomicznych. Nauki empiryczne zwykły skupiać się na pojęciowo wyrazistych, acz często głęboko abstrakcyjnych, elementarnych składnikach teorii. Teoria jest osnową, złożoną z niesprzecznych relacji pomiędzy wszystkimi tymi elementami, uzupełnioną o reguły korespondencji wiążące niektóre z nich z rzeczywistymi czy symulowanymi zjawiskami. Owe podstawowe elementy wyselekcjonowane są spośród multum innych, potencjalnie możliwych, przy użyciu *brzytwy Ockhama* [Wie00] i stanowią budulec konstrukcji pozwalających modelować obserwowane, czy prognozowane, sytuacje. Bez wątpienia centralnym obiektem zainteresowania ekonomii jest gospodarujące społeczeństwo. Jednak, w zgodzie z ockhamowską zasadą, gdzie to nie jest konieczne — artykułować tego autor nie będzie. Niech za argument uzasadniający taki styl rozprawy wystarczy znacznie dalej idący radykalizm naukowy samego Laplace’a. Podczas jednej z okazji Napoleon zwrócił się do niego słowami [Mor15]: „Powiedziano mi, że napisałeś wielką księgę o systemie wszechświata i nigdzie nawet nie wspomniałeś o Stwórcy.” Odpowiedzią było: „Nie potrzebowałem przyjmować tej hipotezy.”

Wymieniony powyżej wymóg matematycznej niesprzeczności to fundamentalna cecha każdej teorii naukowej, która jest konieczna dla ochrony badań przed oszustwem. Często jest on marginalizowany przez dyscypliny stosujące tzw. metodę dialektyczną, postrzegającą w sprzecznościach wywodzonych konkluzji mechanizm postępu. Niestety teorie dialektyczne potrafią wyjaśniać nader

<sup>12</sup>zagadnieniu wolnej woli i jego zaskakującemu rozwiązaniu w kontekście kwantowych gier rynkowych poświęcony jest końcowy rozdział 3-ciej części tej rozprawy

<sup>13</sup>badania budżetów rodzinnych pozwalają wnioskować o zmianach popytu na skutek zmiany dochodu, a nie na skutek zmian cenowych [Lan61]

<sup>14</sup>dlatego np. skazywani jesteśmy na przeglądanie wykresów notowań cen akcji spółek giełdowych (czy innych instrumentów finansowych) w sytuacjach, gdy marzylibyśmy o wglądzie w odpowiednie krzywe podaży i popytowe

<sup>15</sup>por. definicje podaży i popytu zamieszczone w części trzeciej tej rozprawy

łatwo zbyt wiele zjawisk. Własność ta czyni je niezwykle odpornymi na jakąkolwiek falsyfikację, upodabniając tym do pseudonauk. Dlatego często przydają się instrumentalnie m.in. w polityce i marketingu. Nawiasem warto jest zauważyć, iż nie jest prawdziwą postrzegana przez dialektyków za oczywistą tezę, że jednocześnie traktowanie podmiotu badającego jako przedmiotu badań stanowi immanentne źródło sprzeczności. Poglądowi takiemu przeczy teoria kwantowa, odnosząca już od stulecia bezprecedensowe sukcesy [TW01] w naukach ścisłych.

Składnikami tworzonej osnowy będą tak powszechne występujące w podręcznikach ekonomii pojęcia jak np.: *cena*, *pieniądz*, *dobro rynkowe*, czy *zysk*<sup>16</sup>. Jednocześnie autor starał się do minimum ograniczyć używanie terminów ekonomicznych odwołujących się do ocen subiektywnych, takich jak np.: *praca*, *wartość*<sup>17</sup>, *rozwój*. Podjęte rozważania nie będą odnosić się do zagadnień związanych z procesami produkcji, choć proponowany model pozwala na to. W epoce spełniającej się wizji wioski McLuhana ograniczenie ekonomii do zagadnień wytwarzania wydaje się archaizmem. Zdominowanie nowoczesnego rynku przez usługi, techniki informatyczne, przemysł mediów, reklamę czy badania naukowe zmusza do pozostawienia branżowym specjalistom zadań odnajdywania szczególnych sposobów wzrostu efektywności gospodarowania. Mierzenie tej efektywności, sugerowanie zyskowych i bezpiecznych rozwiązań inwestycyjnych, czy tylko konstruowanie obiektywnej prognozy w oparciu o rozpoznawane rozwojowe bądź destrukcyjne trendy, to zadania które będą wymagać ciągle dokładniejszego ilościowego opisu rynku, rozdzielającego istotną informację od pozbawionych znaczenia syntaktycznych artefaktów.

---

<sup>16</sup>w literaturze ekonomicznej, ilościowo opisującej zysk czy wzrost, wielkości te zwykle się podawać w jednostkach pieniężnych, bądź w miarach względnych takich jak procent, czy procent składany. W zależności od przyjętego statystycznego modelu rachunkowego optymalizowanie wartości oczekiwanych tych zmiennych losowych prowadzi do odmiennych wniosków (por. wskazujące problem, lecz metodologicznie osobliwe uwagi Johna R. Hicksa w [Hic78], str. 46-47, który w rozbieżnościach wyników powstałych na skutek odmiennego liczenia średnich dostrzega jedynie immanentną niedoskonałość stochastycznego opisu), a więc różniących się pomiędzy sobą „racjonalnych” preferencji. Dzieje się tak m.in. z powodu nieprzemienności operacji uśredniania  $E(\dots)$  dowolnej rzeczywistej zmiennej losowej  $v$  z wyznaczeniem funkcji rzeczywistej  $f(\dots)$  tej zmiennej  $E(f(v)) \neq f(E(v))$ .

<sup>17</sup>słowo *wartość* będzie używane jedynie w swym obiektywnym znaczeniu, tj. jako *wartość rynkowa*, bez wdawania się w rozważania na temat czynników mających wpływ na tą wielkość. Jak się okaże w §10 rozdziału 5, ona sama, jak i jej funkcyjne zależności oraz równanie bilansu z nią związane, mogą być postrzegane na wiele istotnie różnych, choć w pełni równoważnych sposobów

## § 2. Antycypacja informacyjnego modelu rynku

Teoria z konieczności odległa pod względem jednoznaczności logicznej od takich wzorców, jak dyscypliny czystej matematyki, czy niezwykle precyzyjne w przewidywaniach modele fundamentalnych oddziaływań, posiada ogromną ilość niemożliwych do pełnego przedstawienia, mniej lub bardziej istotnych założeń, które prawie nigdy nie są świadomie używane przez badaczy, a które mogą odegrać nieoczekiwane istotną rolę w nowych konstrukcjach. Całą historię nauki można w zasadzie postrzegać jako ciąg świeżych idei wyłaniających się nie z nikąd, lecz z wielokrotnie drobiazgowo studiowanych modeli. W tym sensie teorie naukowe prawie nigdy nie stanowią systemów zamkniętych, co nie zwalnia nas z konieczności ciągłego ich „przyomykania” za pomocą stosowanej transformacji sformułowań oraz matematyzacji języka.

**2.1. Postulowane właściwości rynku** Pamięając o powyższych uwagach przejrzymy teraz podstawowe założenia modelu, które sformułowane zostały dość nietypowy sposób ze względu na późniejszą łatwość badania występujących na rynku dwoistości. Założenia te daje się pogrupować w parę postulatów pozostających w dwoistej relacji względem siebie tak, że jeden element każdej pary odnosi się do aspektów cenowych rynku, a drugi do strategii działających na nim inwestorów. Ta symetria pozwala na łatwy opis fundamentalnych zależności ilościowych modelu w języku geometrii rzutowej. Niczym przejdziemy do postulatów rynkowych warto jest precyzyjnie scharakteryzować interesujące nas później cechy elementarnego zdarzenia rynkowego, jakim jest transakcja. Otóż *transakcją* będziemy nazywać każdą, dokonaną w pojedynczej chwili czasu, swobodną wymianę (wzajemne przekazanie uprawnień właścicielskich) niezerowych ilości dwóch dóbr, do której dochodzi pomiędzy dwoma ich, kierującymi się chęcią osiągnięcia zysku<sup>18</sup>, dotychczasowymi właścicielami (zwanymi dalej także uczestnikami rynku, bądź inwestorami). Proporcję<sup>19</sup> w jakiej dobra te są wymieniane nazywać będziemy *ceną transakcyjną*. Określając arbitralnie (lecz jednakowo dla całego rynku) jednostki kolejnych dóbr możemy ceny transakcyjne reprezentować liczbami bezwymiarowymi<sup>20</sup>.

Oto kolejne postulaty określające zasadnicze właściwości wyidealizowanego rynku<sup>21</sup>, dla wygody rozróżniania oznaczone kolorami karcianymi:

### ♣. O wystarczającej różnorodności transakcji

<sup>18</sup>a precyzyjniej — chęcią zwiększenia natężenia zysku w całej czekającej ich i przez nich planowanej przyszłości (por. rozdział o taktyce racjonalnego kupca w części trzeciej *Dwoistości*)

<sup>19</sup>np. 2 krzesła w zamian za 65 kg ryżu

<sup>20</sup>ciągle pamiętając jakiej pary dóbr dotyczą

♣'. Wszystkie typy aktywów<sup>22</sup> i pasywów (dalej określane wspólnym mianem *dóbr rynkowych*) parami i w niezerowych ilościach nieprzerwanie<sup>23</sup> podlegają transakcjom.

♣''. Istnieje na tyle duża liczba inwestorów, którzy w obustronnie akceptowanych chwilach zawierają parami transakcje, że handel każdym dobrem rynkowym odbywa się nieustannie<sup>23</sup>.

Abstrahujemy od dóbr charakteryzujących się niską płynnością rynkową, gdyż wydaje się, że m.in. dzięki rosnącej dostępności nowoczesnych technik informatycznych ich udział w rynku, już dziś niewielki, stanie się całkiem nieistotny. Zgodnie z proponowanym podejściem dobra mogą przyjmować tak dodatnie, jak i ujemne wartości (wtedy zwykliśmy nazywać je zobowiązaniami). Warto jest wyzbyć się powszechnego przyzwyczajenia, jakim jest pejoratywne postrzeganie przez dłużnika zobowiązań. We właściwie zbilansowanym portfelu długi są tej samej wielkości źródłem potencjalnych zysków co aktywa, a prawidłowo mierzony logarytmami zysk<sup>24</sup> jest wypadkową zarówno wzrostu aktywów jak i pomniejszenia się zadłużenia. Pewne typy dóbr możemy uznać za rynkowe, np. podatki, mimo iż nie podlegają one transakcjom, wtedy ich wartość powinna być precyzyjnie określona<sup>25</sup>, a ich przepływy w pełni zdeterminowane.

#### ◇. O parametryzowalności<sup>26</sup>

◇'. Dobro znajdujące się w obrocie rynkowym ma w danej chwili dla wszystkich potencjalnie<sup>27</sup> jednakową cenę rynkową<sup>28</sup>.

◇''. Przy arbitralnie narzuconych jednostkach dóbr transakcje rynkowe mogą dotyczyć ich dowolnych części.

ad ◇'. Jeśli nie istnieje odpowiedni, gwarantujący jednolitą cenę mechanizm prowadzenia transakcji<sup>29</sup>, to możemy uznać za jednolitą proporcję wymiany dobra

<sup>21</sup>nie będzie nas interesować pytanie, na ile ten ideał odpowiada rzeczywistości. Wszelkie konstrukcje teoretyczne abstrahują od ogromnej ilości szczegółów i w tym ich siła, jeśli tylko potrafią uchwycić fundamentalne właściwości opisywanej klasy zjawisk. O nieistotności szczegółów można orzekać dopiero ex post.

<sup>22</sup>w tym także kapitał trwały i ludzki, lecz jedynie wówczas, gdy są zbywalne (odstępowalne)

<sup>23</sup>tj. dostatecznie często, aby notowania cenowe można było efektywnie interpolować na ciągłą dziedzinę czasową. W opisie niekoniecznie ciągłej ewolucji cenowej wystarczy ograniczyć się do tej części czasu astronomicznego, w której funkcjonuje rynek, jednak wtedy należy kolejne kawałki czasu „skleić” w jedną zmienną rzeczywistą; zob. także str. 57.

<sup>24</sup>patrz §7 rozdz. 1

<sup>25</sup>patrz postulat ◇'

<sup>26</sup>czyli o skuteczności i sensowności pełnego ilościowego opisu rynku za pomocą zależnych od czasu zmiennych rzeczywistych

<sup>27</sup>w każdej chwili czasu zwykle znikoma część inwestorów zaangażowana jest w transakcje z udziałem tego dobra

<sup>28</sup>jednakowy dla wszystkich inwestorów parametr cenowy, do którego mogą oni odnosić ceny proponowane (czy akceptowane) w transakcjach nazwiemy *ceną rynkową*, *ceną jednolitą* albo po prostu *ceną*

$g_\mu$  na dobro  $g_\nu$  eksponent średniej ważonej logarytmów odpowiednich proporcji dóbr wymienianych w aktualnie zawieranych transakcjach

$$(0.1) \quad U(g_\nu, g_\mu) := e^{E(\ln \mathfrak{U}(g_\nu, g_\mu))}.$$

Naturalnymi wagami, niezależnymi od wartości wyznaczonej tak jednolitej ceny, są tu unormowane intensywności skumulowanych przepływów jednostek dobra  $g_\mu$  (bądź  $g_\nu$ ) w transakcjach  $g_\mu \leftrightarrow g_\nu$ , na przedziałach cenowych  $d \ln \mathfrak{U}(g_\nu, g_\mu)$ . Jest to jedyna konsyistentna, zbudowana w oparciu o średnią ważoną definicja, która zachowuje symetrię proporcji, a wtedy (przy spełnionym postulatcie  $\heartsuit'$ ) zachodzą pożądane własności<sup>30</sup>  $U(g_\mu, g_\nu) = 1/U(g_\nu, g_\mu)$  i  $U(g_\nu, g_\mu) \rightarrow \mathfrak{U}(g_\nu, g_\mu)$  na rynkach z jednolitymi cenami.

ad  $\diamondsuit''$ . Dobra rynkowe powinny być doskonale podzielne. Przyjmujemy, że dobra mogą uczestniczyć w obrocie rynkowym pośrednio, za pomocą swobodnie przekazywalnych, niefałszowalnych (niepowielalnych) i nie budzących wątpliwości co do swej autentyczności<sup>31</sup> praw własności do dowolnie (acz jednoznacznie) określonej części jednostki dobra. Wtedy wystarczy przyjąć, że właściwość podzielności na kawałki jest spełniana jedynie w powyższym sensie formalnym. W przypadku zastrzeżenia niepodzielności jakiegoś dobra można rozważyć<sup>32</sup> loterie z nim związane. Z zasady niekłopotliwa dowolna podzielność loteryjnych losów<sup>33</sup> wyznacza specyficzny sposób podziału tego dobra. Postulat  $\diamondsuit''$  zezwala na transakcje dotyczące w zasadzie każdej, scharakteryzowanej liczbą rzeczywistą, ilości jednostek jakiegokolwiek dobra rynkowego, co stwarza warunki, przy spełnieniu założeń  $\clubsuit$  i  $\heartsuit$ , swobodnego<sup>34</sup> kształtowania się cen transakcyjnych.

#### $\heartsuit$ . O konkurencji

$\heartsuit'$ . Dobro rynkowe nie może preferować jakiegokolwiek inwestora.

$\heartsuit''$ . Inwestor nie zdoła uprzywilejować żadnego dobra.

ad  $\heartsuit'$ . Postulujemy równość inwestorów. Zawierający transakcje mają zagwarantowany dostęp do rynku na tych samych dla wszystkich prawach, i nieograniczoną możliwość zaciągania czy udzielania pożyczek o jednolitej i wolnej od ryzyka, choć mogącej wykazywać zmienność czasową, stopie. Wszyscy mają także jednakowy dostęp do informacji o rynku. Lecz wiedza do jakiej dochodzą

<sup>29</sup>jak np. sposób rozliczania transakcji na WGPW w pierwszych latach funkcjonowania tej giełdy, czy mechanizmy opisane w [PS02]

<sup>30</sup>zob. własność 1.2

<sup>31</sup>własności te cechują pieniądz oraz wszelkie rzeczowe i zdematerializowane papiery wartościowe

<sup>32</sup>podobnie jak w teorii użyteczności von Neumanna i Morgensterna [vNM53]; zob. także w §3 rozdz. 5 użycie loterii w teoriiinformacyjnej metodzie określenia wiedzy inwestora

<sup>33</sup>mogą przecież występować w zdematerializowanej postaci jako kryptograficznie uwierzytelniona informacja [Sch95a]

<sup>34</sup>ceny mogą przyjmować dowolne niezerowe wartości rzeczywiste



w oparciu o tą informację i (w konsekwencji) także ich zyski inwestycyjne nie muszą być takie same, bowiem stosowane przez nich algorytmy przetwarzania informacji są zazwyczaj różne. Jednakowe są stopy podatku dochodowego. Założenie  $\heartsuit$  dopuszcza zmienność podatków w czasie. Naruszanie warunku  $\heartsuit$  prowadzi, w zależności od rodzaju ingerencji, do zjawiska koncentracji (bądź dekoncentracji) kapitału.

ad  $\heartsuit$ . Pojedynczy inwestor nie jest w stanie wpływać na ceny dóbr. Jednak kursy cenowe są wypadkową poglądów i działań wszystkich inwestorów. Dlatego warunek  $\heartsuit$  przestaje być spełniany w sytuacji zaniku różnorodności, gdy zaczyna dominować jeden język (jeden pogląd na skuteczność działań rynkowych), obowiązywać jeden model zachowań (w tym konsumpcji i mody inwestycyjnej). Tak więc globalizacja i koncentracja kapitału stanowią dla rynku wzajemnie dwoiste tendencje.

Założenia  $\heartsuit$  moglibyśmy nazwać warunkami koniecznymi (sprzyjającymi) jakie rynek (czy sektor rynku) powinien spełniać, aby w sposób niezakłócony mógł osiągnąć stan równowagi<sup>35</sup>. W takim rozumieniu w sytuacjach koncentrowania się kapitału (przy stosownych ograniczeniach obowiązujących monopole), czy globalizacji (przy dodatkowych regulacjach oferujących handicap nietypowym inwestorom<sup>36</sup>) możemy mówić jedynie o rynku stanów quasirównowagowych, w których zbiory dóbr i inwestorów są rozwarstwione i mogą być rozważane jako wzajemnie na siebie słabo oddziałujące rynki<sup>37</sup>. Jak się przekonamy (str. 14) założenia  $\heartsuit$  mogą być spełniane tylko w ograniczonym sensie. Do warunków



<sup>35</sup> Ten stan równowagi często nazywany jest *rynkiem efektywnym* [MS01], tj. takim, na którym nie sposób, nie ponosząc ryzyka, osiągnąć ponadprzeciętnych zysków. Trzecia część tej monografii poświęcona jest rynkowym strategiom kwantowym. Korzystanie z nich umożliwia zdobycie nadspodziewanie wysokich zysków w stanach poprzedzających osiągnięcie rynku efektywnego. Według tej kwantowej teorii logarytm ceny, dochodząc do stanu równowagi rynkowej, przejawia w krótkich skalach czasowych cechy tzw. *cząstki Browna*, w dłuższych — cechy właściwe tzw. *cząstce Rayleigha*. Choć hipoteza rynku efektywnego zakłada natychmiastową reakcję cen na nową informację rynkową, to bez wątpienia tempo przepływu informacji jest skończone (jest ograniczone np. nieprzekraczalną barierą prędkości światła). Splątanie stanów kwantowych pozwala na stosowanie protokołu supergęstego kodowania [NC00] (notabene posiadającego ciekawą interpretację w ramach strategii rynkowych, zob. przedostatni rozdział trzeciej części monografii). Umożliwia on przekazanie jedną elementarną porcją informacji kwantowej ( $q$ -bitem) dwóch bitów informacji, skraca więc tempo przepływu informacji o połowę, co pozwala wyprzedzić reakcję klasycznego rynku na nową informację i tym samym otwiera drogę do arbitrażu kwantowego, bazującego na kwantowym splątaniu [NC00] strategii w czasie poprzedzającym osiągnięcie równowagi. Dodatkowo omówiony w drugim rozdziale części trzeciej monografii kwantowy efekt Zenona spowalnia proces dochodzenia rynku do stanu efektywności [PS02]. Cecha niepowielalności kwantowych strategii (*no cloning theorem* [NC00]) zabezpiecza przed przejściem strategię przynoszącą zysk z takiego arbitrażu.

<sup>36</sup> np. premie za inwestycje ekologiczne, czy przywileje dla różnego rodzaju mniejszości

<sup>37</sup> przedstawiona w rozdz. 5 i 5 metoda oceny strategii inwestycyjnych pozwala porównywać inwestorów działających na różnych rynkach

określonych przez  $\heartsuit$  można jedynie zmierzać, należy je „lubić”. A jak definiujemy w modelu stan równowagi? Otóż na całym rynku (równowaga globalna), bądź na wyodrębnionej w wyniku rozwarstwienia jego części (równowaga lokalna) wraz z  $\heartsuit$  powinny być spełnione kolejne warunki:

♠. O przywracaniu konkurencji

♠'. Dobra zamienialne<sup>38</sup> (substytuty) są na rynku nierozróżnialne cenowo.<sup>39</sup> ♠''. Nie istnieje jakikolwiek powód, by rynek rozróżniał jednakowo działających inwestorów (strategie rynkowe).

ad ♠'. Łącznie z postulatem  $\diamondsuit'$  założenie to oznacza redukcję<sup>40</sup> opisu rynku do zbioru dóbr, których notowania cenowe są liniowo niezależne. Dopiero dzięki niej można efektywnie poszukiwać odpowiedzi na pytania o rynek o charakterze ilościowym. Stopy podatków związanych z wytwarzaniem, przetwarzaniem i obrotem dóbr mogących podlegać substytucji są jednakowe dla wszystkich uczestników rynku.

ad ♠''. Operująca na rynku w jawnej (zalegalizowanej) zмовie spółka, nieformalna (jawna, bądź tajna), czy nawet przypadkowo stosująca wspólną strategię klika, rozpatrywana jest w ramach modelu jako pojedynczy inwestor, nawet jeśli nie posiadamy jakichkolwiek innych przesłanek ku takiemu utożsamieniu. Inwestor reprezentuje w modelu całą klasę równoważnych strategii inwestycyjnych. W zależności od stopnia precyzowania opisu możemy utożsamiać strategię charakteryzującą się w jednakowych warunkach rynkowych tym samym zyskiem, albo tym samym zyskiem i ryzykiem, albo itd.<sup>41</sup> Postulat ♠'' wydaje się naturalny, gdyż badaczom mechanizmów funkcjonowania rynku powinno być całkowicie obojętne, czy korelacja strategii inwestycyjnych jest zaplanowana, spowodowana manipulacją informacyjną, spontaniczna czy wreszcie przypadkowa, jeśli tylko w kontekście zmian cenowych i przepływów kapitałowych prowadzi ona do takich samych efektów. M.in. umożliwi on nam w rozdziale 5 ilościowe powiązanie wiedzy o rynku mierzonej narzędziami teorii informacji z zyskami osiąganymi przez inwestora. Pojawiająca się nowa informacja wywołuje zmiany strategii inwestorów, stanowi więc *primum mobile* odchodzenia rynku od stanu równowagi. Przy braku jej napływu do stabilizacji rynku przyczynia

<sup>38</sup>wystarczy, że zamienialne jedynie dla przytłaczającej części tych inwestorów, którzy aktualnie wyrażają chęć nabycia któregoś z dóbr nazwanych zamienialnymi — w takim znaczeniu używamy słowa *substytut*

<sup>39</sup>stwierdzenie: *dobra nierozróżnialne cenowo są zamienialne* jest zawsze prawdziwe, gdyż cenowo równoważne dobra są jednakowo atrakcyjne jako lokaty kapitałowe

<sup>40</sup>w kolosalnej skali, gdyż problem badania zbiorów dóbr o mocy continuum redukujemy do zagadnień dotyczących rynku skończonej liczby dóbr

<sup>41</sup>w zapoczątkowanym ciągu zbiorów parametrów wyznaczających kolejne kryteria utożsamiania strategii na  $k$ -tym miejscu znajduje się pierwszych  $k$  momentów kumulacyjnych [LP69] zmiennej losowej, jaką jest zysk

się uniwersalna własność rozpraszania się (dezaktualizowania się) informacji, czyli termodynamiczna zasada niemalenia entropii w układach izolowanych od otoczenia<sup>42</sup>. Uzasadnia ona przyjęcie postulatów ♠.

Jest sprawą oczywistą, że zdefiniowany za pomocą powyższych założeń informacyjny model rynku (dalej oznaczany skrótem IMM) można by było określić za pomocą zbiorów wielu odmiennie brzmiących, acz równoważnych postulatów. Dla przykładu, ostatnią parę założeń można zastąpić<sup>43</sup> parą ich częściej spotykanych w literaturze ekonomicznej odpowiedników<sup>44</sup>:

♥'. Brak jest okazji do arbitrażu cenowego.      ♥''. Niemożność uzyskania przychodu ze skali.

ad ♥'. Chociaż możliwe są ponadprzeciętne zyski<sup>45</sup> osiągane w oparciu o indywidualną wiedzę inwestora o rynku, która manifestuje się stanowiącym o jej wartości algorytmem inwestycyjnym. Kierowanie się wiedzą zerową (czyli posługiwanie się tzw. algorytmem małpy<sup>46</sup>) może przynosić jedynie całkiem przypadkowe sukcesy bądź porażki inwestycyjne. Uwzględnienie kosztów transakcyjnych, nawet gdyby były one dla wszystkich inwestorów jednakowe i proporcjonalne do wartości transakcji<sup>47</sup>, wprowadziłoby do modelu ryzyko osiągania zysków z arbitrażu [PS03], co przy skończonych horyzontach czasowych różnicowałoby postulaty ♠' i ♥'.

ad ♥''. Wartość dóbr złożonych<sup>48</sup> jest sumą wartości ich wszystkich składników. Choć wartość rynkowa aktywów często nie stanowi sumy wartości ich rodzajowo różnych komponent<sup>49</sup>, to jednak w takich przypadkach założenie o addytywności wartości może zawsze *ex definitione* być spełnione przez wyodrębnienie, za Smithem<sup>50</sup>, z dobra złożonego (np. z  $N$  składników) jego wartości dodanej:  $av := u - \sum_{k=1}^N u_k$ , gdzie  $u$  jest jego ceną, a  $u_k$  — ceną jego  $k$ -tego składnika. Model IMM nie wyklucza kreacji czy anihilacji kapitału (dóbr).

<sup>42</sup>w kontekście modelu IMM epistemologicznie niezwykle interesująca jest możliwość wywiedzenia w teorii kwantowej tej zasady z prawa zachowania informacji! [HHDS03]

<sup>43</sup>udowodnienie tej możliwości warto jest potraktować jako proste i interesujące ćwiczenie

<sup>44</sup>zob. zamieszczoną na stronie 47 uwagę na temat złamania rzutowej symetrii rynku

<sup>45</sup>lub straty pojawiające się w przypadkach ujemnej wiedzy inwestycyjnej, zob. rozdz. 5

<sup>46</sup>decyzje o zawieraniu transakcji podejmowane są na podstawie losów wyciąganych przez małpę z kapelusza

<sup>47</sup>takie koszty nie generują przychodu ze skali

<sup>48</sup>z komponent, powiązanych ze sobą na skutek fizycznej, bądź formalnoprawnej konstrukcji dobra

<sup>49</sup>przykładami niech będą wartości: przedsiębiorstwa, ubezpieczenia kompleksowego, kompozycji potraw, czy kolekcjonerskiej butelki koniaku

<sup>50</sup>zob. [Smi49], gdzie występuje określenie *wartość dorzucana*

Warunki równowagi w postaci ♡ i ♥ łatwo odnajdziemy między wierszami podręcznikowych dowodów równoważenia się podaży z popytem<sup>51</sup>. Dla przykładu rozważmy następujący tekst: „*Żadna inna cena (prócz ceny równowagi — dopisek autora) nie ma szans trwałości na rynku. Wobec niewystarczającej ilości danego towaru na rynku ... cena towaru będzie wzrastała, gdyż znajdą się tacy, którzy chętnie zapłacą wyższą cenę, aby tylko nabyć potrzebny towar. Jeśli ... przeciwnie ..., to znajdą się tacy, którzy gotowi będą sprzedać po niższej cenie, aby pozbyć się towaru. W konsekwencji cena towaru ulegnie obniżce.*” [Lan61]. Aby wykazać prawdziwość wywodu przedstawionego w powyższym cytacie, trzeba przyjąć, że wszystko dzieje się w warunkach konkurencji, nie istnieją możliwości przychodu ze skali<sup>52</sup>, a arbitraż jest mechanizmem dochodzenia do cen równowagi. Lecz o takich, bądź o równoważnych im, warunkach autor cytowanego tekstu, podobnie jak wielu innych, zapomniał napisać. Warto jeszcze zwrócić uwagę, że założenia ♡ i ♥ nie pociągają za sobą trwałości cen. W czasach sprawnego przepływu informacji zjawiska trwałej ceny nie odnotowano na żadnym konkurencyjnym rynku. Zdaniem autora przyczyna owego hipotetycznego fenomenu byłaby fascynującą zagadką. Warunek braku arbitrażu ♥' oznacza subtelniejszą niż stałość (trwałość) własność, jaką jest przechodniość cen<sup>53</sup>.

Uwzględnienie postulatów ♠ pozwoli na rozważania, w których, dla zgłębienia dwoistych analogii, będziemy zamieniać w modelu rynku formalne role kursów cenowych i portfeli inwestycyjnych. Jednakowy dostęp do rynku (postulat ♡') nie może oznaczać pełnej o nim informacji, gdyż wtedy inwestorzy powodowani chęcią maksymalizacji swego zysku próbowaliby zawierać w danym momencie takie same (tj. najbardziej korzystne) transakcje, nierealizowalne, gdyż zabrakło by w nich drugiej strony. Równowaga zostałaby zniweczona na skutek załamania się postulatu ♡'', bo mielibyśmy do czynienia, zgodnie z założeniem ♠'', z jednym monstrualnym inwestorem. Owe wyłączenie się mechanizmu konkurencji ♡'' (w mikroskali odbywa się ono nieustannie) wydaje się tłumaczyć zawirowania cenowe, wynikające ze zjawiska owczego pędu na rynku. Perturbacje w zawieraniu transakcji są przyczyną załamania się kursów, które niszczy wartość posiadanej przez inwestorów, już zdezaktualizowanej informacji o rynku, więc znowu różnią się strategiami, a rozstrojone ceny transakcyjne są pośpiesznie równoważone na skutek działań arbitrażerów<sup>54</sup>, które ci mogą prowadzić aż do bariery kosztów transakcyjnych. A czy istnieje przyczyna roz-

pierwsze  
w tej  
książce po-  
szukiwanie  
dwoistości

<sup>51</sup>w naszych postulatach posługiwanie się krzywymi podaży i popytu okazało się zbędne. Zgodnie z modelem IMM definicje tych krzywych odnajdziemy w części trzeciej *Dwoistości wartości kapitału*.

<sup>52</sup>gdyby istniały, to np. mogliby się nie znaleźć chętni do sprzedaży po niższej cenie, bo nie opłacałaby się mniejsza i tańsza produkcja

<sup>53</sup>patrz str. 26

<sup>54</sup>arbitrażer to osoba przeprowadzająca arbitraż cenowy [Enc32, Szu23]. W literaturze występuje także synonim: arbitrażysta [Bre93].

regulowywania się rynku generująca scenariusz dwoisty do powyższego? Tak, można ją łatwo zauważyć analizując naturalne zjawisko wyłączające postulat ♡'. Wywołana czymkolwiek zmiana zapotrzebowania rynku na któreś z dóbr wyróżnia (pozytywnie, bądź negatywnie) w transakcjach inwestorów, którzy je aktualnie posiadają. Jego cena ulega więc zmianie w odpowiednim kierunku, lecz ta tendencja do zmiany ceny nie może być trwała, co gwarantuje postulat ♠'. Powodowani zyskiem inwestorzy<sup>55</sup>, na skutek wzrostu (bądź spadku) ceny dobra, zaczynają kreować<sup>56</sup> (bądź anihilować) jego substytuty, a poprzednio omawiany efekt dualny powiększa tylko nierównowagę. Potem tendencja taka zanika, bo dołączają się następni inwestorzy, dopasowujące się do sytuacji rynkowe strategie inwestorów wzajemnie się modyfikują, a rynek nasycy się substytutami, co przywraca warunek konkurencji ♡'. Ów proces trwa nieprzerwanie, gdyż subiektywne potrzeby uczestników rynku niezwykle rzadko stają się przyzwyczajeniami. Tak więc konkurencji ♡ nie da się zagwarantować. Zabezpieczając ♠ (i nie psując ♡ ingerencją w reguły gry rynkowej) można jedynie chronić mechanizmy ♡, które ją ciągle odtwarzają. W tym sensie równowaga rynkowa nie trwa lecz jest jedynie permanentnie przywracana. Przeto nadużyciem byłoby twierdzenie o logicznej prawdziwości postulatów ♡ w modelu IMM. Należałoby raczej stwierdzić, że IMM obejmuje te gry rynkowe, których zasady nie przeczą postulatowi ♡, gdzie gracze, dzięki prawdziwości ♠' i chęci osiągania zysku, przyczyniają się do naprawy ♡', a ciągle psują ♡ zmienne ze swej natury realne, bądź wyimaginowane, inne potrzeby tych graczy. Chęć zysku jest więc potrzebą wyjątkową, gdyż choć, tak jak inne, może ona popsuć ♡'', lecz jest konieczna do przywrócenia ♡'. Zaś postulat ♡'' przywraca pojawiająca się (na skutek zmiany cen) dezorientacja (negatywna zmiana wiedzy) inwestora. Dlatego dopiero możliwość obiektywnego ilościowego opisu<sup>57</sup> informacji posiadanej przez inwestora i bilansowania jej z jego zyskiem<sup>58</sup>, czyni model IMM konsystentnym<sup>59</sup>.

rynek jest grą przywracania równowagi

W powyżej przedstawiony sposób założenia ♣, ◇, ♡, ♠ wyznaczają model „samonaprawiającego się” rynku, który powinien umożliwiać analityczny ilościowy opis zmiennych efektów strategii inwestycyjnych i generować jeszcze nierozpoznane dwoiste analogie kursowo-portfelowe. Model IMM nie postuluje, że poszczególni inwestorzy muszą podejmować racjonalne decyzje, tzn. wybierać zawsze najkorzystniejsze dla siebie oferty transakcji, gdyż ich wiedza o tym, co dla nich okaże się najlepsze jest ograniczona i niejednakowa, a to znowu stanowi warunek konieczny zaistnienia równowagi. Osiągający najwyższe zyski

<sup>55</sup>co założyliśmy w sformułowanej na str. 8 definicji transakcji

<sup>56</sup>użycie w tym miejscu słowa *produkować* znacznie zawęziłoby zakres omawianego zjawiska

<sup>57</sup>patrz rozdz. 5

<sup>58</sup>chodzi tu o zasadę 5.19

<sup>59</sup>nazwa *informacyjny model rynku* oddaje fundamentalne znaczenie tego mechanizmu dla modelu

inwestorzy-liderzy potrafią dostatecznie skutecznie prognozować trendy rynkowe, a odkryty przez Darwina algorytm genetyczny<sup>60</sup> doskonale tłumaczy mechanizm wzrostu. Jednak nie wydaje się możliwym wykluczenie samobójczego trendu rynku, wymuszonego przez ignorującą realia większość inwestorów<sup>61</sup>.

Po odrzuceniu założenia ♠' (znanego z modelu APT<sup>62</sup> [EG98]) i przyjęciu kilku istotnych, lecz bardzo restryktywnie działających postulatów<sup>63</sup>, odpowiadających m.in. za preferencje inwestorów, specyficzną postać kształtowania się stóp zmiany cen dóbr i za zależności pomiędzy stopami zwrotu a ryzykiem inwestycyjnym, otrzymalibyśmy w wyniku warunki równoważne popularnemu w literaturze ekonomicznej, konkurencyjnemu dla APT, modelowi CAPM<sup>64</sup> [EG98], za który William Sharp w 1990 roku został uhonorowany Nagrodą Nobla. Model IMM kreuje wizję rynku dwoistą do proponowanej w modelach CAPM czy APT. To inwestorzy (z powodu swego ograniczenia umiejętności prognozowania przyszłości, które paradoksalnie staje się *conditio sine qua non* rynkowej wyceny kapitałów) zachowują się chaotycznie, zaś powstałe w wyniku tego chaosu ceny są zdeterminowane (na podobieństwo ciśnienia gazu). Nieprzypadkową wycenę kapitałów zapewnia niezerowa wiedza wzmacnianych za to ponadprzeciętnym zyskiem inwestorów, zaś przypadkowe składniki występujące w formule (0.1) kasują się wzajemnie przy dużej różnorodności strategii inwestycyjnych. W porównaniu do CAPM model IMM jest doktryną łatwiejszą w praktycznym użyciu — we wspólnej z CAPM sferze zastosowań nie wymaga ciężkich statystycznych opracowań reprezentatywnych danych cenowych, mniej agnostycystyczną i aplikacyjnie znacznie szerszą, gdyż uwzględnia inwestorów o zróżnicowanych umiejętnościach, obejmuje dowolne scenariusze kształtowania się stóp procentowych oraz tłumaczy mechanizm osiągnięcia równowagi rynkowej. Model IMM nie gwarantuje równowagi, rynek można zniszczyć zmianą

<sup>60</sup>zob. [Deu98]

<sup>61</sup>tą cechę gier odwołujących się bezpośrednio jedynie do wypadkowej mniej czy bardziej praktycznych decyzji uczestników doskonale ilustruje osobliwy wariant zakładów bukmacherskich, który opisał Hugo Steinhaus: *Przed kilku laty wymyślono we Wrocławiu taką grę: Osoby zebrane w pokoju składają po 1 zł i każda pisze na karteczce (niewidocznie dla innych) wysokość pokoju w centymetrach. Potem zbiera karteczki, sumuje liczby i oblicza średnią — czyja liczba jest najbliższa tej średniej, ten wygrywa całą pulę* [Ste59]. Dla większego podobieństwa z modelem IMM możemy przyjąć modyfikację, która polega na przesunięciu sufitu pokoju do wyznaczonej średniej wysokości.

<sup>62</sup>Arbitrage Pricing Theory

<sup>63</sup>model IMM nie zawiera założeń nr 1, 8 i 9 modelu CAPM (wg numeracji przyjętej w [EG98]), zaś zależności pozostałych siedmiu założeń CAPM i siedmiu postulatów IMM pozostają w następujących relacjach:  $\diamond'' \Leftrightarrow 2$ ,  $\heartsuit' \Rightarrow 3$ ,  $\heartsuit'' \Leftrightarrow 4$ ,  $\clubsuit' \wedge \heartsuit' \Rightarrow 6$ ,  $\heartsuit' \Rightarrow 7$ ,  $\clubsuit' \wedge \diamond' \wedge \spadesuit'' \Leftrightarrow 10$  (przy czym postulat ♠'' często jest wymieniany *explicité*). Ponieważ stopień sformalizowania wszystkich założeń jest niewielki i wiele dodatkowych własności modeli jest zwyczajowo przemilczanych, przeto powyższe związki są nieostre i mogą być postrzegane nieco inaczej.

<sup>64</sup>Capital Asset Pricing Model

reguł gry (np. zniesieniem otoczenia prawnego, które mu sprzyja). Jednak konsystencja modelu IMM z kwantowym opisem transakcji<sup>65</sup> sugeruje, że spełnienie uniwersalnego założenia o przywracaniu równowagi powinniśmy traktować jako zasadę antropiczną [PS01, ?]<sup>66</sup>, gdyż jest ona koniecznym warunkiem naszej egzystencji, tak w wymiarze ewolucji wszechświata, jak i w wymiarze społecznym.

**2.2. Stawiane hipotezy** Przedstawione wyżej założenia składają się na model funkcjonowania rynku, który powinien okazać się przydatny zarówno do opisu rynków finansowych jak i do badania strategii inwestycyjnych, czy zmienności komponent bilansu przedsiębiorstwa.

Wiele dojrzałych ilościowych teorii naukowych doczekało się na końcowym etapie rozwoju swojego formalizmu specyficznych dla nich modeli geometrycznych. Dla przykładu badanie równań Newtona zaowocowało sformułowaniem geometrii symplektycznej, konstruowanie modeli kwantowych oswoiło fizyków z przestrzeniami Hilberta, zaś penetrowanie zasad dziedziczenia doprowadziło genetyków do modelu podwójnej helisy. Księgowość już od setek lat z powodzeniem operuje równaniem bilansu, a choćby z uwagi na dwoisty charakter widoczny np. w posmodelu IMM, powinna się kryć za nim znacznie bogatsza struktura formalna w porównaniu do operacji równoważenia pozycji z jaką mamy do czynienia np. w bilansach handlowym, płatniczym, materiałowym czy wodnym. Powinna ona przypominać znane fizykom różne form bilansu cieplnego. Czy wiąże się z tym jakaś specyficzna dla ekonomii struktura metryczna? Naturalnym odniesieniem, także z uwagi na swe historyczne korzenie, są struktury budowane na bazie geometrii rzutowej. Stąd centralna hipoteza, której potwierdzenie przyświeca badaniom przedstawionym w następnych sześciu rozdziałach:

*Geometria rzutowa, wyposażona (stosownie do kontekstu inwestycyjnego) w strukturę metryczną i uzupełniona miarą informacji o skuteczności inwestora, stanowi precyzyjny formalizm, oferujący obiektywny wgląd w symetrie sytuacji oraz procesów inwestycyjnych.*

Stwierdzenie, że wyniki takiego podejścia będą wyjątkowo precyzyjne<sup>67</sup> jest oczywiste, ze względu na jego zmatematyzowany charakter. Dla współczesnej nauki, gdy badanie symetrii stanowi chyba najpotężniejsze narzędzie ilościowych analiz, bez wątplenia ważnymi powinny być pytania: Czy homografie są symetriami, zweryfikowanej bardziej niż jakiegokolwiek inne reguły skutecznego działania, zasady podwójnego zapisu księgowego? Jaką postać i interpretację

<sup>65</sup>zob. str. 102

<sup>66</sup>patrz także zakończenie części trzeciej *Dwoistości*

<sup>67</sup>tj. minimalnie rozmyte (w rozumieniu Nalimowa [Nal76]) i, z konieczności, rzadko trywialne. Przyjęte tu kryterium precyzji jest proste i uznawane przez większość metodologów nauki: formalizm poznawczy dysponujący bogatszą strukturą matematyczną jest bardziej precyzyjny

ekonomiczną mają ewentualne inne prawa charakteryzujące się rzutową symetrią? Czy proponowany geometryczny opis zysku pozwala ująć w swoich ramach także definicję miary ryzyka charakteryzującego portfel kapitałowy? W jaki sposób wykorzystująca informację o rynku wiedza inwestora zmienia wartość jego portfela (stan jego przedsiębiorstwa) i czy ten efekt ma odzwierciedlenie w prawie ilościowym będącym uogólnieniem podwójnego zapisu księgowego? A jak w wynikających z IMM relacjach ilościowych uwzględnić wiedzę inwestycyjną? Odpowiedziom na te pytania poświęcone są następne rozdziały. Przedstawiając konsekwencje założeń IMM za pomocą formalizmu statyki stanu równowagi, podejmiemy próbę rozszerzenia owego formalizmu na jeszcze niezaadoptowane do celów ekonomii obszary naszej wiedzy, jakim jest teoria informacji. Będzie to możliwe, gdyż analogiczne rozwinięcie formalizmu statyki o elementy należące dziś do teorii informacji jest dobrze zbadane. W historii nauki było ono już raz wykonane przy budowaniu termodynamicznego opisu materii. Realizacja nakreślonego wyżej przedsięwzięcia przyniesie w kolejnych rozdziałach argumenty przemawiające m.in. za słusnością kolejnych tez:

- *W języku geometrii rzutowej model IMM posiada naturalną możliwość ujmowania i badania rynkowych relacji ilościowych.* — (rozdziały 1 i 2)
- *Niestochastyczny sposób postrzegania zmian cenowych umożliwia alternatywny opis ryzyka instrumentu finansowego i jego interpretację.* — (rozdział 3)
- *Księgowość inwestycyjną można prowadzić w oparciu o odmienne formalizmy, eksponujące różne zbiory parametrów niezależnych.*<sup>68</sup> — (rozdział 4)
- *Model IMM prowadzi do równań bilansu uwzględniających wiedzę inwestycyjną.* — (rozdział 5)

---

<sup>68</sup> Taka relatywność opisu rynku w różnych reprezentacjach (zob. rozdz. 4 i 5) świadczy o tym, iż podejście rzutowe jest de facto jego metamodelem. Proponując możliwe sposoby odejścia od wynikających z przyzwyczajzeń i tradycji konwencji prowadzenia bilansu, pozwala odnaleźć odpowiedzi na pytanie: *co jest poprawną ilościowo (choć może jeszcze niepraktykowaną) formą księgowości, a co księgowością już nie jest?* Wydaje się to szczególnie ważne w kontekście zaistniałego ostatnio fenomenu kreatywnej księgowości.



- *Istnieje obiektywny sposób wyceny wartości strategii inwestora.*<sup>69</sup>  
— (rozdział 6)

Nie będą nas interesować motywy działania inwestorów. Ocenimy ich wiedzę (wartość inwestora) jedynie na podstawie uzyskiwanego wyniku (zysku) we właściwym kontekście dynamiki zmian kursów rynkowych<sup>70</sup>. Wartość inwestora musi być w pełni wyznaczona z tych danych i zawsze odpowiednio bilansować się z zarządzanym przez niego portfelem. W naszym modelu praca ludzka jest rozważana podobnie jak inne, typowe dobra. Dla przedstawienia walorów praktycznych IMM końcowa część tekstu poświęcona będzie wykazaniu iż

- *Algorytm oceny inwestycyjnej jest efektywny i obejmuje przypadki skrajnie nietypowych strategii inwestowania.* — (rozdział 6)

Tak więc w kolejnych rozdziałach *Geometrycznej struktury rynku* autor będzie się starał przekonać czytelnika o słuszności wszystkich wyżej sformułowanych hipotez, konstruując i analizując proponowany formalizm. Nie zabraknie także przykładów zastosowania badanego formalizmu. Są nimi znana z wielu podręczników ekonomii analiza funkcji Cobba–Douglasa i CES<sup>71</sup>, czy oryginalna propozycja pomiaru wartości informacyjnej strategii (temperatury inwestora) w skrajnie trudnym przypadku oscylatora Bąsika–Gąsiorowskiego<sup>72</sup>.

### § 3. *Użyte instrumentarium*

Przedstawimy teraz najważniejsze narzędzia niezbędne do przeprowadzenia analiz opisanych w następnych rozdziałach, wskazując na nie użyciem pogrubionej czcionki dla ich nazwania. Mają one rachunkowy charakter dzięki zanurzeniu IMM w formalizmie geometrii różniczkowej. Poczynione założenia pozwalają opisywać ceny i przepływy dóbr rynkowych **różniczkowalnymi**

<sup>69</sup> W tym także przedsiębiorstwa, które uwzględniamy w ramach IMM jedynie jako specyficzną formę inwestowania, więc abstrahujemy od problemów dotyczących technologii, zarządzania, prognoz dla branży, prawa, innowacji itp.. Mają one kapitalne znaczenie dla konstrukcji algorytmu inwestycyjnego, lecz nas nie interesują, gdyż jedynie ich efekt, w postaci odniesionej do reszty notowań krzywej wzrostu wartości rynkowej przedsiębiorstwa, dotyczy sposobu wyceny jakości inwestowania. Przedsiębiorstwa nie poddane permanentnemu procesowi wyceny w modelu IMM nas nie interesują. Stosowanie w ocenie wartości metod komparatywnych jest nie sprawdzaną przez rynek spekulacją więc wykracza poza model IMM, w którym bazujemy na cenach transakcyjnych. Co się tyczy spekulacji, to często działania arbitrażowe zyskują miano spekulacji. Szczególnie w powyższym kontekście wydaje się to stawianiem spraw na głowie.

<sup>70</sup> patrz rozdz. 5 i 6

<sup>71</sup> §7 rozdz. 4

<sup>72</sup> rozdz. 6

**funkcjami ciągłymi.** Za narzędzia badania IMM posłużą standardowe konstrukcje geometryczne operujące **niezmiennikami i współzmiennikami** rzutowych **symetrii**, które posiadają swoje nieostre odpowiedniki w intuicyjnie stosowanym od stuleci heurystycznym instrumentarium finansowym. Tamto stare instrumentarium nie wystarczy, jeśli chcemy dostrzec, różnicować, precyzyjnie opisać i wytłumaczyć ilościowe zależności opisywane w następnych rozdziałach. Łatwo to zauważyć studiując niezmatematyzowane podręczniki rachunkowości<sup>73</sup>. Użyte tam narzędzia poznawcze powodują koncentrację uwagi na konkretnych implementacjach metody księgowej (techniki, czynności, procedura, obróbka i przechowywanie danych), wiążąc historyczny rozwój księgowości przede wszystkim z technologicznym rozwojem narzędzi gromadzenia i przetwarzania danych. Autorowi wydaje się jednak, że (odnosząc się do problemu celnym językiem teorii informacji) istotą księgowości jest software, a nie hardware. Niepodobna jej uchwycić bez dostrzeżonych przez pomysłodawcę (Paciuolo) symetrii rzutowych. Naturalnym jest mówienie o rachunku nowoczesnym językiem rachunku i to szczególnie wtedy, gdy poszukuje się uniwersalnych (ahistorycznych) właściwości, które stanowią o jego sukcesie. Dopatrywanie się genezy sukcesu w osiągnięciach technologicznych często jest wynikiem pomieszania przyczyn i skutków lub błędnego postrzegania rozwoju cywilizacyjnego jako nieuchronnego postępu kierującego się interesem społecznym<sup>74</sup>. Za przestrożę przed takim spojrzeniem niech starczy, wynikające z zaniedbania badań nad ciągle jeszcze nieprecyzyjnymi, bądź przyjętymi ad hoc<sup>75</sup>, zasadami, zjawisko *kreatywnej księgowości*, powstałe przecież w dobie funkcjonowania niezwykle wydajnych narzędzi przetwarzania informacji.

Dziś przyjęty tu język opisu zjawisk rynkowych jest ugruntowanym wielowiekową tradycją standardem matematycznym. To dzięki niemu budowniczo- wie nowatorskich konstrukcji inżynierskich i badacze fundamentalnych zjawisk przyrody pierwsi stawiali pytania, które okazały się kluczowe dla nowożytnego rozwoju geometrii. Kojarzenie nazewnictwa geometrycznego ze zjawiskami rynkowymi jest usprawiedliwione proponowaną techniką badawczą. Stosowanie określeń spoza geometrii dla charakterystyki symetrii modelu opisującego wybrany aspekt rzeczywistości rynkowej stałoby w sprzeczności z epistemologicznym fundamentem: metodą kartezjańską i (także zdroworozsądkową) **regułą niemnożenia bytów**<sup>76</sup>. Owa reguła nie powinna jednak ograniczać naszej precyzji opisu. Stąd użytym narzędziem będzie uogólniona, bo zależna od kontekstu (**absolut**), definicja stopy, którą (z powodu braku odpowiednika w finansowej tradycji) określamy matematycznym mianem **dwustosunku**. Poza tym do generowania różnych formalizmów księgowania użyjemy **potencjałów**

<sup>73</sup>zob. dla przykładu [MB86, Now02]

<sup>74</sup>teleologia znajduje racjonalnie uzasadnienie jedynie w sferach teologii, bądź paranauk (łyсенkizm)

<sup>75</sup> np. w wyniku wygody legislacyjnej, bądź szkodliwych przyzwyczajzeń kulturowych

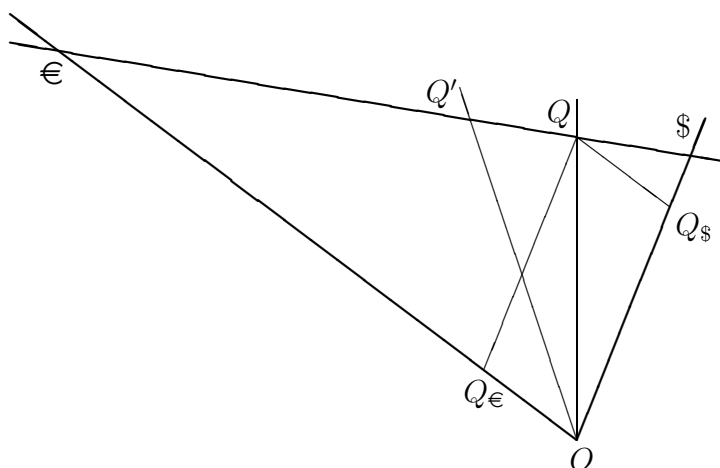
<sup>76</sup>tj. brzytą Ockhama (patrz str. 6)

**termodynamicznych.** Nazywanie ich po prostu „funkcjami” (co ma miejsce w literaturze ekonomicznej) w kontekście rozbudowanego formalizmu matematycznego prowadziłoby do licznych i groteskowych nieporozumień. Istotnymi miejscami pozwalającymi odnaleźć interesujący kontekst ekonomiczny będą otrzymane różne postaci **równań bilansu**. Wreszcie obiektami pozwalającymi dopełnić owe równania bilansu będą wychodzące poza deterministyczny obraz rynku nowe (na gruncie ekonomii) parametry: zajmująca centralne miejsce w teorii informacji **entropia** i w naszym formalizmie geometrycznym kanonicznie z nią sprzężona **temperatura** strategii inwestycyjnej.

Przedstawione tu instrumentarium jest jedynie osnową przeprowadzonej analizy, której istotą są raczej głębokie relacje pomiędzy wyżej wyliczonymi narzędziami badań. Dlatego na zakończenie tego paragrafu przyjrzymy się bliżej związkowi, jaki zachodzi pomiędzy ideą procentu a dwustosunkiem. Gdy dzisiaj rynek płaci za każde  $q_{\$}$  dolarów kwotę  $q_{\text{€}}$  euro to powiemy, że kurs dolara wynosi  $c_{\text{\$} \rightarrow \text{€}} := \frac{q_{\$}}{q_{\text{€}}}$  euro. Po kilku dniach odpowiedni kurs wyniesie  $c'_{\text{\$} \rightarrow \text{€}} := \frac{q'_{\$}}{q'_{\text{€}}}$ . Z uwagi na następujące, łatwo dostrzegalne własności tej definicji kursu

$$(0.2) \quad \begin{aligned} c_{\text{€} \rightarrow \text{\$}} c_{\text{\$} \rightarrow \text{€}} &= 1, \\ c_{\text{\$} \rightarrow \text{¥}} c_{\text{¥} \rightarrow \text{€}} &= c_{\text{\$} \rightarrow \text{€}}, \end{aligned}$$

gdzie ¥ jest np. japońskim jenem, matematyk bez wahania stwierdzi, że kurs waluty ma strukturę jednoparametrowej grupy  $(\mathbb{R}_+, \cdot)$ . Interesujący nas opis sytuacji kursowej odnajdziemy na rysunku 0.1, gdzie euklidesowe długości odcinków



Rysunek 0.1. Układ prostych pozwalający zmierzyć cenę waluty i zmianę tej ceny.

$Q_{\text{€}}$  i  $Q_{\$}$  są proporcjonalne odpowiednio do  $q_{\$}$  i  $q_{\text{€}}$ . Korzystając z twierdzenia Talesa – najstarszego ze znanych historii starożytnych matematyków, prawdopodobnie pierwszego filozofa i może pierwszego ekonomisty<sup>77</sup>, dojdziemy do

<sup>77</sup>Talesowi przypisywane jest porzekadło „Kto ręczy, ten jęczy” [Wie00]

wniosku, że zamiast na prostej  $\$€$  sytuację kursową możemy obserwować na osiach  $O\$$ , bądź  $O€$ .

Dla uczestnika rynku ma jednak znaczenie nie sama wysokość kursu, lecz wielkość jego względnej zmiany  $\frac{c'_{\$/€}}{c_{\$/€}}$ , gdyż dopiero ta liczba określi jego ewentualne zyski, bądź straty względem posiadacza innej niż on waluty. Dzięki podstawowej własności funkcji logarytmicznej, która mnożenie dodatnich liczb rzeczywistych pozwala zamienić na dodawanie ich logarytmów<sup>78</sup>, właściciel kapitału, prowadząc obserwacje sumarycznej wartości składników o postaci  $\ln \frac{c'_{\$/€}}{c_{\$/€}}$ , odpowiadających kolejnym notowaniom kursowym, precyzyjnie, jak przed kilkudziesięciu laty inżynier wyposażony nieodłącznie w suwak logarytmiczny, określi względną zmianę wartości swojego pieniądza.

Zidentyfikujmy na rysunku 0.1, czym jest ów logarytm. Ponieważ cztery trójkąty  $\triangle_{Q\$O}$ ,  $\triangle_{Q€O}$ ,  $\triangle_{Q' \$O}$  i  $\triangle_{Q' €O}$  posiadają jednakową wysokość względem ich podstaw leżących na prostej  $\$€$ , więc możemy stwierdzić, że wartość względnej zmiany cen wynosi

$$\{\$, Q, Q', €\} := \frac{c'_{\$/€}}{c_{\$/€}} = \frac{q'_\$/q_\$}{q'_€/q_€} = \frac{|Q'€| |Q\$|}{|Q'\$| |Q€|} = \frac{P(\triangle_{Q'€O}) P(\triangle_{Q\$O})}{P(\triangle_{Q'\$O}) P(\triangle_{Q€O})},$$

gdzie symbole  $P(\triangle \dots)$  oznaczają pola powierzchni odpowiednich trójkątów. Ponieważ pole trójkąta równe jest połowie iloczynu długości dowolnych jego dwóch boków i sinusa kąta zawartego pomiędzy nimi<sup>79</sup>, więc możemy napisać, że

$$\{\$, Q, Q', €\} = \frac{|Q'O| |€O| \sin(\angle Q'O€) |QO| |\$O| \sin(\angle QO\$)}{|Q'O| |\$O| \sin(\angle Q'O\$) |QO| |€O| \sin(\angle QO€)}.$$

W ten sposób względna zmiana cen okazuje się jedynie funkcją kątów leżących w punkcie  $O$  przecięcia pęku prostych

$$\{\$, Q, Q', €\} = \frac{\sin(\angle Q'O€) \sin(\angle QO\$)}{\sin(\angle Q'O\$) \sin(\angle QO€)},$$

dlatego też rzutowanie symbolizujących różne ceny punktów na oś  $O\$$ , czy  $O€$ , nie musiało być równoległe!<sup>80</sup> Dzięki zastosowaniu przekształcenia logarytmicznego odcinek  $\$€$ , przedstawiający wszystkie możliwe wartości kursu, uzyskał cechy euklidesowe<sup>81</sup>. To wielkość względnej zmiany ceny  $\{\$, Q, Q', €\}$  geometrycy nazywają dwustosunkiem. Niezmiennicze własności dwustosunku znał już Pappus z Aleksandrii.

Wyżej naszkicowana idea posługiwania się proporcjami jest motywem przewodnim wielu rachunkowych konstrukcji, z którymi czytelnik zetknie się we

<sup>78</sup>grupy  $(\mathbb{R}_+, \cdot)$  i  $(\mathbb{R}, +)$  są izomorficzne

<sup>79</sup>jeżeli jeden z boków uznać za podstawę trójkąta, to sinusem odpowiedniego kąta będzie iloraz wysokości trójkąta i długości drugiego z boków

<sup>80</sup>to ważne spostrzeżenie uzasadnia wyróżnioną rolę geometrii rzutowej w formalizmie matematyki finansowej

<sup>81</sup>gdyż po tym przekształceniu wartości zmian kursu można mierzyć linijką

wszystkich trzech częściach rozprawy o dwoistościach kapitału. Śledząc w kolejnych rozdziałach szczegóły zamieszczonych tam wywodów matematycznych, pozwalających na podstawie prostych, odzwierciedlających zmiany cen i przepływy kapitału, założeń wysnuć często zaskakujące wnioski, spróbujmy odnaleźć oparte na proporcjach fundamentalne symetrie cechujące procesy rynkowej wyceny wartości kapitału. Niech kartezjańskie „jak?”, a nie „co?”, pomaga nam zrozumieć istotę zjawisk ekonomicznych, towarzyszących znanej nam wszystkim z autopsji wymianie dóbr.



## Rzutowa struktura geometrii rynku

### § 1. Portfele i ceny

Rutynową czynnością ekonomistów jest badanie proporcji. W przypadku odnotowywanych zestawów cen, czy wielkości składników majątku, proporcje stanowią podstawową wartość informacyjną. Absolutne miary tracą na swoim znaczeniu, gdy udział we własności staje się dostępny w ułamkowych częściach całości majątku, a powszechna skłonność posiadaczy kapitału do dywersyfikacji ryzyka czyni taką formę własności dominującą. Tekst tego rozdziału stara się zwrócić uwagę czytelnika na właściwe miary zjawisk rynkowych, gdy przedmiotem analiz są odpowiednie proporcje występujące pomiędzy różnymi cenami, czy składnikami majątku.

Rynek to miejsce, gdzie dokonuje się nieskrępowana wymiana pieniędzy, towarów, czy usług. W trakcie konstruowania elementów teorii modelujących interesujący nas aspekt rzeczywistości staramy się uchwycić charakterystyczne cechy opisywanych obiektów czy procesów, posuwając się zwykle do ich idealizacji. Przyjmijmy więc, że owe przedmioty zainteresowania kupców rozpinają  $(N + 1)$ -wymiarową przestrzeń wektorową  $G$  nad ciałem liczb rzeczywistych. Elementy przestrzeni  $G$  nazywamy *koszykami*. Niech nam się kojarzą z koszykami, stanowiącymi rezultat całodniowych zakupów, pełnymi przeróżnych rzeczy, w tym także innych pomniejszych koszyków (dodawanie), z których każda może być w mniejszej bądź większej ilości (mnożenie przez liczbę dodatnią). Koszyk taki, prócz aktywów, może równie dobrze zawierać zobowiązania (mnożenie przez  $-1$ ). Rozważanie zobowiązań, czy ułamków niepodzielnych artykułów<sup>1</sup> jest w pełni zasadne, gdyż nasze koszyki to raczej prawa własności (i podjęte zobowiązania), a te formalnie mogą, poprzez stosownie zawierane umowy pośrednie, obejmować dowolne części jednostkowych przedmiotów. Własności przemienności, łączności, itd. wspomnianych tu operacji algebraicznych, które wyczerpują charakterystykę przestrzeni wektorowej, są oczywiste. Mimo zamieszczenia powyższych wyjaśnień autor jest przekonany, że do liniowej

<sup>1</sup>jak np. bilet, krzesło, składka emerytalna

struktury przestrzeni koszyków  $G$  nie trzeba nikogo przekonywać, gdyż bez wątplenia to struktura  $G$ , doświadczana w codziennej praktyce rynkowej, stanowiła pierwowzór dla wszystkich właściwości przestrzeni wektorowej. Wybierzmy w  $G$  bazę  $\{g_0, g_1, \dots, g_N\}$ . Element bazy  $g_\mu \in G$  nazwiemy  $\mu$ -tym *dobrem* rynkowym. Dobra pełnią wyróżnioną rolę względem pozostałych koszyków — dzięki nim można sprawnie księgować operacje rynkowe, prowadzić rachunkowość, czy analizować procesy gospodarcze.

Dla dowolnego koszyka  $p \in G$  mamy zatem jednoznaczny rozkład na tworzące go dobra

$$p = \sum_{\mu=0}^N p_\mu g_\mu.$$

Liczbę  $p_\mu \in \mathbb{R}$  nazywamy  $\mu$ -tą *współzrędną koszyka*. *Portfel* to klasa równoważności koszyków na zbiorze koszyków niepustych (tj. na zbiorze  $G \setminus \{0\}$ ). Dwa koszyki  $p'$  i  $p''$  są równoważne, jeżeli istnieje takie  $\lambda \in \mathbb{R}$ , że  $p' = \lambda p''$ , to znaczy

$$\sum_{\mu=0}^N p'_\mu g_\mu = \sum_{\mu=0}^N \lambda p''_\mu g_\mu,$$

czyli

$$(p'_0, \dots, p'_N) = (\lambda p''_0, \dots, \lambda p''_N).$$

Jeżeli dla ustalonego  $\mu$  zachodzi  $p_\mu \neq 0$ , to zawsze można tak dobrać  $\lambda$ , aby w skład koszyka reprezentującego portfel wchodziła jednostka dobra  $g_\mu$ . Współrzędne portfela  $p$  są wtedy równe

$$(p_0, \dots, p_{\mu-1}, 1, p_{\mu+1}, \dots, p_N).$$

Elementy powyższego ciągu będą w dalszym tekście nazywane *współzrędnymi niejednorodnymi* portfela  $p$  względem  $\mu$ -tego dobra.

Przypadek  $p_\mu = 0$  interpretujemy jako portfel nie podlegający wycenie w jednostkach  $g_\mu$ , czyli *portfel niewłaściwy* dla  $\mu$ -tego dobra. Z powyższych rozważań wynika, że współzrędną koszyka dla takiego portfela, względem każdego innego dobra, mają 0 na  $\mu$ -tym miejscu, czyli są następujące

$$(p_0, \dots, p_{\mu-1}, 0, p_{\mu+1}, \dots, p_N).$$

Podsumowując, dowolny spośród koszyków zawierających niezerową ilość któregokolwiek z dóbr  $g_\mu$  (tzn. koszyk spełniający warunek  $p_\mu \neq 0$ ) można przeskalować mnożąc jego składniki przez pewien współczynnik  $\lambda$ . W ten sposób otrzymamy współzrędną niejednorodną portfela do którego należy koszyk. Współzrędną takie opisują proporcje poszczególnych dóbr, wchodzących w skład dowolnego koszyka spośród koszyków należących do jednego portfela, względem dobra  $g_\mu$ .

*Kurs* rynkowy  $U$  względem  $\nu$ -tego dobra to dowolne odwzorowanie liniowe

$U(\mathbf{g}_\nu, \cdot) : G \rightarrow \mathbb{R}$ . Odwzorowanie  $U$  przyporządkowuje każdemu koszykowi  $p$  jego aktualną wartość, wyrażoną w jednostkach dobra  $\mathbf{g}_\nu$ :

$$(1.1) \quad (Up)_\nu = U(\mathbf{g}_\nu, p) = \sum_{\mu=0}^N U(\mathbf{g}_\nu, \mathbf{g}_\mu) p_\mu,$$

gdzie  $U(\mathbf{g}_\nu, \mathbf{g}_\mu)$  jest ceną jednostki  $\mu$ -tego dobra wyrażoną w jednostkach  $\nu$ -tego dobra. Wartością funkcji  $U$  jest zatem  $\nu$ -ta współrzędna koszyka, składającego się jedynie z tak określonej ilości dobra  $\mathbf{g}_\nu$ .

Od cen rynkowych wymagamy<sup>2</sup> aby

$$U(\mathbf{g}_\mu, U(\mathbf{g}_\nu, p)\mathbf{g}_\nu)\mathbf{g}_\mu = U(\mathbf{g}_\mu, p)\mathbf{g}_\mu$$

dla dowolnych  $p$  oraz  $\mathbf{g}_\mu$  i  $\mathbf{g}_\nu$  będących dobrami wzajemnie wymiennymi (czyli  $U(\mathbf{g}_\mu, \mathbf{g}_\nu) \neq 0$  i  $U(\mathbf{g}_\mu, \mathbf{g}_\nu) \neq \pm\infty$ ), więc podstawiając  $p = \mathbf{g}_\rho$  otrzymamy

$$(1.2) \quad U(\mathbf{g}_\mu, \mathbf{g}_\nu)U(\mathbf{g}_\nu, \mathbf{g}_\rho) = U(\mathbf{g}_\mu, \mathbf{g}_\rho)$$

dla dowolnych  $\mu, \nu, \rho$ . Tak więc względne wartości kursowe dóbr posiadają własność przechodniości. Podstawiając w (1.2)  $\mu = \nu = \rho$  otrzymamy dwie możliwości

$$U(\mathbf{g}_\mu, \mathbf{g}_\mu) = 1 \quad \text{albo} \quad U(\mathbf{g}_\mu, \mathbf{g}_\mu) = 0.$$

Przypadek  $U(\mathbf{g}_\mu, \mathbf{g}_\mu) = 1$  implikuje własność odwzorowania rzutowego dla  $U$ , czyli

$$U((Up)_\mu \mathbf{g}_\mu)_\mu = (Up)_\mu.$$

Natomiast przypadek  $U(\mathbf{g}_\mu, \mathbf{g}_\mu) = 0$  oznacza, że  $\mu$ -te dobro nie funkcjonuje na rynku (można nim jedynie kogoś obdarować).

Wstawiając w (1.2)  $\mu = \rho$  dostajemy dla  $U(\mathbf{g}_\mu, \mathbf{g}_\mu) = 1$

$$U(\mathbf{g}_\mu, \mathbf{g}_\nu) = (U(\mathbf{g}_\nu, \mathbf{g}_\mu))^{-1}.$$

Przeprowadzone rozważania pozwalają nam na wprowadzenie macierzy kursu rynkowego. Jest to macierz o rozmiarach  $(N+1) \times (N+1)$ , której  $(\mu, \nu)$ -ty element dany jest wzorem  $U_{\mu\nu} := U(\mathbf{g}_\mu, \mathbf{g}_\nu)$ . Najprostsza metoda wyznaczenia tej macierzy prowadzi poprzez wskazanie pieniądza. *Pieniądzem* będziemy nazywać arbitralnie wyróżnione dobro, istniejące na rynku. Przyjmijmy, bez utraty ogólności, że dobrem tym jest  $\mathbf{g}_0$ . W tym momencie ograniczamy się do rozważania tych spośród portfeli, które dopuszczają współrzędne jednorodnie względem pieniądza. Portfele takie będziemy nazywać *portfelami właściwymi* (lub, bardziej precyzyjnie, portfelami właściwymi względem  $\mathbf{g}_0$ ). Macierz  $U_{\mu\nu}$  jest w pełni określona przez znajomość  $N$  liczb  $u_k := U(\mathbf{g}_0, \mathbf{g}_k)$  dla  $k=1, \dots, N$ . Zauważmy, że  $U_{00} = 1$ . Jeśli przyjmijmy, że  $u_0 := 1$ , to własność przechodniości (1.2) pozwala nam wyznaczyć wszystkie elementy macierzy ( $U_{\mu\nu}$ )

$$(1.3) \quad U_{\mu\nu} = u_\mu^{-1} u_\nu.$$

<sup>2</sup>patrz postulat ♥'



Cecha ta tłumaczy potrzebę występowania pieniądza na rynku, który w sposób naturalny gwarantuje własność przechodniości dla cen względnych, czyli proporcji pomiędzy wymienianymi na rynku towarami. W czasach stabilnej gospodarki, gdy rozmiary inflacji pieniądza są przewidywalne, obywatele przyzwyczajają się do obserwacji kursów rynkowych przy pomocy cenowej mapy współrzędnych niejednorodnych, w której wyróżnionym dobrem jest przyjęta jednostka pieniężna. Zepsuty pieniądz oznacza nieprognozowalne skoki cen, w wyniku których informacje wynoszone z takiej mapy, z konieczności rejestrowanej fragmentami w różnych momentach czasowych, nie oddają rzeczywistych względnych proporcji wymiany, zachodzącej w transakcjach dotyczących różnych dóbr. Ale i wtedy mamy naturalną skłonność do wyrażania proporcji wymiany w mapach współrzędnych niejednorodnych, wyróżniając pewne dobro, nadające się na substytut pieniądza, w roli względnie stabilnego miernika wartości, który zazwyczaj staje się faktycznym środkiem płatniczym<sup>3</sup>. Łatwo uzasadnić takie zachowania. Spełniana przez pieniądz i rozumiana jak wyżej funkcja miernika wartości [Sch96] pozwala jakościowo obniżyć ilość informacji o proporcjach znamionujących handel. Symetryczna macierz cen  $(U_{\mu\nu})$  wymiany towar-towar z  $\frac{N(N+1)}{2}$  niewiadomymi składnikami zostaje zastąpiona  $N$  parametrami  $u_k$  wymiany towar-pieniądz. Ludzki mózg nie musi kontrolować np. pięciu tysięcy rynkowych parametrów, gdyż wynalazek pieniądza sprowadza te zagadnienie do operowania informacją ograniczoną do ciągu zaledwie stu liczb<sup>4</sup>.

Rozumowanie powyższe jest poprawne, gdy wszystkie  $u_k$  są różne od zera, tzn. gdy wszystkie dobra są wymienne na pieniądz. W przypadku dobra  $g_k$  niewymienialnego na  $g_0$ , gdy przestaje obowiązywać prawo przechodniości, zachodzi  $U_{0k} = U_{k0} = 0$ .

Wzór (1.1) zależy od liczb  $u_\mu$  w następujący sposób

$$(1.4) \quad (Up)_\nu = \sum_{\mu=0}^N u_\mu p_\mu u_\nu^{-1}.$$

Dla  $u_k=0$  wzór (1.3) pozostanie nadal poprawny, jeżeli przyjąć że  $u_k^{-1} := 0$ .

Reasumując, dla  $U_{00} \neq 0$  możemy stwierdzić, że kurs rynkowy jest jednoznacznie określony poprzez zadanie ciągu współrzędnych (tzw. *współrzędne*

<sup>3</sup>ciekawym, bo stanowiący prototyp współczesnego zdematerializowanego pieniądza, kasus to *fei* z wyspy *Yap*. *Fei* niekoniecznie musiał fizycznie uczestniczyć w transakcji, zob. [Fri94].

<sup>4</sup>pojawienie się pieniądza to prawdopodobnie pierwszy przypadek jakościowej redukcji złożoności obliczeniowej algorytmu, którym jest wyznaczanie zgodnej z rynkiem proporcji wymiany dwóch dóbr w oparciu o znajomość proporcji obowiązujących w odpowiednich wymianach pośrednich. Obecnie zagadnienia redukcji złożoności obliczeniowej badane są niezwykle intensywnie i wydają się znów stanowić centralną grupę wyzwań, określających tak bariery jak i perspektywy dalszego postępu cywilizacyjnego [Pen00, Mil00, CK02]. Wiele uwag związanych z tym tematem czytelnik odnajdzie w poświęconej obliczeniom (taktynom) kwantowym części trzeciej tej rozprawy (zob. także [PS04]).

niejednorodne kursu  $U$  względem pieniądza  $g_0$ )

$$U = (1, u_1, \dots, u_N).$$

Zdarza się, że zachodzi potrzeba wyrażenia cen  $u_k$  w jednostkach proporcjonalnych do  $g_0$ , np. gdy  $g_0$  jest akcją i następuje jej split, po denominacji pieniądza, przy przeliczaniu wartości długu pieniężnego na jego ekwiwalent w postaci konkretnego dobra  $g_k$  itp. Przeskalowanie ma znaczenie dla  $U$  jedynie formalne, jednak z tej przyczyny warto  $U$  utożsamiać z dowolnym ciągiem współrzędnych


$$U = (\lambda, \lambda u_1, \dots, \lambda u_N),$$

gdzie  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  jest dowolną stałą. Takie współrzędne nazywamy *współrzędnymi jednorodnymi* kursu. Można dostrzec pełną analogię między współrzędnymi jednorodnymi kursu, a współrzędnymi koszyka należącego do portfela.

Przypadek  $U_{00} = 0$  interpretujemy jako rynek, na którym nie funkcjonuje pieniądz  $g_0$ . Odpowiednie współrzędne kursu będą wtedy równe


$$U = (0, \dots),$$

gdzie ostatnich  $N$  liczb zostaje określonych w sposób analogiczny jak powyżej, lecz już z innym dobrem  $g_k$  w roli pieniądza.

 Kurs, którego  $\mu$ -ta współrzędna jest 0, nazywamy *kursem niewłaściwym* dla dobra  $g_\mu$ . Uwzględnienie sytuacji niewłaściwych dla danego dobra poddyktowane jest potrzebą objęcia dwóch grup procesów obserwowanych z pozycji kursu. Do pierwszej grupy należą np. bankructwa spowodowane sytuacją, gdy niechciane dobro przestaje istnieć jako walor rynkowy (nie będąc już nawet zobowiązaniem), nieodwracalnie tracąc wartość. Ceny pozostałych dóbr, wyrażone w proporcji do wartości zniszczeń, „uciekają” do  $\pm\infty$  (odpowiada to  $u^{-1} = 0$ ), a rynek ze swym kursem „przenosi się” do podprzestrzeni niewłaściwej dla zniszczeń. Określenie „zniszczenia” zostało tu użyte dla nazwania dóbr, które przestały być przedmiotami obrotu rynkowego, bowiem najczęściej sytuacja taka dotyczy zdekapitalizowanych narzędzi, lub przeterminowanych produktów.

Jednak nade wszystko istotna jest druga grupa procesów obejmująca przedsięwzięcia gospodarcze, w wyniku których dobro sumarycznie nic niewarte (gdy zobowiązania równe są aktywom) prowadzi do powstania wartości dodanej, czyli w efekcie do portfela o wartości różnej od zera.

Wariant wszystkich  $U_{\mu\mu} = 0$  wykluczamy, bowiem byłby to kurs rynku trywialnego, traktującego wszystkie dobra jako niewymienne.

 **Zbilansowanie** portfela  $p$  na kursie  $U$  to sytuacja, w której istnieje dobro  $g_\mu$ , w którego jednostkach wartość portfela  $p$ , według kursu  $U$ , jest równa 0.

$$(Up)_\mu = \sum_{\nu=0}^N U(g_\mu, g_\nu) p_\nu = \sum_{\nu=0}^N u_\nu p_\nu u_\mu^{-1} = 0.$$

Gdy dobrem tym jest pieniądz, powyższe równanie przyjmuje postać:

$$(1.5) \quad \sum_{\mu=0}^N u_{\mu} p_{\mu} = 0.$$

Równanie to wyraża własność zbilansowanego przy kursie  $U$  portfela  $p$ , który składa się z takich dóbr  $p_k$ , że koszyk złożony z kolejnych dóbr w następujących ilościach  $-p_1, \dots, -p_N$  wart jest, według cen  $U$ , jedną jednostkę pieniężną  $g_0$  (bowiem  $p_0 = u_0 = 1$ ). Przy ustalonym kursie, sparametryzowane współrzędnymi niejednorodnymi, zbilansowane portfele są porównywalne, tzn. zawarty w każdym portfelu właściwym zestaw odpowiednich dóbr wart jest w powyższym sensie jednostkę pieniężną, zaś analogiczny zestaw dóbr  $g_1, \dots, g_N$  wchodzących w skład każdego portfela niewłaściwego nic nie jest wart dlatego, że dla portfeli niewłaściwych mamy  $p_0 = 0$ .

Zmiana pieniądza, w którym wyliczamy wartość portfela  $p$ , polega na pomnożeniu równania bilansu przez stałą

$$\sum_{\mu=0}^N u_{\mu} p_{\mu} g_0 \longrightarrow \sum_{\mu=0}^N u_{\mu} p_{\mu} u_{\nu}^{-1} g_{\nu},$$

dlatego własność zbilansowania portfela  $(Up)_{\mu} = 0$  nie zależy od wyboru dobra  $g_{\mu}$ , względem którego kurs wyliczamy, a tym samym od wyboru pieniądza. Zbilansowanie  $p$  na  $U$  możemy oznaczać pomijając indeks wskazujący dobro  $g_{\mu}$ , czyli  $Up = 0$ .

Dla dowolnych dóbr, jako jednostek, w których są wyrażane wielkości kursów i portfeli, własność ta jest konsekwencją wykazanej poniżej ogólniejszej własności (1.11). Oznacza ona, że bilans jest niezmiennikiem rzutowym.

Z tych samych powodów, dla ustalonego portfela  $p$ , różne kursy rynkowe, na których się bilansuje, są równie atrakcyjne.

## § 2. Rynek a geometria rzutowa

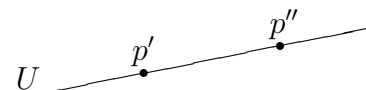
Geometra z łatwością zauważy, że przestrzeń wszystkich możliwych portfeli tworzy dobrze znaną rzeczywistą przestrzeń rzutową  $\mathbb{RP}^N$ . Przystępny opis geometrii rzutowej można znaleźć w książkach [CR98, Hal06], a wiele technicznych szczegółów np. w podręcznikach [VY46, Bor76, Ber77, BK53]. Portfele  $p$  są w tej geometrii punktami, a kursy  $U$  są obiektami dwoistymi do nich, czyli  $(N-1)$ -wymiarowymi hiperpłaszczyznami (w najbardziej rozpowszechnionym przez rysowników przypadku  $N=2$  są to proste — żeglarzom kurs powinien kojarzyć się z kierunkiem, czyli prostą). Zbilansowanie portfela  $p$  na kursie  $U$  jest

niczym innym, jak własnością należenia punktu do hiperpłaszczyzny (w  $\mathbb{RP}^2$  leżenia na prostej). Ten fundamentalny związek pomiędzy portfelem a kursem nie powinien być obcy ekonomistom, przywykłym do koncepcji podwójnego księgowania (bilans prowadzi do wyniku 0) i doceniającym od pięciuset lat jej zasadność. Jeden ze współtwórców podwójnej księgowości, Fra Luca Paciolo, był jednocześnie dla Leonarda da Vinci mistrzem, zaznajamiającym go z tajnikami perspektywy zbieżnej<sup>5</sup> (czyli dzisiejszej geometrii rzutowej). To nie artyści Renesansu wymyślili odmienny sposób oglądania przedmiotów, nauczyli ich tego renesansowi księgowi. Powyższe domniemanie, dla wielu kontrowersyjne, tłumaczy niemożność wcześniejszego odkrycia perspektywy, której przyczyną był brak jakichkolwiek metod algebraicznych, potrzebnych do wyliczania proporcji<sup>6</sup>. Dlatego całkiem prawdopodobną jest hipoteza, że już Luca Paciolo mógł postrzegać rynek w sposób bardzo podobny do prezentowanego w bieżącym rozdziale. W czasie ostatnich stuleci rysownik przeobraził się w inżyniera, projektującego precyzyjne rysunki techniczne, zawierające zdumiewająco wiele ilościowych informacji. Może już wkrótce, w dziedzinie inżynierii finansowej, będzie można dostrzec podobnie rozwijające się umiejętności.

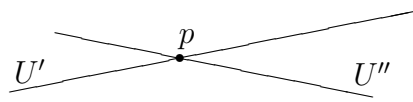
Podsumujmy rynkowe określenia podstawowych pojęć geometrii rzutowej  $\mathbb{RP}^N$ , zestawiając je w tabeli 1.1.

	rynek	geometria rzutowa
$p$	<i>portfel</i>	<i>punkt</i>
$U$	<i>kurs</i>	<i>hiperpłaszczyzna</i>
$Up = 0$	<i>kurs bilansuje portfolio</i>	<i>hiperpłaszczyzna zawiera punkt</i>

Tabela 1.1. Rynkowe odpowiedniki podstawowych pojęć geometrii rzutowej.

Konfiguracja  obrazuje dwa różne portfele  $p'$  i

$p''$ , bilansujące się na tym samym kursie  $U$ , zaś zamieszczona poniżej konfiguracja przedstawia jeden portfolio  $p$  bilansujący się na dwóch różnych kursach  $U'$  i  $U''$ . Rysunki te są do siebie dwoiste. Interesującym byłoby odszukiwanie dwoistych odpowiedników dla bardziej skomplikowanych konfiguracji. Regułami rachunkowymi i interpretacjami sytuacji rynkowych, związanych z takimi parami, rządzą w istocie te same prawa. Aby je dostrzec, należy zagadnienia finansowe przeformułować na język geometrii rzutowej.



<sup>5</sup>zob. [Ber97]

<sup>6</sup>por. [Par88]

Wyróżnioną rolę pieniądza (czyli dobra którym określamy wartość pozostałych dóbr) może pełnić nie tylko któreś z pozostałych dóbr  $g_k$ , lecz także dowolny niezbilansowany koszyk. Zmiana jednostki pieniężnej jest w  $\mathbb{R}P^N$  transformacją rzutową. Opis prawidłowości rynkowych nie powinien zależeć od wyboru jednostek pomiarowych. Te spostrzeżenie wymusza przestrzeganie następującej zasady.

*Zasada symetrii rynku. Wnioski z każdego logicznie spójnego modelu dotyczącego rynku są niezmiennikami względem przekształceń rzutowych.*



Twierdzenia Desargues'a, Pappusa, czy Pascala okazują się prawami opisującymi losy naszych pieniędzy, czy zatem powinniśmy je traktować jako intelektualne igraszki, dalekie od problemów gospodarczej rzeczywistości?

### § 3. Homografie przestrzeni współrzędnych portfela

Na początku pierwszego paragrafu wybraliśmy w przestrzeni  $G$  pewną bazę. Zbadajmy jakie konsekwencje pociąga za sobą jej zmiana. Ustalmy dwie bazy, pierwszą z nich oznaczmy  $g^{(1)} = \{g_0^{(1)}, \dots, g_N^{(1)}\}$ , drugą  $g^{(2)} = \{g_0^{(2)}, \dots, g_N^{(2)}\}$ . Współczynniki  $A_{\mu\nu}$ , które są współrzędnymi dobra

$$g_\mu^{(2)} = \sum_{\nu} A_{\mu\nu} g_\nu^{(1)}$$

w bazie  $g^{(1)}$ , tworzą macierz przejścia  $A$  z bazy  $g^{(1)}$  do bazy  $g^{(2)}$ . Ze względu na zasadność przejścia odwrotnego, od bazy  $g^{(2)}$  do bazy  $g^{(1)}$ , macierz  $A$  posiada własność odwracalności, czyli  $\det A \neq 0$ .

Wymagamy, by zmiana bazy nie miała wpływu na materialną zawartość koszyka, czyli

$$p = \sum_{\mu} p_\mu^{(1)} g_\mu^{(1)} = \sum_{\mu} p_\mu^{(2)} g_\mu^{(2)}$$

dla wszystkich koszyków  $p$ . Warunek ten pociąga za sobą następujący wzór na transformację współrzędnych dowolnego koszyka, polegającą na zamianie bazy.

$$(1.6) \quad p_\mu^{(2)} = \sum_{\nu} p_\nu^{(1)} A_{\nu\mu}^{-1},$$

gdzie  $A^{-1}$  oznacza macierz odwrotną do macierzy  $A$ . Własność (1.2) przechodniości kursu powoduje, że  $U(\mathbf{g}_\mu^{(1)}, p) U(p, \mathbf{g}_\mu^{(1)}) = 1$  dla dowolnego niezbilansowanego portfela  $p$ , zatem dla  $p = \mathbf{g}_\nu^{(2)}$  otrzymamy

$$U(\mathbf{g}_\nu^{(2)}, \mathbf{g}_\mu^{(1)}) = \left( \sum_{\rho} A_{\nu\rho} U(\mathbf{g}_\mu^{(1)}, \mathbf{g}_\rho^{(1)}) \right)^{-1}.$$

Z ostatniej równości wynika, że

$$U(\mathbf{g}_\mu^{(2)}, \mathbf{g}_\nu^{(2)}) = \sum_{\rho} A_{\nu\rho} U(\mathbf{g}_\mu^{(2)}, \mathbf{g}_\rho^{(1)}) = \sum_{\rho} \frac{A_{\nu\rho}}{\sum_k A_{\mu\sigma} (u_\rho^{(1)})^{-1} u_\sigma^{(1)}} = \frac{\sum_{\rho} A_{\nu\rho} u_\rho^{(1)}}{\sum_{\sigma} A_{\mu\sigma} u_\sigma^{(1)}}.$$

Powyższa zależność określa związek cen dóbr bazowych w bazie  $\mathbf{g}^{(2)}$  z cenami dóbr bazowych w bazie  $\mathbf{g}^{(1)}$

$$u_\mu^{(2)} = U(\mathbf{g}_0^{(2)}, \mathbf{g}_\mu^{(2)}) = \frac{\sum_{\nu} A_{\mu\nu} u_\nu^{(1)}}{\sum_{\rho} A_{0\rho} u_\rho^{(1)}},$$

co we współrzędnych jednorodnych równoważne jest następującej zależności

$$(1.7) \quad u_\mu^{(2)} = \sum_{\nu} A_{\mu\nu} u_\nu^{(1)}.$$

Pomiędzy różnymi bazami odniesienia kursy rynkowe transformują się tak, jak dobra bazowe, a portfele odwrotnie do nich.

#### § 4. Współrzędne kursu

Potraktujmy ciąg  $(u_0, \dots, u_N)$  jako współrzędne Plückera<sup>7</sup> hiperpłaszczyzny określonej równaniem (1.5). Portfele  $p$ , spełniające równanie (1.5), można sparametryzować ciągiem liczb  $f_\mu$

$$(1.8) \quad p(f) = \sum_{\mu}^{\flat} f_\mu u_\mu^{-1} \mathbf{g}_\mu + \sum_{\nu}^{\natural} f_\nu \mathbf{g}_\nu,$$

gdzie sumowanie z symbolem „ $\flat$ ” przebiega po indeksach  $\mu$ , dla których  $u_\mu \neq 0$ , a sumowanie z symbolem „ $\natural$ ” po pozostałych  $\nu$ , dla których  $u_\nu = 0$ .

W geometrii hiperpłaszczyzna  $p(f)$  nazywana jest *złączem*<sup>8</sup> punktów  $u_\mu^{-1} \mathbf{g}_\mu$

<sup>7</sup>zob. [Bor76]

<sup>8</sup>zob. [Bor76]

dla  $u_\mu \neq 0$  i punktów  $g_\nu$  dla  $u_\nu = 0$ .

Portfel leżący w parametryzowanej hiperpłaszczyźnie bilansuje się, więc

$$Up(f) = (Up(f))_0 = \sum_{\mu}^b f_{\mu} u_{\mu}^{-1} u_{\mu} = \sum_{\mu}^b f_{\mu} = 0,$$

czyli punkty hiperpłaszczyzny kursu można opisać liczbami  $f_{\mu}$  przy pomocy parametryzacji (1.8), przy czym współrzędne  $f_{\mu}$  spełniają warunek

$$(1.9) \quad \sum_{\mu}^b f_{\mu} = 0,$$

gdzie wszystkie  $f_{\mu}$  nie mogą jednocześnie być równe 0 ( $p(f)$  nie byłby wtedy portfelem).

Dowolny zbilansowany portfel, należący do złącza  $p(f)$ , przedstawiony jak wyżej, przy pomocy współrzędnych jednorodnych  $f_{\mu}$ , bądź niejednorodnych  $f_k$ , nazwiemy *portfelem współmienniczym* z kursem  $U$ . Znaczenie portfeli współmienniczych polega na tym, że jedynie na nich potrafimy w sposób poprawny mierzyć zyski, w sposób opisany niżej.

We współrzędnych niejednorodnych, w których  $f_0 = -1$ , pozostałe współrzędne  $f_k$ , dla  $k \neq 0$  spełniają warunek  $\sum_k^b f_k = 1$ , dlatego portfel współmienniczy jest *rozkładem jedynki*. Gdy ograniczymy się do części hiperpłaszczyzny, gdzie dla wszystkich  $f_k$ , dla których  $u_k \neq 0$ , zachodzi  $f_k \geq 0$ , to  $p(f)$  jest *złączem wypukłym*. W przypadku portfeli i kursów niewłaściwych dla dobra  $g_0$ , portfele współmiennicze można tworzyć zgodnie z powyższą definicją, odrzucając dobro  $g_0$  i wybierając jako pieniądz inne stosowne dobro ze zbioru dóbr bazowych  $g$ .

W dalszym tekście bieżącego paragrafu założymy, że kurs jest właściwy dla wszystkich dóbr (czyli każde  $u_{\mu}$  jest różne od 0). Dla punktów niewłaściwych można przeprowadzić analogiczne rozważania w odpowiednich przestrzeniach rzutowych o mniejszym wymiarze.

Wielkość  $f_{\mu} u_{\mu}^{-1}$  będąc współrzędną portfela, transformuje się przy zmianie bazy zgodnie z regułą (1.6), czyli

$$f_{\mu}^{(2)} = u_{\mu}^{(2)} \sum_{\nu} f_{\nu}^{(1)} (u_{\nu}^{(1)})^{-1} A_{\nu\mu}^{-1},$$

więc

$$(1.10) \quad f_{\mu}^{(2)} = \sum_{\nu\rho} f_{\nu}^{(1)} (u_{\nu}^{(1)})^{-1} A_{\nu\mu}^{-1} A_{\mu\rho} u_{\rho}^{(1)}.$$



Zatem

$$(1.11) \quad \sum_{\mu} f_{\mu}^{(2)} = \sum_{\nu\rho} f_{\nu}^{(1)} (u_{\nu}^{(1)})^{-1} I_{\nu\rho} u_{\rho}^{(1)} = \sum_{\mu} f_{\mu}^{(1)},$$

gdzie  $I$  jest macierzą jednostkową.

W szczególności własność rozkładu jedyinki  $\sum f_{\mu} = 0$  nie zależy od wyboru bazy, czyli jest niezmiennikiem rzutowym.

Jeżeli rozważyć zmianę kursu jako transformację *alias*, czyli polegającą nie na przejściu do nowej hiperpłaszczyzny kursowej, lecz na zmianie układu współrzędnych opisujących kurs, to taką zmianę opisuje macierz diagonalna o elementach  $A_{\mu\mu} = u_{\mu}''(u_{\mu}')^{-1}$ , co wynika ze wzoru (1.7). W tej sytuacji wzór (1.10) redukuje się do postaci

$$f_{\mu}'' = (u_{\mu}')^{-1} A_{\mu\mu}^{-1} A_{\mu\mu} u_{\mu}' f_{\mu}' = f_{\mu}'.$$

Diagonalna transformacja współrzędnych, jaką jest zmiana kursu, zachowuje wartości współrzędnych  $f_{\mu}$ . Dopiero ta własność portfela współzmienniczego (a nie tylko zbilansowanie na dowolnym kursie) umożliwia wyznaczenie zysku (bądź straty) wynikającego ze zmiany kursu.

### § 5. Zysk z handlu pojedynczym dobrem



Nieznany obszar zagadnień wartym zbadania są problemy rynkowe dotyczące kursów i portfeli, rozważane w kontekście wszystkich dotyczących ich przekształceń rzutowych. Zanim wolna od jakichkolwiek jednostek geometria rynku, badana w duchu von Staudta, zyska stosowne zainteresowanie, warto skupić uwagę na przestrzeniach o mniejszej symetrii, budując w ramach geometrii rzutowej metryczne modele rynku. Jednak przed zgłębieniem tego tematu zatrzymajmy się na samej kategorii zysku.

Niezmiennikiem odwzorowań rzutowych jest dwustosunek czterech punktów leżących na prostej [VY46, BK53]. Z uwagi na niezmienniczość, wielkość ta powinna spełniać kluczową rolę w opisie rynku. Wszystkie popularne indeksy rynkowe (giełdowe) odnoszą swoje wartości do konkretnych dóbr (najczęściej waluty \$). W momentach krytycznych taki relatywizm może zakłócać identyfikację wielu charakterystycznych sytuacji rynkowych. W przestrzeni rzutowej  $\mathbb{RP}^N$  ów dwustosunek<sup>9</sup>

$$[\mathfrak{G}, U_{\rightarrow\mathfrak{G}}, U_{\mathfrak{G}\rightarrow}, \$]$$

<sup>9</sup>patrz strona 22



dotyczy pary punktów<sup>10</sup>

$$(1.12) \quad U_{\rightarrow\mathfrak{G}} := (v, v e^{p_{\rightarrow\mathfrak{G}}}, \dots) \text{ i } U_{\mathfrak{G}\rightarrow} := (w, w e^{p_{\mathfrak{G}\rightarrow}}, \dots)$$

oraz dwóch innych punktów  $\mathfrak{G}$  i  $\mathfrak{S}$ , które powstają w wyniku przecięcia prostej  $U_{\rightarrow\mathfrak{G}}U_{\mathfrak{G}\rightarrow}$  z jednoskładnikowymi portfelami-hiperpłaszczyznami  $\overline{\mathfrak{G}}$  i  $\overline{\mathfrak{S}}$ , złożonymi jedynie z dobra  $\mathfrak{G}$ , bądź  $\mathfrak{S}$ . Zastąpione znakiem wielokropka „...” wartości pozostałych współrzędnych kursów  $U_{\rightarrow\mathfrak{G}}$ ,  $U_{\mathfrak{G}\rightarrow}$  są dowolne i niekoniecznie jednakowe dla obydwu punktów. Prostą, przechodzącą przez punkty  $U_{\rightarrow\mathfrak{G}}$  i  $U_{\mathfrak{G}\rightarrow}$ , reprezentuje jednoparametrowa rodzina wektorów, których  $\mu$ -te współrzędne mają postać

$$u_\mu(\lambda) := \lambda (u_{\rightarrow\mathfrak{G}})_\mu + (1 - \lambda) (u_{\mathfrak{G}\rightarrow})_\mu.$$

Tak to punktom  $\mathfrak{S}$ ,  $\mathfrak{G}$  przecięcia tej prostej z hiperpłaszczyznami  $\overline{\mathfrak{S}}$  i  $\overline{\mathfrak{G}}$  odpowiadają wartości parametru  $\lambda$ , które spełniają poniższe warunki

$$\begin{aligned} u_0(\lambda_{\mathfrak{S}}) &= \lambda_{\mathfrak{S}} (u_{\rightarrow\mathfrak{G}})_0 + (1 - \lambda_{\mathfrak{S}}) (u_{\mathfrak{G}\rightarrow})_0 = 0 \\ \text{i } u_1(\lambda_{\mathfrak{G}}) &= \lambda_{\mathfrak{G}} (u_{\rightarrow\mathfrak{G}})_1 + (1 - \lambda_{\mathfrak{G}}) (u_{\mathfrak{G}\rightarrow})_1 = 0, \end{aligned}$$

czyli, wykorzystując współrzędne (1.12), otrzymamy

$$\begin{aligned} \lambda_{\mathfrak{S}} &= \frac{w}{w - v}, \\ \lambda_{\mathfrak{G}} &= \frac{w e^{p_{\mathfrak{G}\rightarrow}}}{w e^{p_{\mathfrak{G}\rightarrow}} - v e^{p_{\rightarrow\mathfrak{G}}}}. \end{aligned}$$

Licząc logarytm dwustosunku  $[\mathfrak{G}, U_{\rightarrow\mathfrak{G}}, U_{\mathfrak{G}\rightarrow}, \mathfrak{S}]$  na prostej  $U_{\rightarrow\mathfrak{G}}U_{\mathfrak{G}\rightarrow}$  w rezultacie dostajemy wyrażenie

$$\begin{aligned} (1.13) \quad \ln[\mathfrak{G}, U_{\rightarrow\mathfrak{G}}, U_{\mathfrak{G}\rightarrow}, \mathfrak{S}] &= \ln\left[\frac{w e^{p_{\mathfrak{G}\rightarrow}}}{w e^{p_{\mathfrak{G}\rightarrow}} - v e^{p_{\rightarrow\mathfrak{G}}}}, 1, 0, \frac{w}{w - v}\right] = \\ &= \ln \frac{v w e^{p_{\mathfrak{G}\rightarrow}}}{v e^{p_{\rightarrow\mathfrak{G}}} w} = p_{\mathfrak{G}\rightarrow} - p_{\rightarrow\mathfrak{G}}. \end{aligned}$$

Powyższa formuła zostanie wykorzystana w rozdziale poświęconym taktyce racjonalnego kupca (część trzecia *Dwoistości*) przy konstrukcji modelu, który opisuje podstawową strategię rynkową, gdy poglądy kupca na temat korzystnej ceny nabycia dobra (bądź jego sprzedaży) są w pełni zdeterminowane.

## § 6. Metryzacja przestrzeni rynkowej

W wielu przypadkach nie wystarczy nam znajomość zysku osiągniętego z portfela współzmienniczego z kursem rynkowym. Interesuje nas np. jakie sytuacje na rynku są równoważne pewnej przebudowie portfela, czyli parze dwóch

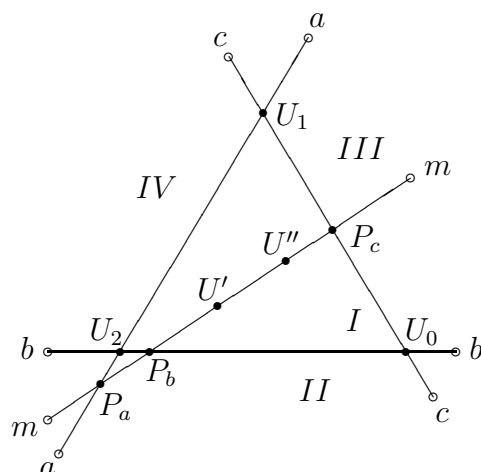
<sup>10</sup>sparametryzowanych, dla rachunkowej wygody, współrzędnymi jednorodnymi

punktów (tj. odcinkowi). Wprowadzenie odpowiedniości (kongruentności) odcinków oznacza zadanie struktury metrycznej na przestrzeni rzutowej. Sytuacją dwoistą do tu omawianej byłoby wskazanie kongruentnych zmian kursowych.

**6.1. Przykład** Wybranie na absolut pewnych dwóch hiperpłaszczyzn notowań kursowych stanowiłoby uzasadnienie dla np. następującego stwierdzenia „*Moja sytuacja wynikająca z podjętych decyzji przystaje do twojej (jest z tobą zgodna), gdyż zmiany jakie przeprowadziłem w moim portfelu w kontekście ostatnich wydarzeń na giełdzie są równie udane, jak twoje poczynania inwestycyjne*”.

Zbadajmy więc, co mierzy dwustosunek odnoszący się do zmiennych w swej naturze kursów rynkowych. Dwa różne kursy  $U'$  i  $U''$  wyznaczają prostą rzutową. Na prostej należy wskazać jeszcze dwa charakterystyczne punkty, by móc wyliczyć dwustosunek czwórki punktów. Wydaje się być naturalnym posłużenie się w tym celu hiperpłaszczyznami kursów niewłaściwych dla poszczególnych dóbr bazowych  $g_k$ . Rozcinają one zbiór kursów właściwych dla dóbr bazowych  $g$  w  $\mathbb{RP}^N$  na  $2^N$  sympleksów  $N$ -wymiarowych. W analogiczny sposób rozpadają się hiperpłaszczyzny kursów niewłaściwych, rekurencja ta dotyczy wszystkich wyodrębnionych hiperprzestrzeni niewłaściwych, o wymiarze mniejszym od  $N$ . Załóżmy, że dwa rozważane kursy wyznaczające prostą należą do tego samego sympleksu — tylko kursy o tej własności będą znajdować się w skończonej odległości. Dla wszystkich  $\mu$  współrzędne  $u'_\mu$  i  $u''_\mu$  kursów należących do jednego sympleksu są jednocześnie dodatnie, bądź jednocześnie ujemne. Każda hiperpłaszczyzna kursów niewłaściwych dla dobra  $g_\mu$  przecina naszą prostą. Punktów przecięć jest  $N+1$ , ale tylko dwa z nich, oznaczone  $P_b$  i  $P_c$ , leżą w bezpośrednim sąsiedztwie punktów  $U'$  i  $U''$  i tylko one należą do brzegu sympleksu zawierającego  $U'$  i  $U''$ . Z przedstawionych powodów punkty  $P_b$  i  $P_c$  najlepiej nadają się do wyznaczenia dwustosunku. Sytuację dla  $N=2$  ilustruje rysunek 1.1. Trzy, poza centralnie położonym, sympleksy (w  $\mathbb{RP}^2$  są to trójkąty) można posklejać, łącząc na rysunku odpowiednie punkty skrajne (w nieskończoności). Utożsamienie to zostało zaznaczone w punktach  $a$ ,  $b$ ,  $c$  i  $m$ , oznaczonych niewypełnionymi kółeczkami. Sympleksy kursów właściwych dla dóbr bazowych  $g$  oznaczono liczbami rzymskimi  $I$ ,  $II$ ,  $III$  i  $IV$ . Punkty  $U_0$ ,  $U_1$  i  $U_2$  mają współrzędne jednorodnie odpowiednio  $(\lambda, 0, 0)$ ,  $(0, \lambda, 0)$  i  $(0, 0, \lambda)$ . Litera  $a$ ,  $b$  i  $c$  mogą także symbolizować hiperpłaszczyzny kursów niewłaściwych dla dóbr odpowiednio:  $g_0$ ,  $g_1$  i  $g_2$ , a  $m$  może oznaczać prostą wyznaczoną przez kursy  $U'$  i  $U''$ .

Prosta ta przecina hiperpłaszczyzny  $a$ ,  $b$  i  $c$  w punktach  $P_a$ ,  $P_b$  i  $P_c$ , lecz punkt  $P_a$  nie znajduje się w bezpośrednim sąsiedztwie punktów  $U'$  i  $U''$ . Oznaczmy szukany dwustosunek przez  $[P_b, U', U'', P_c]$ , wtedy odległość kursów  $d(U', U'')$



Rysunek 1.1. Przestrzeń rzutowa  $\mathbb{R}P^2$  kursów rynku trzech dóbr.

będzie równa

$$(1.14) \quad d(U', U'') = \ln([P_b, U', U'', P_c]) = \ln \frac{|U'P_c||U''P_b|}{|U'P_b||U''P_c|},$$

gdzie  $|P_1P_2|$  oznacza euklidesową odległość punktów  $P_1$  i  $P_2$ , a  $\ln$  jest standardowym oznaczeniem dla logarytmu naturalnego. W ogólności, zamiast liczby Eulera  $e$  możemy przyjąć dla funkcji logarytmicznej dowolną podstawę. Zmodyfikowane do innej podstawy logarytmu odległości będą się różnić od wyjściowych jedynie stałą multiplikatywną, jednakową dla dowolnej pary kursów  $U'$  i  $U''$ .

Współrzędne punktów na prostej  $m$  mają postać  $\lambda(u''_\mu - u'_\mu) + u'_\mu$ , gdzie dla  $\lambda$  równego 0 i 1 otrzymamy odpowiednio punkty  $U'$  i  $U''$ . Punkt prostej  $m$  należy do podprzestrzeni kursów niewłaściwych, gdy przynajmniej jedna współrzędna kursu jest zerem:  $\prod_\mu (\lambda(u''_\mu - u'_\mu) + u'_\mu) = 0$ . Punkt  $P_b$  otrzymamy dla  $\lambda$  takiego, przy którym zeruje się  $k$ -ta współrzędna i jednocześnie liczba  $-\frac{1}{\lambda}$  jest największa z możliwych. Punkt  $P_c$ , analogicznie, dla  $\lambda$  takiego, przy którym zeruje się  $\nu$ -ta współrzędna i jednocześnie liczba  $\frac{1}{1-\lambda}$  jest najmniejsza. Oznacza to, że punkt  $P_b$  jest wyznaczony przez parametr

$$\frac{1}{\lambda_{P_b}} = 1 - \max_\mu \left( \frac{u''_\mu}{u'_\mu} \right),$$

a punkt  $P_c$  przez parametr

$$\frac{1}{\lambda_{P_c}} = 1 - \min_\mu \left( \frac{u''_\mu}{u'_\mu} \right).$$

Potrzebne do obliczenia dwustosunku odległości euklidesowe są równe:

$$\begin{aligned} |U'P_c| &= \lambda_{P_c}, & |U''P_c| &= \lambda_{P_c} - 1, \\ |U'P_b| &= -\lambda_{P_b}, & |U''P_b| &= 1 - \lambda_{P_b}. \end{aligned}$$

Oznaczając  $r_\mu(U', U'') := \ln \frac{u''_\mu}{u'_\mu}$  i spostrzegając że, ze względu na monotoniczność funkcji logarytmicznej, można przestawić ją z operacją max, bądź min, wzór (1.14) na odległość  $U'$  i  $U''$  można przekształcić do następującej postaci

$$\begin{aligned} (1.15) \quad d(U', U'') &= \ln \left( \max_\mu \left( \frac{u''_\mu}{u'_\mu} \right) \right) - \ln \left( \min_\mu \left( \frac{u''_\mu}{u'_\mu} \right) \right) = \\ &= \max_\mu (r_\mu(U', U'')) - \min_\mu (r_\mu(U', U'')) = \\ &= \max_\mu (r_\mu(U', U'')) + \max_\mu (r_\mu(U'', U')). \end{aligned}$$

Funkcja  $r_\mu(U', U'')$  jest znaną w finansach *przedziałową stopą*<sup>11</sup> procentową wzrostu wartości dobra  $g_\mu$  wyznaczonego względem dobra  $g_0$ . Jeżeli, dla przykładu, wartości  $u_\mu^k$  i  $u_\mu^m$  określają w złotych kurs pewnej obligacji  $\mu$  dla chwil  $t_k$  i  $t_m$ , to  $r_\mu(k, m) = \ln \frac{u_\mu^m}{u_\mu^k}$  jest przedziałową<sup>12</sup> stopą dyskonta dla tej obligacji.

Minimaksowa metryka (1.15) ma przejrzystą interpretację — jest to rozpiętość stóp zysków, wynikających ze zmiany kursu. Przesuwający się w  $\mathbb{R}P^N$ , wraz z upływem czasu punkt (czyli kurs rynkowy) wyznacza w tej przestrzeni krzywotrajektorię. Długość wycinka tej trajektorii jest stopą zysku ze zrównoważonego koszyka jasnowidza, posiadającego wszystkie aktywa kapitałowe ulokowane zawsze w tym dobrze, które najbardziej zwyżkuje na wartości, a pasywa przeciwnie — w dobrze najszybciej taniejącym. Zysk jasnowidza wyznaczony jest w odniesieniu do koszyka skrajnego pechowca, będącego podmiotem rynkowym, mającym swoje aktywa w dobrze, w którym jasnowidz lokuje pasywa i *vice versa*. Koszyki jasnowidza i pechowca należą do tego samego portfela w  $\mathbb{R}P^N$ . Uwzględnienie kosztów operacyjnych związanych z przepływem kapitału prowadzi do zastosowania popularnego w fizyce statystycznej modelu Isinga<sup>13</sup>. Odległość kursów jest energią łańcucha spinowego występującego w tym modelu. Opis metryk, odpowiadających dowolnym graczom działającym na rynku, pozbawionym nierealistycznej wiedzy jasnowidza, osiąga się w sposób dla fizyka standardowy — przez wyznaczenie energii spinów w niezerowych temperaturach. Sposób uwzględniania stopnia niewiedzy gracza rynkowego, wprowadzający do do teorii nowy parametr liczbowy — temperaturę  $T$ , poznamy w rozdziale 5. Temperaturowe uogólnienie metryki minimaksowej (1.15) ma

<sup>11</sup>por. [KP99]

<sup>12</sup>na przedziale czasu  $[t_k, t_m]$

<sup>13</sup>zob. [Pio95]

następującą postać

$$(1.16) \quad d(U', U'', T) := \frac{\sum_{\mu} r_{\mu}(U', U'') e^{\frac{r_{\mu}(U', U'')}{T}}}{\sum_{\mu} e^{\frac{r_{\mu}(U', U'')}{T}}} + \frac{\sum_{\mu} r_{\mu}(U'', U') e^{\frac{r_{\mu}(U'', U')}{T}}}{\sum_{\mu} e^{\frac{r_{\mu}(U'', U')}{T}}}.$$

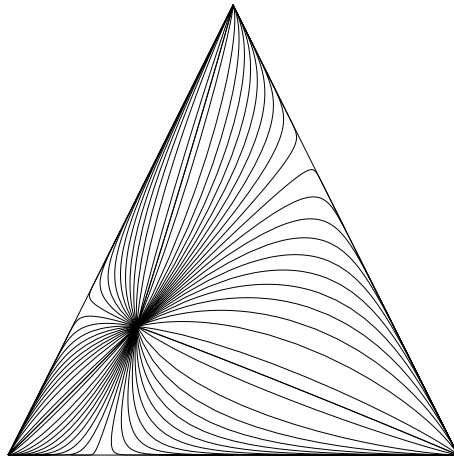
Temperatura (a raczej wielkość termodynamicznie z nią sprzężona, czyli entropia) określa stopień dezinformacji odnośnie rynku, jaki cechuje wyznaczającego odległości pomiędzy notowaniami kursu. Pełna niewiedza (nieskończona temperatura) prowadzi do degeneracji metryki, to jest sytuacji, gdy odległość dowolnych dwóch punktów, należących do wnętrza sympleksu, maleje do zera. Podobnie jak w termodynamice stanów równowagi, temperatura rynkowa nigdy nie przyjmuje wartości ujemnych. Dla rynku jest to konsekwencją rzutowych własności kursu (jasnowidz i pechowiec są ujęci jednym portfelem). Temperaturowy sposób określania odległości pomiędzy różnymi kursami bierze pod uwagę, prócz współrzędnych doznających najbardziej skrajnych zmian, także przyczynki od wolniej zmieniających się cen względnych. Oznacza to wzięcie pod uwagę następnym przecięć wyznaczonej przez parę kursów prostej z hiperpłaszczyznami kursów niewłaściwych. Szerszy opis rodziny zależnych od temperatury metryk rynkowych jest przygotowywany przez autora.

Powracając do metryki dwustosunku warto zauważyć, że dla rynku dwóch dóbr ( $N=2$ ) odległość kursów, wyznaczona za pomocą formuły (1.15), jest równa przedziałowej stopie procentowej wzrostu kursu wymiany dobra zyskującego na atrakcyjności, względem dobra, dla którego proporcja wymiany rynkowej staje się mniej korzystna. Taką odległość kursów od dawna mierzają finansiści, czego dowodem jest popularność obrazowania notowań za pomocą wykresów logarytmicznych.

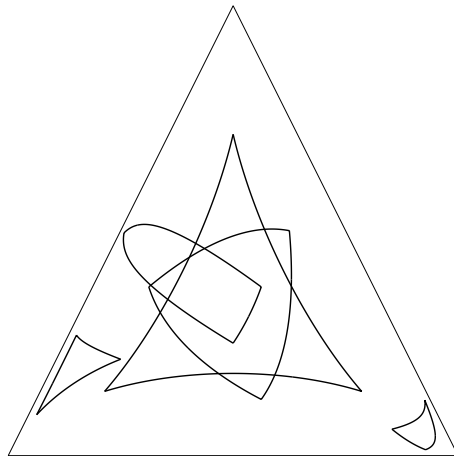
Dla wygody założmy, że odległość dwóch punktów należących do różnych sympleksów ma sens, lecz jest nieskończona. Brzeg sympleksu, w którym odległości pomiędzy kursami są skończone, w literaturze nazywany jest *absolutem*, opisana wyżej metryczna geometria kursów należy do tzw. geometrii Hilberta [Ber77, BK53].

Geodezyjnymi nazywamy linie, wzdłuż których pomiar odległości pomiędzy ustalonymi punktami, przy pomocy metryki  $d(U', U'')$ , daje najmniejszą wartość. Znajomość ich kształtów pozwala analizować własności metryczne przestrzeni.

Rysunek 1.2 przedstawia pęk linii geodezyjnych, w  $\mathbb{RP}^2$  z metryką  $d(U', U'')$ , wychodzących z punktu o współrzędnych (1, 2, 4). Na rysunku 1.3 umieszczono kilka linii geodezyjnych, zgrupowanych w trójkąt. Pobieżne obserwacje prowadzą do hipotezy że, w zależności od usytuowania trójkąta, odstępstwo od geometrii Euklidesa, wyznaczone defektem sumy kątów trójkąta względem euklidesowych  $180^\circ$ , jest dodatnie, bądź ujemne.



Rysunek 1.2. Wychodzące z jednego punktu linie geodezyjne w  $\mathbb{R}P^2$  z metryką minimaxową.



Rysunek 1.3. Trójkąty w  $\mathbb{R}P^2$  z metryką minimaxową.

Zmiany kursów dają się z dużą dokładnością modelować za pomocą ruchów Browna (tzn. ruchów całkowicie przypadkowych, nie wyróżniających żadnego kierunku przestrzennego i niezależnych od kształtu przebytej już drogi) w przestrzeni  $\mathbb{R}P^N$ , zaopatrzonej w metrykę  $d(U', U'')$ . Abstrahowanie od struktury metrycznej przestrzeni kursów (czy portfeli) *de facto* uniemożliwia prowadzenie konsyistentnego opisu ewolucji parametrów rynkowych i prowadzi do wyników zależnych od zawsze subiektywnego wyboru jednostkowych dóbr bazowych  $\{g_0, g_1, \dots, g_N\}$ .

Ze względu na techniczne zaawansowanie i rozległość zagadnienia dyfuzji na rozmaitościach nieriemannowskich, szersze odniesienie się do sygnalizowanych tu tylko problemów jest zadaniem wykraczającym poza ramy tej książki.

Powyższe rozważania dotyczące odległości kursów przenoszą się na opis metrycznych własności portfeli, dzięki obowiązującej w geometrii rzutowej zasadzie dwoistości [VY46].

Możemy rozważać metryczne własności portfeli, dla których absolutem są hiperpłaszczyzny dwóch wyróżnionych kursów (np. sprzed roku i dzisiejszy). W przypadku  $N = 1$  model taki jest równoważny dwuwymiarowemu wariantowi szczególnej teorii względności<sup>14</sup>. Grupa symetrii przestrzeni wektorowej dóbr, zachowująca strukturę metryczną przestrzeni portfeli, jest wtedy dobrze znaną fizykom-relatywistom grupą Lorentza. Grupa ta implikuje wszystkie konsekwencje szczególnej teorii względności, a jej struktura była dobrze poznana jeszcze przed powstaniem tej teorii [Ber99]. Kontekst rynkowy grupy Lorentza zostanie szerzej opisany w następnym rozdziale.

Każda konstrukcja metryki  $d(U', U'')$  pozwoli mierzyć jedynie zmiany zachodzące na rynku, bez odniesienia się do wyceny wartości konkretnego portfela. Przejdźmy więc do zagadnienia pomiaru wpływu zmian kursowych na osiąganego zyski.

## § 7. Stopa zysku z portfela

We wnętrzu jednego z sympleksów zmianę kursu można postrzegać nie jak transformację *alias*, lecz jak transformację *alibi*, gdy nie zmieniamy współrzędnych, a portfel współzmienniczy odnajdujemy w innym miejscu, na nowej hiperpłaszczyźnie kursu. Transformacja *alibi* w opisach ekonomicznych jest konwencją dominującą — powszechnie dostrzegamy zmiany kursów walut, czy zaskakujące ruchy cenowe pewnych towarów, czy usług. Stronimy zwykle od dualnego (i równoważnego!) spojrzenia ujmującego dobra w konwencji *alias*, gdy mimo pozornego braku zmian ilości składników w opisywanym przez nas koszyku (bowiem jego dysponent nie wykonał żadnego przegrupowania kapitałowego) proporcje pomiędzy komponentami koszyka się zmieniają, bo jednostki dóbr są już inne np. z przyczyny uwzględnienia dyskonta, inflacji, zmian cenowych, czy innych czynników. Dlatego poniższy rachunek prowadzony jest w konwencji *alibi*.

Rozważmy jeden z portfeli należących do  $p(f)$ , z ustalonymi parametrami  $f_\mu$  dla współrzędnych  $p_\mu = f_\mu u_\mu^{-1}$ , przy dwóch różnych kursach  $U$  i  $U + dU$ . Gdyby wagi  $p_\mu$  portfela współzmienniczego pozostawić niezmiennione to, zgodnie ze wzorem (1.4), wartość portfela na kursie  $U + dU$ , w jednostkach  $g_0$ , wyniosłaby

<sup>14</sup>zob. rozdz.3 §25 w [Pau21]

$$(1.17) \quad \sum_{\mu} f_{\mu} u_{\mu}^{-1} (u_{\mu} + du_{\mu}).$$

Powstała różnicę między ilością pieniądza w portfelu, a wartością pozostałych składników, należy zniwelować (wykonując stosowne transakcje rynkowe) tak, aby mógł się on na powrót stać zbilansowanym przy kursie  $U + dU$ . Zysk z portfela, w postaci (1.17), przy infinitezymalnie małej zmianie kursu  $dU$ , wynosi

$$\sum_k f_k u_k^{-1} (u_k + du_k) = \sum_k f_k d \ln |u_k|,$$

co wynika z warunku (1.9) i faktu, że różniczka logarytmu wartości bezwzględnej jest następująca:  $d \ln |u| = u^{-1} du$ .

Całkowity zysk na portfelu  $p(f)|_{f=\text{constans}}$ , pomiędzy kursem początkowym  $U'$ , a końcowym  $U''$ , obydwoma należącymi do tego samego sympleksu, będzie sumą (całką) wszystkich infinitezymalnych zysków, osiągniętych przy przejściu od  $U'$  do  $U''$ .

$$\int_{U'}^{U''} \sum_{\mu} f_{\mu} d(\ln |u_{\mu}|) = \sum_{\mu} f_{\mu} (\ln |u_{\mu}''| - \ln |u_{\mu}'|) = \sum_{\mu} f_{\mu} \ln \frac{u_{\mu}''}{u_{\mu}'}$$

Powyższa wielkość, choć mierzy zmianę wartości portfela względem  $g_0$ , nie zależy od wyboru pieniądza. Jeżeli na dobra, względem których mierzyć zysk, wybierzemy (zamiast  $g_0$ ) dowolne portfele:  $p'$  (nie bilansujący się na  $U'$ ) i  $p''$  (nie bilansujący się na  $U''$ ), zysk na zmianie kursu wyniesie

$$(1.18) \quad r_f(U', U'') := \sum_{\mu} f_{\mu} \ln \frac{U''(p'', g_{\mu})}{U'(p', g_{\mu})} = \sum_{\mu} f_{\mu} r_{\mu}(U', U'')$$

Funkcja  $r_f(U', U'')$  posiada własność *addytywności*<sup>15</sup>

$$(1.19) \quad r_f(U', U) + r_f(U, U'') = r_f(U', U'')$$

oraz równie ważną własność niezależności od wyboru portfeli  $p'$  i  $p''$ , w relacji do których zysk jest określany, bowiem

$$\begin{aligned} \sum_{\mu} f_{\mu} \ln \frac{U''(p'', g_{\mu})}{U'(p', g_{\mu})} &= \sum_{\mu} f_{\mu} \left( \ln \frac{U''(p'', q'')}{U'(p', q')} + \ln \frac{U''(q'', g_{\mu})}{U'(q', g_{\mu})} \right) = \\ &= \sum_{\mu} f_{\mu} \ln \frac{U''(q'', g_{\mu})}{U'(q', g_{\mu})}, \end{aligned}$$

co zachodzi na skutek zbilansowania portfela współmienniczego.

Wynik ten obrazuje podstawową zaletę stosowania podwójnej księgowości.

<sup>15</sup>dlatego  $r_f(U, U')$  warto by nazywać *stopą logarytmiczną*



Ostatnią własność jest własnością *jednorodności* zerowego stopnia funkcji zysku względem współrzędnych kursu:

$$r_f(\lambda U, U') = r_f(U, U')$$

dla  $\lambda \neq 0$ . Z tej przyczyny, po prawej stronie definicji (1.18) brak jest argumentów  $p'$  i  $p''$ , wskazujących na niezbilansowane portfele, względem których zysk jest mierzony — są one dowolne.

Funkcja  $r_f(U, U')$  jest przedziałową stopą procentową zbilansowanego portfela, zapisaną w postaci niezmienniczej. Współrzędne  $f_\mu$  są współrzędnymi jednorodnymi, określonymi z dokładnością do stałego mnożnika, dlatego porównywanie zysku z różnych portfeli współzmienniczych (zależnego od tej stałej) powinno się odbywać w tym samym niejednorodnym układzie współrzędnych.

## § 8. Dynamika rynku

Z upływem czasu rynek ciągle koryguje swój kurs (kursy), a ewolucja tych zmian jest głównym przedmiotem zainteresowania ekonomistów. Na zmieniające się kursy można spojrzeć jak na ciągły potok, polegający na „przechodzeniu” w czasie rynku z jednej hiperpłaszczyzny (kursu) w  $\mathbb{RP}^N$  na drugą, bądź dwoiście, jak na ciągłą krzywą w  $\mathbb{RP}^N$ . Warto znaleźć stosowny portfel, który obrazowałby ową dwoistość, posiadając jednocześnie użyteczną interpretację finansową.

W literaturze spotykamy portfele, które nie zawsze się bilansują, bowiem raz ustalonego składu dóbr nie koryguje się już potem z upływem czasu (więc można je zbilansować najczęściej tylko w jednej chwili czasu). Na skutek ewolucji kursów proporcje wartości składników portfela często się zmieniają, a określanie wartości takiego syntetycznego dobra jest bardzo subiektywne, bowiem zależy od wyboru miernika tej wartości (czyli pieniądza). Ten sam kapitał mierzony jedną walutą może być coraz droższy, a drugą coraz tańszy. Zdarza się, że ów mechanizm prowadzi do kłopotliwych paradoksów<sup>16</sup>, gdy logicznie spójna prognoza przewiduje wzrost kursu waluty  $\mathcal{G}$  względem waluty  $\mathcal{G}'$  i jednocześnie wzrost kursu waluty  $\mathcal{G}'$  względem waluty  $\mathcal{G}$ . Proponowane ujęcie opisu rynku koncentruje się na specyficznym rodzaju portfeli, których badanie jest pozbawione wspomnianych irracjonalnych paradoksów, umożliwiając przy tym opracowywanie wielu różnych zagadnień. Pozwala na to współzmienniczość wielkości dóbr portfela wraz ze zmianą kursu rynkowego, co nie wyróżnia żadnych szczególnych kursów, np. w chwilach tworzenia, modyfikacji, czy sprzedaży całego portfela. Wszystko to dzięki temu, że portfel współzmienniczy bilansuje

<sup>16</sup>zob. §5 rozdz.17 i [Pio97]

się na dowolnym kursie rynkowym. Przy tym, jako obiekt dwoisty do bieżącego kursu, znakomicie (bo wiernie) obrazuje zmieniającą się sytuację rynkową. Znając bieżący kurs rynkowy  $U$ , konstruujemy *portfel współzmienniczy z kursem* (należący do hiperpłaszczyzny kursu)  $p(f, t)$ , zgodny z parametryzacją (1.8),

$$p(f, t) := \sum_{\mu} f_{\mu} u_{\mu}(t)^{-1} \mathbf{g}_{\mu},$$

gdzie dla arbitralnie określonej chwili  $t_0$  wyznaczamy współrzędne  $f_{\mu}$  korzystając z zależności  $f_{\mu} = u_{\mu}(t_0) p_{\mu}(f, t_0)$ . Potok hiperpłaszczyzn w  $\mathbb{R}P^N$ , będący zbiorem trajektorii ewolucji czasowej portfeli współzmienniczych, opisuje wszystkie ilościowe konsekwencje zmian kursów. Podczas zmiany kursu w czasie przedziałową stopę zysku z portfela współzmienniczego określa formuła (1.18).

## Grupa symetrii Lorentza

Chociaż rynek stanowi przedmiot badań znajdujący się poza dziedziną fizyki, jednak własności najprostszych symetrii rynkowych, wskazane w paragrafie 6 poprzedniego rozdziału są doskonale znane fizykom. Z tej przyczyny mogą oni dostarczyć wielu nieoczekiwanych przez ekonomistów, czy socjologów spostrzeżeń dotyczących mechanizmów rynkowych. W ostatnich latach uznano za niezwykle owocne aplikacje koncepcji fizycznych w zakresie matematyki finansowej<sup>1</sup>. Poszukujące ilościowych wyjaśnień zagadnień nurtujących finansistów modele bazują na założeniach dotyczących metrycznych własności ekonomicznych wielkości określających wartość kapitału, czy generowanego przez niego zysku. Dla przykładu warto wymienić wyróżniony nagrodą Nobla model Blacka-Scholesa wyceny opcji [WW98], bazujący, dla logarytmu ceny papierów wartościowych (na które wystawione są opcje), na modelu Bacheliera, tj. przyjmujący istnienie zjawiska dryfującej dyfuzji. Dryf, czyli jednostajne zmniejszanie się najbardziej prawdopodobnej wartości logarytmu ceny, wynika z założenia o niezmiennej proporcji spodziewanej ceny tych papierów do ceny papierów pozbawionych ryzyka. W tym przypadku występujący w równaniu dyfuzji różniczkowy operator Laplace'a wymaga założenia dotyczącego metrycznej struktury przestrzeni dyfundującego parametru. Brak należytej staranności w wyborze owych metryk prowadzi do występowania niepokojącego paradoksu [Pio97]. W świetle przedstawionych w poprzednim rozdziale wywodów rutynowe przyjmowanie euklidesowej miary nie znajduje uzasadnienia. By zrozumieć istotę m.in. tego zagadnienia przeanalizujemy w szczególności najprostszą sytuację, gdy na rynku z minimalną liczbą dóbr dwie hiperpłaszczyzny wyznaczają absolut. W tym celu sporządzimy résumé poprzedniego rozdziału, które precyzowałoby przedmiot naszego zainteresowania, w kontekście wymiany dwóch dóbr.

<sup>1</sup>patrz np. [Sti98]

### § 1. Koszyki i cenniki, portfele i kursy

Rynek jest miejscem wymiany przeróżnych form kapitału, towarów czy usług. Założyliśmy, że owe przedmioty zainteresowania kupców tworzą tzw. przestrzeń *koszyków*  $P$ , mającą strukturę rzeczywistej przestrzeni wektorowej. Koszyki składające się na arbitralnie wybraną bazę przestrzeni  $P$  nazwalimy *dóbrami*. Ograniczamy się teraz do skrajnie zredukowanego, lecz jeszcze nietrywialnego rynku, na którym przebiega nieskrępowana wymiana tylko dwóch dóbr. Owe wektory bazowe  $g_0, g_1 \in P$  należące do przestrzeni koszyków oznaczmy odpowiednio przez  $\$$  i  $\text{€}$ . Współrzędne koszyka  $p \in P$  w bazie  $g = \{\$, \text{€}\}$  stanowią parę liczb  $({}_g p_0, {}_g p_1)$ , czyli koszyk ma postać  $p = {}_g p_0 \$ + {}_g p_1 \text{€}$ . Prefiksowy indeks  $g$ , występujący przy współrzędnych koszyka, wskazuje bazę do której odnoszą się owe parametry koszyka. Ujemna współrzędna koszyka oznacza zobowiązanie (w tym kontekście pojawiła się trzynaste wieków temu koncepcja liczb ujemnych).

*Cennikiem* nazwalimy odwzorowanie liniowe  $\hat{\pi}^{(m)}$  takie, że  $\hat{\Pi} \ni \hat{\pi}^{(m)} : P \rightarrow P^1$ ,  $\dim P^1 = 1$ , wyznaczające wartość dowolnego koszyka w jednostkach jednego z dwóch dóbr (np.  $\text{€}$ ), ze względu na taki wybór zwanego *pieniądem*. Wskaźnik  $m$  przyjmuje wartość 0, bądź 1, w zależności od rodzaju dobra wybranego na jednostkę pieniężną. Wartość cennika  $\hat{\pi}^{(0)}$  na koszyku  $p$  wyraża się następująco:

$$(2.1) \quad \hat{\pi}^{(0)}(p) = \hat{\pi}^{(0)}({}_g p_0 \$ + {}_g p_1 \text{€}) = {}_g p_0 \hat{\pi}^{(0)}(\$) + {}_g p_1 \hat{\pi}^{(0)}(\text{€}).$$

Analogiczny wzór zachodzi dla cennika  $\hat{\pi}^{(1)}$  z dobrem  $\text{€}$  w roli pieniądza. Oznaczmy występującą w powyższym wzorze cenę jednostki dobra  $g_k$  w jednostkach dobra  $g_m$  przez  ${}_g \hat{p}_k^m$ , czyli

$$(2.2) \quad {}_g \hat{p}_k^m g_m := \hat{\pi}^{(m)}(g_k).$$

Wszystkie koszyki, których odpowiednie współrzędne pozostają względem siebie w ustalonych proporcjach, traktujemy jako równoważne. *Portfelem*  $p^*$  nazywamy klasę równoważności określoną w zbiorze koszyków niepustych  $P \setminus \{0\}$ . W dalszym tekście tego rozdziału symbol „ $*$ ” będzie sugerował klasę równoważności obiektów, przy których zostanie postawiony. Gdy koszyki należące do klasy  $p^*$  składają się z różnej od zera ilości dobra  $\text{€}$ , na reprezentanta klasy wybierzemy koszyk  $\left(1, \frac{{}_g p_1}{{}_g p_0}\right)$ . Zaś w sytuacji przeciwnej — koszyk  $(0, 1)$ . Zbiór wszystkich portfeli  $P^*$  tworzy jednowymiarową rzeczywistą przestrzeń rzutową<sup>2</sup>  $\mathbb{R}P^1$ . Wyżej wybrane współrzędne portfela  $p^*$  nazywamy współrzędnymi *niejednorodnymi*. Portfel w którym brak jest jednego z dóbr (np. dla którego

<sup>2</sup>wyjaśnienie pojawiających się w tekście określeń charakterystycznych dla geometrii rzutowej znajdziemy np. w monografiach [VY46, BK53]

pierwsza współrzędna reprezentanta klasy znika,  $g p_0^* = 0$ ) określamy mianem *portfela niewłaściwego* (np. gdy  $g p_0^* = 0$  — niewłaściwego względem dobra \$).

W części prezentowanego tekstu, gdy rozważania nie będą zależały od wymiaru przestrzeni  $P$ , zastosowana notacja współrzędnych nie będzie w sposób jawny eksponowała indeksów „0” i „1”. Wtedy też, dla zachowania ogólności stwierdzeń, występować będzie pojęcie hiperpłaszczyzny, mimo że w  $P^* = \mathbb{R}P^1$  hiperpłaszczyzna jest po prostu punktem tej przestrzeni.

Przestrzeń  $\hat{P}^*$  *kursów rynkowych*  $\hat{P}^* \subset \hat{\Pi}$  tworzą wszystkie cenniki przechodnie, tzn. cenniki spełniające własność

$$(2.3) \quad \hat{p}^* \in \hat{P}^* \iff \forall_{l,m} \forall_p \hat{p}^{*(m)}(\hat{p}^{*(l)}(p)) = \hat{p}^{*(m)}(p).$$

Przestrzeń takich cenników obejmuje *kursy niewłaściwe* (np. dla dobra \$), występujące w sytuacjach, gdy dobro zostaje wyeliminowane z obrotu rynkowego. Współrzędne kursu można wybrać w postaci  $(1, g \hat{p}_1^0)$ , gdzie zdefiniowana równością (2.2) liczba  $g \hat{p}_1^0$  wskazuje ilość dobra  $g_1 = \text{€}$ , jaką po tym kursie można wymienić na jednostkę dobra  $g_0 = \text{\$}$  (w przypadku kursu niewłaściwego dla \$ w postaci  $(0, 1)$ ). Własność przechodniości (2.3) połączona z liniowością kursów (2.1) prowadzi do wniosku, że przestrzeń  $\hat{P}^*$  jest przestrzenią rzutową  $\mathbb{R}P^1$ , dwoistą względem przestrzeni portfeli  $P^*$ . Dwoistość rynkowych przestrzeni jest konsekwencją relacji *zbilansowania* portfela na kursie (w języku geometrii relacją tą jest należenie punktu do hiperpłaszczyzny), która ma miejsce, gdy odpowiednie współrzędne portfela  $\hat{p}^*$  i kursu  $p^*$  spełniają równanie

$$\sum_l g \hat{p}_l g p_l = 0.$$

Przyjęliśmy notację, w której  $l$ -ta współrzędna jednorodna portfela  $p^*$  została oznaczona przez  $g p_l$ , a odpowiednia jednorodna współrzędna kursu  $\hat{p}^*$  przez  $g \hat{p}_l^k$ . Liczba  $g \hat{p}_l^k$  jest współrzędną  $g \hat{p}_l^k$  dla dowolnego sposobu wyceny dóbr za pomocą jednego ustalonego dobra  $g_k$ <sup>3</sup> wymiernego na rynku. Dla konsystencji notacji oznaczmy przestrzeń parametrów jednorodnych dla elementów (kursów) z przestrzeni rzutowej  $\hat{P}^*$  przez  $\hat{P}$ . Powyższą konstrukcję przestrzeni portfeli  $P^*$  i przestrzeni kursów  $\hat{P}^*$  uogólniamy, jak w poprzednim rozdziale, na rynek wymiany dowolnej liczby dóbr (czyli na dwoiste rzeczywiste przestrzenie rzutowe o dowolnym wymiarze).

Opisany wyżej związek dwoistości posiada rozległe konsekwencje. Jako przykład można podać dwoistość zachodzącą między modelami arbitrażu cenowego, a modelami, w których występuje przychód ze skali. Obydwa zjawiska dotyczą tego samego, popularnego w teorii pola mechanizmu: złamania rzutowej symetrii przestrzeni cenników (bądź koszyków), wynikającego z nieprzechodniości cenników (czy nierównoważności proporcjonalnych koszyków). Dlatego

<sup>3</sup>tzw. *jednostki pieniężnej*

tak różne w zastosowaniach modele powinny mieć identyczną strukturę matematyczną. Ze względu na techniczny aspekt specyfikacji kontekstu ekonomicznego owych modeli sygnalizowana wyżej tematyka wychodzi poza teoretyczne ramy tej książki.



Pojawienie się przestrzeni rzutowej w opisie rynku jest nieprzypadkowe, bowiem wynika z faktu, że istotnymi parametrami informacji rynkowej są proporcje odpowiednich wielkości, a nie same ich wartości bezwzględne. Wzajemne powiązania idei oraz formalizmów geometrii rzutowej i teorii względności, z części których skorzystaliśmy, wpływały na rozwój tych dwóch dyscyplin, patrz np. [Pau21] czy [Veb33].

Grupą symetrii przestrzeni  $P^*$  i  $\hat{P}^*$  jest grupa homografii. W poniższych rozważaniach korzystamy z tej własności w celu zrozumienia symetrii rynkowych, a także dla dbałości o przejrzystość notacji.

## § 2. Współrzędne fizyczne koszyków

Rozważmy notowania kursu rynkowego w dwóch różnych chwilach czasu  $t'$  i  $t''$ . Niech współrzędne jednorodne kursu w tych chwilach wynoszą odpowiednio  $\hat{p}^{*'} = ({}_g\hat{p}'_0, {}_g\hat{p}'_1)$  oraz  $\hat{p}^{*''} = ({}_g\hat{p}''_0, {}_g\hat{p}''_1)$ ; kursy te są różne  $\hat{p}^{*'} \neq \hat{p}^{*''}$ . Dokonując przekształcenia liniowego

$$\hat{S} = \hat{S}(\hat{p}^{*'}, \hat{p}^{*''}) := \frac{1}{{}_g\hat{p}'_0 {}_g\hat{p}''_1 - {}_g\hat{p}''_0 {}_g\hat{p}'_1} \begin{pmatrix} -{}_g\hat{p}'_1 + {}_g\hat{p}''_1 & {}_g\hat{p}'_0 - {}_g\hat{p}''_0 \\ -{}_g\hat{p}'_1 - {}_g\hat{p}''_1 & {}_g\hat{p}'_0 + {}_g\hat{p}''_0 \end{pmatrix}$$

można przedstawić kursy rynkowe  $\hat{p}^{*'}$  i  $\hat{p}^{*''}$  za pomocą bazy fizycznej, w której owe kursy mają odpowiednio następujące współrzędne  ${}_f\hat{p}' := (1, -1)$

i  ${}_f\hat{p}'' := (1, 1)$ . Określenie takiej bazy przymiotnikiem „fizyczna” spowodowane jest analogią do bazy standardowo używanej dla opisu czasoprzestrzeni. Wektory bazy rozpinającej przestrzeń zdarzeń odpowiadają jednostkowej zmianie czasu (rok), bądź położenia (rok świetlny), odmierzonej przez obserwatora, znajdującego się w inercyjnym układzie odniesienia<sup>4</sup>. Kierunki  $(1, -1)$  i  $(1, 1)$  wyznaczają bieg promieni światła w lewo lub w prawo, bo w dwuwymiarowym wariacie szczególnej teorii względności tylko te dwie możliwości wchodzi w rachubę. Przyjęcie kierunków rozchodzenia się światła za absolut, zawsze taki sam, niezależnie od prędkości z jaką porusza się nasz obserwator<sup>5</sup>, zadaje łączące różne układy odniesienia izomorfizmy, które tworzą grupę Lorentza<sup>6</sup>.

Współrzędne portfeli w bazie fizycznej (bądź współrzędne jednorodne kursów w bazie dualnej) będą dalej nazywane *współzrędnymi fizycznymi*. Macierz  $\hat{S}$  można pomnożyć przez dowolną (różną od zera) stałą, gdyż po takiej modyfikacji reprezentuje ona dalej tą samą homografię. W notacji macierzowej związku pomiędzy współzrędnymi kursów rynkowych, a ich odpowiednikami w bazie fizycznej (bazie, w której wektory parametryzujemy współzrędnymi fizycznymi), są następujące:

$$(2.4) \quad {}_f\hat{p}' = \hat{S} {}_g\hat{p}', \quad {}_f\hat{p}'' = \hat{S} {}_g\hat{p}''.$$

Po przejściu do układu współzrędnego kursu w bazie fizycznej, należy odpowiednio przekształcić współzrędną portfeli. Stosowna transformacja ma postać (indeks  $T$  oznacza transpozycję macierzy):

$$(2.5) \quad {}_f p = S {}_g p, \quad \text{gdzie } S := (\hat{S}^{-1})^T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} {}_g\hat{p}'_0 + {}_g\hat{p}''_0 & {}_g\hat{p}'_1 + {}_g\hat{p}''_1 \\ -{}_g\hat{p}'_0 + {}_g\hat{p}''_0 & -{}_g\hat{p}'_1 + {}_g\hat{p}''_1 \end{pmatrix}.$$

Warto jeszcze przypomnieć, że dobra przekształcają się tak samo jak kursy, zob. (2.4).

### § 3. Metryka przestrzeni rzutowej portfeli

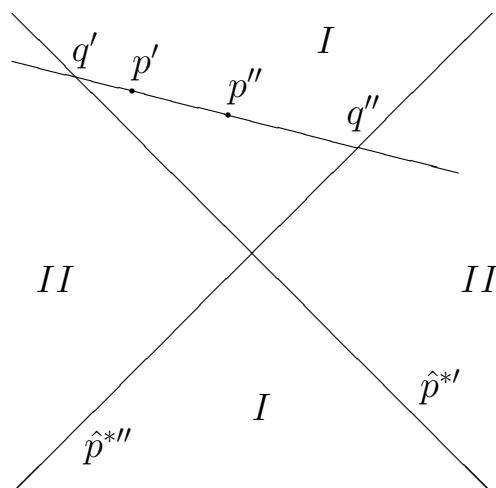
Wiemy już, że własności metryczne przestrzeni portfeli mogą być wywiezione z przesłanek o charakterze finansowym na kilka sposobów. W tym miejscu zajmiemy się jednym z nich, posiadającym najsłabsze założenia, bowiem nie absolutyzującym żadnego dobra, a zakładającym symetrię, w której hiperpłaszczyzny kursów  $\hat{p}^{*'}$  i  $\hat{p}^{*''}$  (wyznaczone równaniem  $\hat{p}^{*'}(p^*) = 0$  lub  $\hat{p}^{*''}(p^*) = 0$  w

<sup>4</sup>zob. definicję na str. 56 oraz znaczenie inercyjnego układu odniesienia w ekonomii, przedstawione w pracy [Pio99b]

<sup>5</sup>czyli uwzględniamy fundamentalną własność świata, w którym mierzona prędkość rozchodzenia się fal elektromagnetycznych nie zależy od prędkości aparatu pomiarowego

<sup>6</sup>patrz dalsze komentarze w §4





Rysunek 2.1. Przestrzeń Minkowskiego rynku dwóch dóbr.

przestrzeni portfeli  $P^*$ ) pozostają niezmiennicze. Przyjmujemy więc metrykę w przestrzeni portfeli  $P^* = \mathbb{R}P^1$  taką, że portfele zbilansowane na kursach  $\hat{p}^*$  i  $\hat{p}^{*''}$  (należące do tych hiperpłaszczyzn) są nieskończenie oddalone od pozostałych; nieskończenie odległe są także portfele rozdzielone hiperpłaszczyznami kursów  $\hat{p}^*$  i  $\hat{p}^{*''}$ . Rysunek 2.1 ilustruje naszą konstrukcję metryki  $d$  w przestrzeni  $P = \mathbb{R}^2$  koszyków, na rynku dwóch dóbr  $\$$  i  $\text{€}$ . W tym celu wybierzmy w  $P$  dwa niezbilansowane koszyki  $p'$  i  $p''$ ,  $p' \neq p''$ , oba leżące w jednym z dwóch obszarów ( $I$ , lub  $II$ ), na jakie dzieli przestrzeń rzutową portfeli hiperpłaszczyznami kursów  $\hat{p}^*$  i  $\hat{p}^{*''}$ . Niech będzie to obszar  $I$  — określenie metryki w obszarze  $II$  przebiega analogicznie, w otrzymywanych formułach wystarczy zamienić numerację dóbr stanowiących bazę fizyczną. Niejednorodne współrzędne fizyczne  $v := \frac{s_1^*}{s_0^*}$  portfeli należących do tego obszaru spełniają warunek  $|v| < 1$ . Dla wyznaczenia odległości  $d(p^*, p^{*''})$  należy znaleźć punkty przecięcia prostej  $p'p''$  z *absolutem* (tzn. z hiperpłaszczyznami  $\hat{p}^*$  i  $\hat{p}^{*''}$ , czyli punktami w  $P^* = \mathbb{R}P^1$ , w  $P$  reprezentowanymi przez koszyki  $p$  spełniające któreś z równań  $\hat{p}^{*'}(p) = 0$ , bądź  $\hat{p}^{*''}(p) = 0$ ), które oznaczmy odpowiednio przez  $q'$  i  $q''$ . Odległość jest proporcjonalna do wartości bezwzględnej logarytmu dwustosunku czwórki punktów  $q'$ ,  $p'$ ,  $p''$  i  $q''$ <sup>7</sup>. Dla prostoty końcowych zapisów ustalmy współczynnik proporcjonalności na  $\frac{1}{2}$ . Wtedy

$$(2.6) \quad d(p^*, p^{*''}) := \frac{1}{2} \left| \ln \frac{|q'p''| |p'q''|}{|q'p'| |p''q''|} \right|,$$

gdzie  $|pq|$  jest długością euklidesową odcinka  $pq$  w przestrzeni  $P$ , czyli w zbiorze parametrów jednorodnych dla portfeli  $p^* \in P^*$ . Punkty prostej  $p'p''$  mają

<sup>7</sup> zob. [VY46]



współrzędne  $\{\lambda'_i p'_i + \lambda''_i p''_i\}$ , przy czym parametry prostej spełniają zależność  $\lambda' + \lambda'' = 1$ . Parametry przecięcia prostej  $p'p''$  z hiperpłaszczyzną  $\hat{p}^{*'}$  spełniają więc równanie

$$\lambda' \sum_l \mathfrak{g}\hat{p}'_l \mathfrak{g}p'_l + \lambda'' \sum_l \mathfrak{g}\hat{p}'_l \mathfrak{g}p''_l = 0.$$

Iloraz  $r$  tych parametrów w punkcie przecięcia z hiperpłaszczyzną  $\hat{p}^{*'}$  wynosi

$$r' := \left. \frac{\lambda'}{\lambda''} \right|_{q'} = - \frac{\sum_l \mathfrak{g}\hat{p}'_l \mathfrak{g}p''_l}{\sum_l \mathfrak{g}\hat{p}'_l \mathfrak{g}p'_l}.$$

Analogiczny wzór zachodzi dla ilorazu  $r''$  parametrów prostej  $p'p''$  w punkcie, w którym przecina ona hiperpłaszczyznę  $\hat{p}^{*''}$ .

$$r'' := \left. \frac{\lambda'}{\lambda''} \right|_{q''} = - \frac{\sum_l \mathfrak{g}\hat{p}''_l \mathfrak{g}p''_l}{\sum_l \mathfrak{g}\hat{p}''_l \mathfrak{g}p'_l}.$$

Po dokonaniu wyboru hiperpłaszczyzn kursów  $\hat{p}^{*'}$  i  $\hat{p}^{*''}$  jako absolutu, formuła (2.6) określająca metrykę przybiera postać:

$$(2.7) \quad d(p^{*'}, p^{*''}) = \frac{1}{2} \left| \ln \frac{\left| \frac{r'}{1+r'} \right| \left| 1 - \frac{r''}{1+r''} \right|}{\left| 1 - \frac{r'}{1+r'} \right| \left| \frac{r''}{1+r''} \right|} \right| = \frac{1}{2} \left| \ln |r''| - \ln |r'| \right|.$$

Wyrażenie (2.7) wyznacza poprawnie własności metryczne rynku z dowolną ilością dóbr, bowiem przy jego wyprowadzeniu nie wykorzystano założenia o ilości dóbr. W przypadku rynku dwóch dóbr, dla portfeli  $p^{*'}$  i  $p^{*''}$  otrzymamy następujące wartości ilorazów  $r'$  i  $r''$  (w układzie współrzędnych fizycznych, gdzie  $v = \frac{fp_1}{fp_0}$  jest niejednorodną współrzędną portfela  $p^*$  w bazie fizycznej, na rynku właściwym dla dobra, które jest wektorem bazy o indeksie 0):

$$r' = \frac{fp''_0 - fp''_1}{fp'_0 - fp'_1} = \frac{fp''_0}{fp'_0} \frac{1 - v''}{1 - v'}, \quad r'' = \frac{fp''_0 + fp''_1}{fp'_0 + fp'_1} = \frac{fp''_0}{fp'_0} \frac{1 + v''}{1 + v'}.$$

Korzystając z przedstawionego sposobu transformowania portfeli do układu współrzędnych fizycznych (2.5), otrzymamy wzór na  $v$ , opisujący tę wielkość przy pomocy parametrów  $(\mathfrak{g}p_0, \mathfrak{g}p_1)$  w bazie  $\mathfrak{g}$  portfela  $p^*$ . Zapisany w sposób nie wyróżniający któregokolwiek z dwóch dóbr bazowych przedstawia się on następująco

$$v = v(p^*, \hat{p}^{*'}, \hat{p}^{*''}) = \frac{\mathfrak{g}p_0(\mathfrak{g}\hat{p}''_0 - \mathfrak{g}\hat{p}'_0) + \mathfrak{g}p_1(\mathfrak{g}\hat{p}''_1 - \mathfrak{g}\hat{p}'_1)}{\mathfrak{g}p_0(\mathfrak{g}\hat{p}''_0 + \mathfrak{g}\hat{p}'_0) + \mathfrak{g}p_1(\mathfrak{g}\hat{p}''_1 + \mathfrak{g}\hat{p}'_1)}.$$

Po wstawieniu wielkości  $r'$  i  $r''$  do wyrażenia (2.7) otrzymamy następującą formułę na odległość dwóch portfeli

$$(2.8) \quad d(p^{*'}, p^{*''}) = |\operatorname{arctgh}(v') - \operatorname{arctgh}(v'')|.$$

Analizując powyższą miarę odległości dochodzimy do wniosku, że gdy dokonamy nieliniowej zamiany współrzędnych portfela  $p^* \rightarrow v \rightarrow \operatorname{arctgh}(v)$ , możemy

go traktować jako obiekt w euklidesowej przestrzeni metrycznej i to pod warunkiem ograniczenia rozważań do rynku dwóch dóbr.

---

#### § 4. Transformacje Lorentza

Przestrzenie z metryką zadaną wzorem (2.7) należą do znanych w literaturze geometrii hiperbolicznych [VY46]. Wielkość  $\operatorname{arctgh}(v)$  pojawiająca się we wzorze (2.8) na odległość dwóch portfeli znana jest fizykom-relatywistom pod nazwą *parametru prędkości*<sup>8</sup> (w szczególnej teorii względności  $v$  jest prędkością obiektu fizycznego, obserwowanego z inercyjnego układu odniesienia). O analogii między regułą składania prędkości w szczególnej teorii względności, a sumowaniem odległości w geometrii Bolyai–Łobaczewskiego pisali już przed dziewięćdziesięciu laty V. Varičak [Pau21] i A. Sommerfeld [Smo76].

Na podstawie przeprowadzonych tu rozważań, dotyczących konstrukcji geometrii hiperbolicznej rynku, dochodzimy do związku między geometrią dwuskładnikowych koszyków, a opisem relatywistycznych obiektów w (1+1)-wymiarowej teorii względności. Gdy opis rynku prowadzimy na poziomie koszyków i cenników, a nie portfeli i kursów (w przestrzeni  $\mathbb{R}^2$  współrzędnych jednorodnych przestrzeni rzutowej  $\mathbb{R}P^1$ ), odpowiednikiem fizycznego układu inercyjnego jest układ współrzędnych fizycznych pary kursów rynkowych (np. dla dwóch różnych dni). Wskazanie na rynku przestrzeni wektorowej  $P$  koszyków, z wyróżnioną bazą dóbr, jest równoważne wyborowi w afinicznej czasoprzestrzeni repera, wprowadzającego parametryzację przy pomocy układu współrzędnych fizycznych (czas + przestrzeń)<sup>9</sup>. Jeżeli pominąć procesy gospodarcze tworzące kapitał, zmiana składu koszyka jest możliwa jedynie dzięki rynkowym „podróżom z prędkością światła”, czyli przez dołożenie do koszyka aktywów i pasywów o aktualnie łącznej zerowej wartości. Odpowiednikiem absolutu utworzonego przez dwa różne kursy  $\hat{p}^{*'} i \hat{p}^{*''}$  jest stożek światła. Grupą symetrii rynkowych jest zbiór odwzorowań liniowych zachowujących absolut, czyli grupa Lorentza. W pierwotnym układzie współrzędnych przestrzeni koszyków grupę tę tworzy zbiór macierzy postaci  $S^{-1}LS$ , gdzie  $L$  jest macierzą przekształcenia Lorentza układu współrzędnych czasoprzestrzennych [Pau21, TW72].

W celu prezentacji związku pomiędzy stopą a własnościami metrycznymi rynku dwóch dóbr obierzmy układ współrzędnych przestrzeni  $P$ , dla którego wektory bazy leżą wszystkie na hiperpowierzchni rynkowego „stożka światła”.

---

<sup>8</sup>patrz np. [TW72, KT81]

<sup>9</sup>por. np. [KT81]

**4.1. Współrzędne izotropowe** Wybierzmy wektory  $\$, \€ \in P$  tak, aby każdy z nich leżał na innej hiperpowierzchni tworzących absolut. Taką bazę nazywamy bazą izotropową, bądź bazą zerową [KT81]. Zamiana współrzędnych jest tak dobrana, aby doprowadziła nas do sytuacji znanej już z rachunku zamieszczonego w paragrafie 5 poprzedniego rozdziału. Teraz łatwo zauważymy, że formuła wyznaczająca odległość dwóch dowolnych kursów to wartość bezwzględna wyrażenia (1.13). W izotropowym układzie współrzędnych uzyskaliśmy metrykę lokalnie płaską i jedynie w tym sensie możemy mówić o niej jako o mierze „euklidesowej”.

## § 5. Mankamenty geometryzacji rynku

Ujmujący dualnie zasoby kapitałowe i ceny, przedstawiony tu geometryczny model rynku pozwala na stosowanie niezwykle skutecznych i precyzyjnych metod rachunkowych geometrii różniczkowej, znanych badaczom teorii pola. W minionym stuleciu osiągnęli oni jedyne w swoim rodzaju bogactwo precyzyjnych wyników. Rozdziały 4 i 5 prezentują pewien wariant formalizmu statyki równowagi, z wyeksponowaną rolą przekształceń rzutowych, uzupełniony elementami rachunku prawdopodobieństwa. Pomimo takich perspektyw rozwoju, z geometrycznym modelem rynku wiążą się pewne zagrożenia, mogące znacznie osłabić jego przyszłe znaczenie. W kontekście obecnie przydatnych w ekonomii metod matematycznych łatwo spostrzec, że modele, w których centralną rolę odgrywają własności metryczne konstruowanych przestrzeni, niezależnie od wartości uzyskanych w ich ramach wyników, są łatwiejsze w odbiorze dla fizyków (nie znajdując się w obszarze ich zainteresowań), niż dla specjalistów zajmujących się zagadnieniami rynkowymi. Niewielka jest także ilość wspartych teorią empirycznych badań rynkowych, wyraźnie kontrastująca z fundamentalnym znaczeniem eksperymentu w fizyce. Nie sprzyja to możliwościom odkrycia charakteryzujących rynki geometrycznych niezmienników, czy współzmienników. Przede wszystkim należy jednak wskazać podstawowy mankament proponowanego tu, rzutowego opisu rynku. Otóż wyraźny jest brak konstrukcji dynamiki rynku, która przy pomocy narzędzi matematycznych pozwalałaby (choćby w zarysie) opisywać takie procesy, jak dochodzenie rynku do równowagi, czy tłumaczyć przy pomocy swych obiektów, czym np. jest rynek efektywny. Zdaniem autora taką rolę może spełniać przedstawiona w ostatnich rozdziałach książki kwantowa teoria gier rynkowych. Jej umiejętne „sklejenie” z formalizmem rzutowym wydaje się w przyszłości możliwe.

Przejdźmy obecnie do propozycji nowego spojrzenia na ryzyko finansowe, w którym znane wyniki geometryczne, bazujące na dwoistości punkt-prosta rzutowa w  $\mathbb{R}P^2$ , odpowiadają rozwiązaniu problemu.

## Osiągalność — miara ryzyka finansowego

*Skale wyrażane są często w jednostkach (walutach), których kursy są zmienne w czasie, a same transakcje przeprowadzane są w chwilach zupełnie przypadkowych i z przypadkową intensywnością. Z tego powodu należy zachować daleko idącą ostrożność w wyborze najważniejszych wskaźników, mając na uwadze także niejawne założenia związane z konkretnym wyborem.*

*Rosario N. Mantegna, H. Eugene Stanley [MS01]*

Przyzwyczajaliśmy się do sytuacji, w której analityk finansowy podając średnie odchylenie kwadratowe zysku względem jego wartości oczekiwanej wskazuje stopień ryzyka związanego z posiadaniem instrumentu finansowego. Czasy, w których sceptycznie odnoszono się do teorii Harryego M. Markowitza należą już do historii. Obowiązujący dziś standard ilościowego określania ryzyka finansowego do tego stopnia zdominował świat finansów, że trudno jest rozwijać alternatywne narzędzia służące do mierzenia ryzyka rynkowych aktywów kapitałowych. Jednak ryzyko finansowe jest na tyle ważną kategorią ekonomiczną, próbującą uchwycić przyczynę różnicowania się kosztów formalnie podobnych przedsięwzięć kapitałowych [Arr79], że warto się do niej odnieść z pozycji nierównoważnych, aczkolwiek uzasadnionych metod rachunkowych.

Wzorując się na opracowanych dla celów nauk fizycznych, klasycznych newtonowskich metodach analizy zjawisk mechanicznych autor opisał w pracy [Pio99b] deterministyczną reinterpretację ryzyka finansowego. Zostało tam wykazane, że przy pewnych dodatkowych założeniach jest ona formalnie równoważna standardowemu sposobowi opisu ryzyka. Jednak i w takim przypadku pozostaje wiele wariantów rachunkowych, dających odmienne liczbowe oceny ryzyka. Ta różnorodność może być konsekwencją np. przyjęcia odmiennego horyzontu czasowego dla gromadzonych danych statystycznych. Na jego wybór ma wpływ założona skala i specyfika okresu trwania analizowanego portfela inwestycyjnego. Statystyczna metoda oceny ryzyka zwykle nie radzi sobie z uwzględnieniem szczególnych chwil dotyczących istotnych składników portfela, takich jak np. terminy bilansu spółki giełdowej, wypłaty dywidend itp. Podobne ułomności właściwe pomiarom pragmatycznym interesująco parafrazuje następująca uwaga Hugona Steinhausa [Ste73]: *Te długości, które podaje praktyk (np. na bilecie kolejowym) odnoszą się raczej do definicji osi toru*

*kolejowego, podanej matematycznie, niż do realnego toru.* Jak bliski związek może zachodzić pomiędzy długością krzywych a ryzykiem ukaże treść tego rozdziału.

Interesujące są powody, dla których statystyczna nieokreśloność zysku odzwierciedla tak szanse jego zwiększenia, jak i niebezpieczeństwa, na jakie narażony jest właściciel wycenianego przez rynek dobra. Jeżeli racje te wiążą się z ilością sposobności nabycia, czy możliwości utracenia instrumentu (np. na skutek sceptycznych ocen dotyczących przyszłych zysków generowanych w oparciu o to dobro), to miarę takiego ryzyka lepiej oddaje proponowana niżej przez autora definicja *osiągalności* instrumentu finansowego.

Jeżeli założymy, że miara prostych (czyli ich ilość<sup>1</sup>) przecinających krzywą całkową jest niezmiennikiem symetrii euklidesowej, to równa jest ona euklidesowej długości tej krzywej. Spostrzeżenie to znane jest jako formuła Croftona. W XIX wieku zapoczątkowała ona rozwój geometrii całkowej i badanie geometrycznych aspektów rachunku prawdopodobieństwa [Enc97, KM63].

### § 1. Finansowe układy odniesienia

Określimy mianem *zbioru instrumentów finansowych*  $I$  wszelakie płynne, permanentnie wyceniane jednostki dóbr, bądź zobowiązań. Do zbioru tego należą więc również portfele, będące zestawieniami określonych ilości instrumentów finansowych notowanych bezpośrednio na rynku, czy dowolne, płynne instrumenty pochodne.

Wycena instrumentu finansowego zawsze musi się odnosić do pewnej ilości wyróżnionego dobra, względem którego instrument ten jest wyceniany. Zwykle tym wyróżnionym dobrem jest jednostka pieniężna (także instrument finansowy), więc będziemy je dalej nazywać po prostu *pieniądem*. Dodatkowo wyróżnimy w zbiorze  $I$  dowolny inny (różny od pieniądza) instrument finansowy i nazwijmy go *instrumentem wzorcowym*.

*Układ odniesienia* to uporządkowana para wyróżnionych instrumentów, czyli para (pieniądz, instrument wzorcowy).

Niech  $\tau$  oznacza czas astronomiczny, wyznaczany w dowolnych jednostkach (rok, tydzień, sekunda). Przez  $r(\tau)$  będziemy oznaczać funkcję, będącą *różniczkową stopą* wzrostu instrumentu wzorcowego względem pieniądza, określoną w jednostce będącej odwrotnością jednostki czasu  $\tau$  wzorem

$$(3.1) \quad r(\tau) := \frac{1}{c_S(\tau)} \frac{dc_S(\tau)}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} \ln c_S(\tau),$$

<sup>1</sup>prostych tych jest nieskończenie wiele, więc zrzeczniej jest mówić o ich mierze, a nie o ich ilości

gdzie  $c_S(\tau)$  jest ceną w chwili  $\tau$  instrumentu wzorcowego wyrażoną w jednostkach pieniężnych.

Zdefiniujemy *czas wzorcowy*  $t = t(\tau)$  jako całkę oznaczoną z różniczkowej stopy wzrostu instrumentu wzorcowego  $r(\tau)$  wziętą względem pewnej chwili początkowej  $\tau_0$

$$(3.2) \quad t(\tau) := \int_{\tau_0}^{\tau} r(\tau') d\tau'.$$

Moment  $\tau_0$  jest dowolnie wybraną, lecz ustaloną chwilą czasu astronomicznego, wyznaczającą punkt zerowy czasu wzorcowego ( $t(\tau_0) = \int_{\tau_0}^{\tau_0} r(\tau') d\tau' = 0$ ). Zwróćmy uwagę, że czas wzorcowy jest definiowany relatywnie — zależy od wyboru pieniądza i instrumentu wzorcowego. Gdy dobra określające pieniądź i instrument wzorcowy w układzie odniesienia zamienimy miejscami różniczkowa stopa wzrostu nowego instrumentu wzorcowego względem nowego pieniądza będzie równa  $-r(\tau)$ , więc czas wzorcowy zdefiniowany formułą (3.2) zmieni znak na przeciwny. Dlatego taką zamianę ról instrumentów definiujących finansowy układ odniesienia będziemy nazywać *inwersją* czasu wzorcowego.

Dla dowolnego instrumentu finansowego o cenie  $c(\tau)$ <sup>2</sup> *wykresem instrumentu* nazwiemy krzywą  $w$  w  $\mathbb{R}^2$ , określoną parametrycznie następująco

$$w := (t(\tau), y(\tau) = \ln c(\tau) - \ln c(\tau_0)).$$

Krzywa  $w$  jest sparametryzowana czasem astronomicznym  $\tau$ , bądź jakkolwiek inną zmienną rzeczywistą, będącą ciągłą i różnowartościową funkcją czasu  $\tau$ . Przedstawienie wykresu instrumentu finansowego w skali logarytmicznej względem cen pozwala m.in. uniezależnić prezentowany opis ryzyka od jakichkolwiek splitów jednostek opisywanych instrumentów (takich jak waluta, akcja, opcja itp.). Oczywistym wnioskiem z powyższej definicji jest spostrzeżenie, że na wykres instrumentu możemy patrzeć jak na trajektorię (krzywą) zakreśloną przez wektor należący do pewnej przestrzeni liniowej. Jest nią iloczyn kartezyjski zbioru wartości logarytmu ceny instrumentu wzorcowego i zbioru wartości logarytmu ceny instrumentu, którego wykres nas interesuje. Drugi czynnik iloczynu kartezyjskiego jest zatem wspólnym zbiorem wartości logarytmów cen względem pieniądza wszystkich instrumentów finansowych. Przywykliśmy do obrazowania zmian cenowych na wykresach semilogarytmicznych, których kształt odpowiada wykresom tych instrumentów w układzie odniesienia, w którym pieniądź jest obowiązującą walutą, a instrumentem wzorcowym jest dowolny płynny walor o stałej (w czasie astronomicznym) różniczkowej stopie wzrostu względem waluty, nazywany instrumentem pozbawionym ryzyka. Czas wzorcowy jest wielkością bezwymiarową, gdyż różniczkowa stopa wzrostu ma wymiar

---

<sup>2</sup>cena  $c_S(\tau)$  wyróżnionego instrumentu wzorcowego posłużyła nam do konstrukcji czasu wzorcowego, teraz zaś mamy do czynienia z ceną  $c(\tau)$  dowolnego elementu ze zbioru  $I$

będący odwrotnością astronomicznej jednostki czasowej. Własność ta umożliwia m.in. późniejsze przyjęcie założenia o niezmienniczości osiągalności instrumentów finansowych przy obrotach ich wykresów względem ustalonego układu odniesienia.

Z definicji (3.1) i (3.2) wynika, że

$$t(\tau) = \ln c_S(\tau) - \ln c_S(\tau_0),$$

więc np. wykresy

- instrumentu wzorcowego,
- pieniądza,
- instrumentu zmieniającego swą cenę w specyficznym okresie stałej ceny instrumentu wzorcowego,
- pieniądza w układzie odniesienia, w którym zamieniliśmy role instrumentów określonych jako pieniądź i instrument wzorcowy,

będą leżeć odpowiednio na prostych

- $y - t = 0$ ,
- $y = 0$ ,
- $t = 0$ ,
- $y + t = 0$ .

Postać ostatniego z przytoczonych równań prostych wynika z symetrii względem inwersji czasu wzorcowego tzn. ze spostrzeżenia, że gdy cena instrumentu wzorcowego wyrażona w jednostkach pieniężnych jest  $c_S$ , to odpowiadająca jej cena pieniądza, wyrażona w jednostkach instrumentu wzorcowego, wynosi  $\frac{1}{c_S}$  oraz z własności logarytmu liczby odwrotnej  $\ln \frac{1}{c_S} = -\ln c_S$ . Prosta ta jest także symetryczna do prostej  $y - t = 0$  względem osi  $t = 0$ , co oznacza, że te części wykresów, które leżą na niej, obrazują zyski z pozycji krótkiej zajętej względem instrumentu wzorcowego, a rozliczanej w pieniądzu.

## § 2. *Osiągalność instrumentu finansowego*

Nic nie stoi na przeszkodzie, aby prócz wykresów instrumentów finansowych rozważać wykresy dowolnych dóbr, dla których znamy ewolucję czasową wykazywanych przez podmiot rynkowy funkcji ich użyteczności o własnościach omówionych w rozdziale poświęconym dwoistości konwencji kredytowania (część druga rozprawy). Instrumenty finansowe mają jednak tę zaletę, że są wyceniane przez rynek, więc kształt ich wykresów ma charakter obiektywny — ich ceny są wynikiem funkcjonowania mechanizmów rynkowych, niezależnych od subiektywnych emocji i poglądów.



Nazwijmy *zbiorem instrumentów prostych*  $I_0$  rodzinę tych instrumentów finansowych  $I_0 \subset I$ , których wykres w ustalonym układzie odniesienia jest odciukiem prostej opisanej równaniem

$$(3.3) \quad at + by + 1 = 0,$$

gdzie  $t = t(\tau)$  i  $y = y(\tau)$ . W dalszych rozważaniach moglibyśmy uwzględnić także pozostałe proste, które przechodzą przez początek układu współrzędnych, jednak ich każdorazowe odrębne omawianie spowodowałoby utratę przejrzystości rozważań, nie wpływając na końcowe wnioski. Wystarczy nam zauważyć, że spełnianie przez ów pęk własności, jakie zostaną wykazane dla reszty (prawy wszystkich) prostych instrumentów finansowych, wynika choćby z założenia o symetrii euklidesowej<sup>3</sup>, jakiej poniżej wymagamy od przestrzeni wykresów instrumentów finansowych, obserwowanych względem wybranego układu odniesienia. Tak więc, abstrahując od parametrów czasu astronomicznego, które cechują okres posiadania instrumentu prostego przez podmiot rynkowy, instrument ten możemy scharakteryzować parą liczb reprezentujących w określonym układzie odniesienia jego współrzędne  $w_p := (a, b)$ . To czy dany instrument finansowy jest prosty, czy nie, zależy od wyboru układu odniesienia.

Za miarę *osiągalności instrumentu finansowego* na przedziale czasowym  $[t_1, t_2]$  przyjmijmy ilość  $V$  przecięć jego wykresu ze zbiorem  $I_0$

$$(3.4) \quad V = \int_{\leq 1} d\mu + \int_{\leq 2} d\mu + \int_{\leq 3} d\mu + \dots,$$

gdzie  $\int_{\leq k} d\mu$  oznacza miarę (ilość) prostych przecinających wykres instrumentu finansowego przynajmniej  $k$  razy.

---

### § 3. Co mierzy osiągalność?

---

<sup>3</sup>przyjętego założenia o euklidesowej symetrii nie będziemy uzasadniać (to ambitne dla matematyki finansowej zadanie wymaga odrębnego opracowania). Prezentowane tu rozważania ograniczają się do uzyskania postaci miary osiągalności, która wynika z owego założenia.

Przy ustalonym *modus operandi* podmiotu rynkowego, będącego aktualnym właścicielem instrumentu finansowego, możliwość utracenia instrumentu w przyszłości jest wprost proporcjonalna do miary możliwości pozbycia się tego instrumentu w określonym przedziale czasowym, czyli zależy liniowo od jego osiągalności. Jest tak, gdyż częstość z jaką coś tracimy jest także miernikiem liczby okazji ku temu. Jeśli założymy, że podmiot działa racjonalnie, to wówczas taką miarę możliwości utracenia pożądanego dobra rynkowego możemy utożsamić z ryzykiem jego posiadania. Z tego powodu osiągalność stanowi naturalną miarę ryzyka finansowego.



W poszerzonym i zaktualizowanym wydaniu *Słownika wyrazów bliskoznacznych* [slo98] przymiotnik *osiągalny* zaopatrzonej jest w odsyłacz do synonimu *tani*, zaś w analogicznej sytuacji tezaurs procesora tekstu *Word* firmy *Microsoft* odsyła nas do wyrazu *dostępny*. Jednakże zastąpienie osiągalności terminem dostępność nie wydaje się trafne, gdyż ten, choć częściej spotykany w słownikach, kojarzy się z prostotą, patrz [Dor69], a proste wykresy okazują się najmniej osiągalne<sup>4</sup>. Ryzykowny (osiągalny) walor rynkowy jest łatwy do zdobycia, lecz przez to niechciany. Słowo *osiągalność* oddaje więc dobrze sens wprowadzonej w bieżącym paragrafie definicji tego pojęcia w odniesieniu do instrumentu finansowego. Tak mierząca ryzyko wielkość ma relatywny charakter — zależy od arbitralnego sposobu wskazania układu odniesienia służącego do opisu zachowań kursów cenowych dowolnych walorów finansowych.

Przypadkowo wylosowana prosta ma znacznie większą szansę przecinać wielokrotnie kawałek wykresu postrzępiony, czy o licznych zakolach, niż wygładzony, o przebiegu regularnym. Przy statystycznej interpretacji ryzyka jako dyspersji, zmiennej losowej o dużym rozrzucie (a więc dużej wariancji) przypisujemy duże ryzyko. Zgodnie z taką ideą większa osiągalność instrumentu powinna (przy niezmienionej stopie zwrotu) odpowiadać większemu ryzyku towarzyszącemu jego posiadaniu. Psychologicznie tłumaczy się to zwiększoną obawą aktualnego właściciela „siedzącego” na instrumencie przed jego „zrzuceniem”. Istnieje także następujący obiektywny powód takiej interpretacji ryzykownego instrumentu. Choć osiągalność czyli miara okazji wejścia w taki instrument (zamienienia innego instrumentu na właśnie ten) jest duża, to równa jest ona mierze wyjścia z niego, więc nie brakuje sposobności, by go utracić. Dlatego, jeśli instrument taki jest zyskowny, zwiększenie jego osiągalności powoduje zwiększenie

<sup>4</sup>co zostanie pokazane niżej w paragrafie 6

ryzyka jego utraty, co ma negatywne konsekwencje dla właściciela. Dla określonego inwestora instrument o dwukrotnie większej osiągalności stwarza dwa razy więcej pokus jego sprzedaży. Należy podkreślić, że własność ta jest unikalną cechą osiągalności, nie występującą w przypadku standardowego określania ryzyka przy użyciu dyspersji. W przypadku strat których nie potrafimy uniknąć duża osiągalność instrumentu jest pożądanym zjawiskiem. Wydaje się, że w okresach hossy dobrze jest posiadać instrumenty o małej osiągalności w pozycji długiej, bądź (jeżeli to konieczne) w pozycji krótkiej instrumenty łatwo osiągalne. Inwersja układu odniesienia pociąga za sobą odpowiednie przeformułowanie tych spostrzeżeń dla okresów bessy. I tak np. w trakcie bessy na WGPW, gdy niemożliwy był zakup odpowiednich warrantów, czy krótka sprzedaż, najmniej stratnymi na parkiecie inwestorami okazali się posiadacze ryzykownych akcji — trudność z utrzymaniem ich posiadania stała się w czasach dominacji rynku niedźwiedzia zaletą tych papierów.

---

#### § 4. Euklidesowa niezmienniczość miary prostych

Znajdźmy miarę, której wartość pozostaje niezmienna w trakcie zmiany różniczkowych stóp wzrostu wszystkich prostych instrumentów finansowych o dowolną stałą oraz przy zmianie momentu czasu  $\tau_0$ , względem którego instrumenty te były określone. Dla dwuwymiarowego zbioru prostych (3.3) rozważmy klasę miar różniczkowych postaci

$$1d\mu(a, b) := \rho(a, b) da db.$$

Parametryzacja (3.3) nie obejmuje prostych przechodzących przez środek układu współrzędnych, lecz nie ma to wpływu na uzyskane rezultaty, gdyż zbiór tych prostych, będący zbiorem jednowymiarowym, posiada miarę zero.

Dowolną globalną zmianę stopy, polegającą na zmianie kąta nachylenia prostych instrumentów finansowych do osi odciętych, przesunięcie początku układu współrzędnych w prawo, bądź w lewo, oraz zmianę aktywa-pasywa możemy uzyskać dzięki następującej zamianie zmiennych:

$$t = t' \cos \alpha - \sigma y' \sin \alpha + \beta, \quad y = t' \sin \alpha + \sigma y' \cos \alpha,$$

wyznaczonej rodziną parametrów  $\sigma$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  takich, że  $\sigma = \pm 1$ ,  $\alpha \in [0, 2\pi)$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$ . Pociąga ona za sobą transformację współrzędnych prostej

$$w_p = (a, b) \rightarrow (a', b'),$$

gdzie związek pomiędzy nowymi a starymi współrzędnymi ma postać

$$a' = \frac{a \cos \alpha + b \sin \alpha}{1 + a\beta}; \quad b' = \sigma \frac{b \cos \alpha - a \sin \alpha}{1 + a\beta}.$$

Jakobian tej transformacji jest równy

$$\frac{\partial(a', b')}{\partial(a, b)} = \frac{\sigma}{(1 + a\beta)^3}.$$

Spełniona jest następująca tożsamość

$$1 + a\beta = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a'^2 + b'^2}},$$

więc niezmienniczość miary

$$\begin{aligned} d\mu(a', b') &= \rho(a', b') da' db' = (1 + a\beta)^{-3} \rho(a', b') da db = \\ &= \rho(a, b) da db = d\mu(a, b) \end{aligned}$$

wymaga, aby

$$(3.5) \quad (a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}} \rho(a, b) = (a'^2 + b'^2)^{\frac{3}{2}} \rho(a', b'),$$

co implikuje poniższą postać euklidesowo niezmienniczej miary prostych

$$(3.6) \quad d\mu(a, b) = (a^2 + b^2)^{-\frac{3}{2}} da db,$$

bowiem tylko taka miara  $d\mu$  z dokładnością do nieistotnej stałej multiplikatywnej spełnia warunek (3.5).

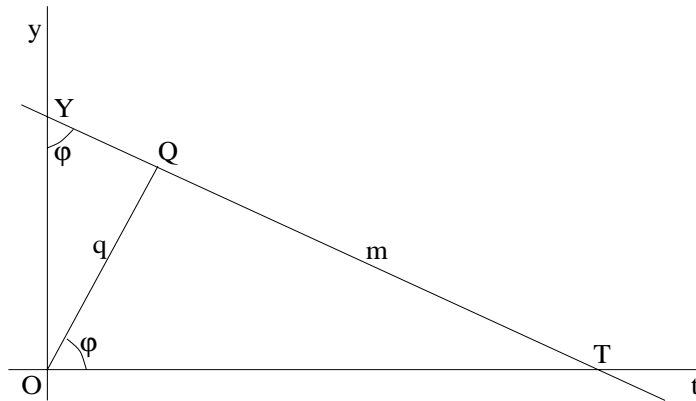
### § 5. Współrzędne biegunowe prostej



Sparametryzujemy prostą  $m$  (patrz rysunek 3.1), której parametry określają jej równanie (3.3), przy pomocy biegunowego układu współrzędnych. Zazwyczaj w oznaczeniach współrzędnych biegunowych występuje para liter  $r, \varphi$ . W celu uniknięcia kolizji ze standardem symbolizowania stopy procentowej, niech litera  $q = |OQ|$  oznacza odległość prostej  $m$  od środka układu współrzędnych  $O$ <sup>5</sup>, zaś  $\varphi$  niech będzie kątem pomiędzy osią odciętych a odcinkiem  $OQ$ . Tak określone współrzędne biegunowe prostej, w kontekście obrazowania krzywych przy pomocy zbiorów prostych przecinających te krzywe, nazywane są współrzędnymi croftonowskimi. Tworzą one *rurę Croftona*<sup>6</sup>  $\mathbb{P}^2$ , czyli zbiór będący iloczynem kartezjańskim domkniętej półprostej i okręgu.

<sup>5</sup>tzn. euklidesową długość odcinka prostopadłego do  $m$  i zaczepionego w środku układu

<sup>6</sup>gdymy badamy własności różniczkowe funkcji określonych na zbiorze prostych  $\mathbb{P}^2$ , to wygodnie jest zamiast  $\mathbb{P}^2$  rozważać iloczyn kartezjański prostej i okręgu  $\mathbb{R} \times S$  (który dwukrotnie nakrywa  $\mathbb{P}^2$ ) oraz określone na tym iloczynie funkcje  $f(q, \varphi)$  spełniające własność  $f(q, \varphi) = f(-q, \varphi + \pi)$



Rysunek 3.1. Współrzędne croftonowskie prostej.

W nowych współrzędnych równanie prostej (3.3) jest następujące

$$t \cos \varphi + y \sin \varphi = q,$$

więc taka zamiana zmiennych-parametrów prostych

$$a = -q^{-1} \cos \varphi, \quad b = -q^{-1} \sin \varphi,$$

gdzie  $q^{-1} = \sqrt{a^2 + b^2}$ , o jacobianie  $\frac{\partial(a,b)}{\partial(q,\varphi)} = q^{-3}$  daje na rurze Croftona płaską postać miary niezmienniczej prostych, bowiem korzystając z zależności (3.6) otrzymamy poniższy rezultat

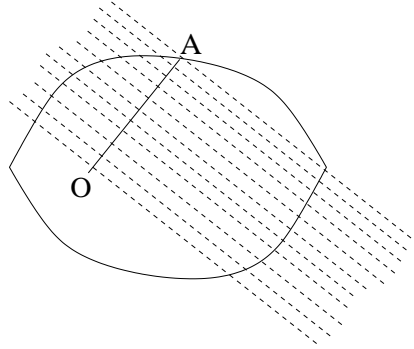
$$\begin{aligned} \mu(a, b) &= (a^2 + b^2)^{-\frac{3}{2}} da db = q^3 \frac{\partial(a, b)}{\partial(q, \varphi)} dq d\varphi = \\ &= dq d\varphi = \mu(q, \varphi). \end{aligned}$$

W paragrafie 1 *Uzupełnień* zamieszczone są rysunki z wykresami trzech popularnych krzywych przedstawionych nie, jak to zwykle się robić, we współrzędnych  $(t, y)$ , lecz we współrzędnych croftonowskich  $(q, \varphi)$ .

## § 6. Formuła Croftona

Rozważmy gładki fragment wykresu instrumentu finansowego który jest łukiem, czyli ograniczoną, różną od prostej krzywą taką, że dowolna przecinająca ją prosta ma z nią najwyżej dwa punkty wspólne. Wyznamy osiągalność dla takiej krzywej. W tym celu uzupełnimy łuk doklejając do niego jego obraz otrzymany względem symetrii środkowej (jedna z symetrii grupy euklidesowej). Jeżeli do pomiaru osiągalności tak otrzymanego brzegu obszaru wypukłego

użyjemy miary niezmienniczej względem grupy symetrii euklidesowych, wtedy osiągalność tego brzegu będzie dwa razy większa od osiągalności pojedynczego łuku (który występuje w naszej konstrukcji dwukrotnie). Wynika to z własności addytywności miary. Dokonajmy transformacji euklidesowej tak, by środek układu współrzędnych znajdował się we wnętrzu obszaru wypukłego. Wybierzmy dowolny punkt  $A$  na jego brzegu, o współrzędnych  $(q, \varphi)$ , gdzie  $q = |OA|$  i rozważmy takie proste, których pierwsza ze współrzędnych biegunowych  $q'$  jest mniejsza niż  $q$ , a druga równa jest  $\varphi$ . Na rysunku 3.2 zaznaczono je liniami przerywanymi.



Rysunek 3.2. Wyznaczanie osiągalności podwojonego łuku.

Wkład tych prostych, określonych dla infinitezymalnego przyrostu współrzędnej  $\varphi$ , do osiągalności brzegu obszaru wypukłego wynosi

$$(3.7) \quad \int_{\leq 1} d\mu + \int_{\leq 2} d\mu = 2 \int_{\leq 2} d\mu = 2 d\varphi \int_0^{q(\varphi)} dq' = 2 q(\varphi) d\varphi,$$

ale  $q(\varphi) d\varphi$  jest euklidesową długością fragmentu brzegu zawartego w kącie  $d\varphi$ , więc w wyrażeniu (3.7) całka względem  $\varphi$  od 0 do  $\pi$  (wtedy uwzględnimy wkład wszystkich prostych do osiągalności) jest długością brzegu obszaru wypukłego. Składając łuk krzywej z wypukłych kawałków i zauważając, że długość całego łuku równa jest sumie długości tych kawałków dochodzimy do wniosku, że osiągalność (3.7) takiego łuku równa jest jego długości

$$(3.8) \quad V = \int dl.$$

Przypomnijmy, że prosty instrument finansowy charakteryzuje się stałym (w tempie czasu wzorcowego) wzrostem wartości względem pieniądza. Naturalnym staje się teraz wniosek, że jest on najmniej ryzykowny, bo najtrudniej (najmniej) osiągalny w klasie instrumentów dających jednakowe zyski w określonym

przedziale czasowym. Jest on ksenofobiczny — spośród walorów o takiej samej dochodowości wykazuje najmniejszą skłonność do zmiany właściciela<sup>7</sup>.

### § 7. Wykresy o nieskończonej długości

Wzór Croftona (3.8) jest słuszny dla wszystkich łuków, dla których szereg (3.4) jest zbieżny — łuki o tej własności nazywamy prostowalnymi. Jeżeli w dowolnie małym ustalonym otoczeniu krzywej zmodyfikujemy jej kształt, to możemy doprowadzić do dowolnego wzrostu jej długości. Ów paradoks jest bezpośrednim wynikiem nieciągłości tego funkcjonału i stanowi przyczynę wielu praktycznych niedogodności [Ste54, Ste89, Per58]. Krzywymi o łukach nieprostowalnych są krzywe fraktalne. W skończonych obszarach ich osiągalność jest rozbieżna. Jednak i wtedy możemy określić skończoną miarę na krzywej modyfikując definicję osiągalności przez ustalenie rzędu  $n$  na którym decydujemy się obciążyć szereg (3.4). Osiągalność  $V_n$  określona jest teraz wzorem

$$V_n = \int_{\leq 1} d\mu + \int_{\leq 2} d\mu + \dots + \int_{\leq n} d\mu.$$

W podanych w paragrafie 1 *Uzupełnień* przykładach obrazów krzywych jako obszarów na rurze Croftona osiągalności  $V_1$  odpowiadają fragmenty rysunków charakteryzujące się jednakowym stopniem szarości. Takie ograniczenie liczby zliczanych przecięć wykresu instrumentu finansowego z instrumentami prostymi jest praktyczne nie tylko z powodów rachunkowych. Wydaje się, że realistyczne jest uwzględnienie w definicji osiągalności takiej skończonej liczby możliwości zbycia instrumentu finansowego. W skończonych okresach czasowych mierzymy jedynie ograniczoną z góry ilość potencjalnych możliwości sprzedaży (czy nabycia) instrumentu. Jednak nawet w przypadku rezygnacji z bezpośredniego posługiwania się obciążoną osiągalnością możemy wybrać za wzorzec długości krzywą fraktalną o szczególnych własnościach i choć dla niej otrzymamy  $\lim_{n \rightarrow \infty} V_n^{\text{wzorzec}} = \infty$ , to wyznaczanie długości innych fraktali względem tego wzorca przez obliczenie granicy

$$(3.9) \quad \nu := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{V_n}{V_n^{\text{wzorzec}}}$$

<sup>7</sup>jeśli przyjmujemy, że podmioty rynkowe zachowują się racjonalne, to ich strategie są w pełni zdeterminowane, w przeciwieństwie do kształtujących się swobodnie cen instrumentów finansowych. Przy takim spojrzeniu na rynek to nieprzewidywalnie wyceniany instrument de facto "decyduje" o zmianie swojego właściciela, zaś racjonalny inwestor zmuszony jest do najkorzystniejszego wyboru. Oczywiście na rynku mogą działać inwestorzy nieracjonalni, ale oni nas tu nie interesują.

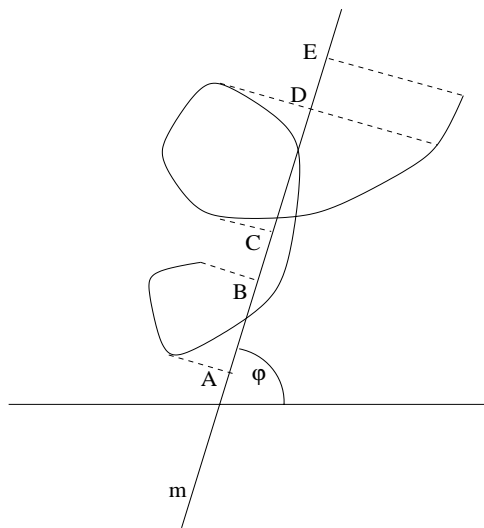
może prowadzić do wartości skończonych. W ten sposób pojęcie osiągalności obejmuje dowolnie szeroką klasę wykresów instrumentów finansowych o dowolnie skomplikowanych kształtach krzywych.

### § 8. Średnia długość rzutu na prostą

Hugo Steinhaus [Ste54] zwrócił uwagę na związek formuły Croftona z zależnością między długością łuku, a przeciętną wartością długości jego cienia, jaki tworzy się przy rzucie prostopadłym na prostą. Doprowadziło go to do konstrukcji *longimetru* — przyrządu do pomiaru długości krzywych empirycznych (np. drogi czy rzeki na mapie, czy linii obserwowanej pod mikroskopem) [Ste89, Per58]. Na płaszczyźnie euklidesowej długość rzutu prostopadłego dowolnego odcinka o długości  $l$  na pewną prostą, z którą tworzy on kąt  $\varphi$ , wynosi  $l |\cos \varphi|$ , więc przeciętna długość jego cienia jest równa:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} l |\cos \varphi| d\varphi = \frac{2}{\pi} l.$$

Przedstawiając krzywą w postaci sekwencji infitezymalnie małych odcinków stwierdzamy, że np. na rysunku 3.3 długość rzutu krzywej na prostą  $m$  wynosi



Rysunek 3.3. Wyznaczanie długości krzywej na podstawie średniej długości jej cienia.



$$(3.10) \quad d(\varphi) = |AB| + |AD| + |CD| + |CE| = 2|AB| + |BC| + 3|CD| + |DE|.$$

Wynikająca z powyższych rozważań długość łuku krzywej jest więc stałą częścią przeciętnej wartości długości jej cienia na przypadkowo wybranej prostej

$$V = \frac{\pi}{2} E(d(\varphi)),$$

gdzie dla segmentów łuku, których cienie się nakładają, powinniśmy uwzględnić w rachunku ich krotność (analogicznie jak przy wyznaczaniu osiągalności), co zostało uwzględnione we wzorze (3.10).

Przedstawioną tu metodę wyznaczania długości krzywej zasugerował jeszcze w 1812 roku P.S. Laplace [Ste54]. Pozwala ona na wyrażenie długości sparymetryzowanej krzywej za pomocą podwójnej całki

$$\int_{\tau_0}^{\tau_1} \sqrt{\left(\frac{dx(\tau)}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dy(\tau)}{d\tau}\right)^2} d\tau = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \int_{\tau_0}^{\tau_1} \left| \frac{dx(\tau)}{d\tau} \cos \varphi + \frac{dy(\tau)}{d\tau} \sin \varphi \right| d\varphi d\tau.$$

Powyższy wzór można już znaleźć w pracach Cauchy'ego<sup>8</sup>. Pamiętać jednak należy, że ten sposób wyznaczania osiągalności jest poprawny jedynie w przypadku euklidesowo symetrycznej miary prostych instrumentów finansowych.

## § 9. Czas finansowy

Niejasnym dla autora jest popularne przekonanie, że wzorec astronomiczny stanowi naturalną miarę tempa upływu czasu w finansach. Jest niewątpliwie praktyczny (i praktykowany), choć na pewno nie charakterystyczny dla zjawisk finansowych. Oczywiście określa on wszelakie cykle fizyczne, chemiczne, czy biologiczne, jednak dla poszerzenia obszaru jego przydatności na procesy rynkowe należałoby za pomocą danych empirycznych wykazać, że np. parametry cen rynkowych posiadają specyficzną periodyczność w cyklach o jednakowej ilości godzin. Duża nieprzewidywalna zmienność wartości kontraktów terminowych prowadzi raczej do odmiennych wniosków. Ten powód oraz próba geometryzacji<sup>9</sup> przestrzeni parametrów notowań rynkowych skłoniły autora do wprowadzenia pojęcia czasu wzorcowego.

Zasadę określania układu odniesienia dla wyznaczenia konkretnego ryzyka instrumentu finansowego można stosować niezależnie

<sup>8</sup> zob. [Ste54]

<sup>9</sup> patrz rozdział 1



od pojęcia osiągalności, np. przy standardowym sposobie wyliczania ryzyka, gdyż przebieg funkcji zysku zależy od przyjętego układu odniesienia. W tych przypadkach proponowana metoda może wyjaśnić pozapsychologiczne mechanizmy odmiennej oceny ryzykowności tego samego instrumentu przez różne podmioty rynkowe. Słowo recesja oznacza cofanie się — dlaczego nie miałyby ono oznaczać cofania się w kierunku malejących wartości czasu gospodarczego (jako odpowiednio skonstruowanego czasu wzorcowego). Przy takiej interpretacji wykres cykli koniunkturalnych gospodarki prezentowałby funkcję zależności czasu gospodarczego od czasu astronomicznego. Pomiar upływu czasu wymaga obserwacji cienia wywołanego interesującym nas typem mechanizmów, a przecież już Platon pouczał, że badać możemy jedynie cienie idei.

Czas finansowy wcale nie musi być homeomorficzny z czasem astronomicznym. Jeżeli dać wiarę zwolennikom przekonań o skokowej naturze zmian czasowych podstawowych stóp procentowych, a zważywszy na mechanizmy powodujące te zmiany chyba mają oni rację, zależność pomiędzy tymi dwoma typami czasu ma charakter nieciągły. Zaproponowana wyżej definicja osiągalności jest przydatna i w takich przypadkach. Wystarczy ją stosować w ramach formalizmu opisanego w części drugiej rozprawy, w rozdziale poświęconym pojęciu *hiperstopy*. Przy założeniu euklidesowej symetrii osiągalność wykresów instrumentów finansowych jest wtedy ich długością mierzoną z pominięciem obszarów ich nieciągłości.


Warto tak wyskalować osiągalność, by najmniej ryzykowny instrument finansowy (czyli instrument prosty) miał wartość związanego z nim ryzyka posiadania równą zeru. Przy standardowym pomiarze ryzyka zabieg ów jest zbędny, gdyż dyspersja instrumentu prostego jest zerowa. W tym celu wystarczy posługiwać się miarą osiągalności względnej, będącej różnicą osiągalności instrumentu i osiągalności stosownego (przynoszącego taki sam zysk) instrumentu prostego. Osiągalność jest ekstensywnym parametrem instrumentu finansowego<sup>10</sup>. Dlatego wygodniej posługiwać się intensywnością osiągalności, tj. ilorazem osiągalności względnej do czasu wzorcowego, w jakim osiągalność ta wystąpiła. Dopiero ta


---

<sup>10</sup>gdyż powtórzenie się wykresu dwukrotnie zwiększa wartość osiągalności

liczba, będąca wskaźnikiem intensywnym, pozwala porównywać ryzyko instrumentów w różnych okresach czasowych.

Jako dualny do formalizmu oceny ryzyka instrumentów finansowych pojawia się opis pomiaru stopnia ryzyka algorytmów kupna-sprzedaży papierów wartościowych (w szczególności ryzyka portfeli).

W kontekście rozważań dotyczących geometrii rynku (rozdział 1) miara ryzyka kursowego winna być raczej konstruowana w przestrzeniach pseudoeuklidesowych. W przypadku symetrii Lorentza [BE81] osiągalność instrumentu określona jest pseudodługością jego wykresu. Uzasadnienie rezultatów analogicznych do powyżej prezentowanych wymaga jednak nietrywialnych modyfikacji i wykracza poza ramy prezentowanej książki. 

Wprowadzona definicja osiągalności w naturalny sposób uogólnia się na wykresy w  $\mathbb{R}^n$ . Umożliwia to budowę spójnej teorii ryzyka dla wielowymiarowych, złożonych procesów kapitałowych<sup>11</sup>. Można dostrzec podobieństwo pomiędzy taką teorią, a zagadnieniami optyki geometrycznej i mechaniki klasycznej [Arn81]. Najbliższym odpowiednikiem mechanicznym przypominającym prezentowane tu podejście jest problem osiągalności dla zagadnienia orbit Hohmanna [Sub74] – podstawowego typu trajektorii podróży międzyplanetarnych. Są to elipsy określone prawami Keplera, łączące dwie inne orbity zamknięte. Podróż odbywająca się po nich jest najbardziej ekonomiczna pod względem wydatkowanej energii. Związane z energią *działanie* [Arn81] jest funkcjonałem na trajektoriach, który odpowiada występującemu w tym rozdziale funkcjonałowi długości. Dlatego badanie stosownych symetrii i zasad wariacyjnych może stworzyć realną perspektywę poznania fundamentalnych równań świata finansów, a proponowany formalizm może posłużyć jako punkt wyjścia w konstruowaniu kwantowej teorii ryzyka za pomocą całek po trajektoriach [Fey80]. Nieco odmienne ujęcie tej koncepcji znajduje się w trzeciej części rozprawy, poświęconej kwantowomechanicznemu modelowi rynku. Tam obserwacja czasu staje się operacją dualną do pomiaru ryzyka, które okazuje się operatorem odpowiadającym fizycznej obserwabli energii. 

---

<sup>11</sup>patrz rozdział o stopie macierzowej w części drugiej *Dwoistości*

## Transformacja Legendre'a

*Potencjał, równanie stanu, zasady zachowania* – to charakterystyczne elementy wywodzące się z fizyki zestawu powiązanych ze sobą terminów. Jego wyjaśniającą funkcję odkryli przed 150 laty twórcy w pełni dojrzałej matematycznie, a zarazem na wskroś fenomenologicznej teorii zjawisk cieplnych, zwanej *termodynamiką równowagową*. Z nowej metody opisu zjawisk zdołali bezbłędnie wysnuć prawa przyrody, których mechanizmy wyjaśniono dopiero 50 lat później. Termodynamika posługuje się tradycyjną geometrią różniczkową, w ramach której formułuje nierzadko zdumiewające swą prostotą tożsamości i twierdzenia. Równoległe z wywodem rachunkowym ówczesni eksperymentatorzy weryfikowali metodami empirycznymi otrzymywane często przez siebie wzory.

Jeżeli równowagę ekonomiczną charakteryzujemy jako brak niedoborów i nadwyżek, to z punktu widzenia rachunkowego mamy do czynienia z pewnym (stwierdzającym ten fakt) równaniem bilansu, którego postać całkowita pozwala na eliminację z przestrzeni parametrów ekonomicznych jednego z nich (stającego się funkcją pozostałych). Redukcji tej można dokonać zwykle przez wyróżnienie dowolnego z parametrów. Jednak geometryczny obraz opisanej równaniem bilansu podprzestrzeni  $\mathcal{B}$  (stanu równowagi) w przestrzeni parametrów ekonomicznych pozostanie na skutek tej zamiany współrzędnych niezmienny. W tym sensie to nie algebraiczny zapis, lecz geometria odzwierciedla ekonomiczne własności przedmiotu badań statyki równowagowej. Nie liczby, lecz zachodzące między nimi symetrie obrazują pełnię matematycznie modelowanego kontekstu ekonomicznego. Sytuacja ta przypomina do złudzenia termodynamikę, w której równaniu bilansu infinitezymalnych przepływów odpowiada pierwsza zasada termodynamiki, a równaniu bilansu skumulowanych dzięki przepływowi środków – równanie stanu. Spróbujmy precyzyjnie zrozumieć pewne elementarne zagadnienia znane ze statyki równowagowej, przez posługiwanie się ujęciem metodologicznym oraz techniką rachunkową charakterystyczną dla termodynamiki.

Większość pojawiających się w rozdziale równań opisujących prawa zachowania i algebraicznych tożsamości to równania bilansu przepływów<sup>1</sup> bądź środków, których poziom jest wypadkową przepływów. Tego typu równania autor starał się zapisywać w jednolitej konwencji, ułatwiającej ich czytelność

w trakcie potencjalnie możliwej (czy zamieszczonej w tekście) interpretacji poszczególnych addytywnie występujących w nich wyrażeń. I tak, w przypadkach równań różniczkowych (przepływy) wpływy (posiadające jednakowe znaki) uwzględniamy zawsze z przeciwnymi znakami w stosunku do wydatków. W przypadkach równań funkcyjnych (środków) aktywa (o jednakowych znakach) wliczamy z przeciwnymi znakami niż pasywa. Oczywiście ujemny znak może dotyczyć zarówno wpływów (czy aktywów), jak wydatków (czy pasywów) – wszystko zależy od punktu widzenia sporządzającej bilans osoby (zysk, czy strata) oraz od przyjętej zasady uwzględniania kierunku upływu czasu (np. oprocentowanie, czy dyskonto). W opisywanej tu klasie procesów kategoria czasu nie występuje *explicite*, jednak jest nieodzowna dla uściślenia kierunku opisywanych zmian. Szerszą analizę zagadnień dotyczących uwag poczynionych w ostatnich zdaniach można odnaleźć w artykule [Pio99b].

Kluczową rolę w poniższej analizie gra inwolucja Legendre’a, bowiem daje receptę poprawnego sformułowania odpowiednika bilansu księgowego właściwego konkretnemu modelowi. Przy tym nieodzowne okazuje się znalezienie transformaty Legendre’a wyróżnionego parametru ekonomicznego zwanego w geometrii różniczkowej potencjałem. Idea inwolucji Legendre’a wywodzi się jeszcze od G. W. Leibniza [Enc97] i prawdopodobnie przed zastosowaniami termodynamicznymi z powodzeniem używano jej w statyce, która w tamtych czasach była jedynie gałęzią mechaniki. Jednak potem, zapominając o owych aplikacjach, zaadoptowano to przekształcenie dla potrzeb dynamiki. Obecnie, przy okazji omawiania transformacji Legendre’a, nawet tacy luminarze mechaniki jak Herbert Goldstein [Gol57] odwołują się do przykładów termodynamicznych. Mając na względzie szczególne znaczenie, jakie równania bilansu grają w teorii ciepła, można zaryzykować tezę, że pierwowzory omawianych tu idei pochodzą z rachunkowości. Teorii ciepła zawdzięczamy przede wszystkim uwydatnienie roli, jaką różne typy potencjałów grają w analizie układów pozostających w stanie równowagi.

Prócz praw zachowania parametrów ekonomicznych i towarzyszących prawom terminów w końcowej partii tekstu pojawiają się odpowiadające im *pseudopojęcia*. Są to obiekty teorii podobne do swych nieułamnych odpowiedników, jednak ich istnienie ma charakter wtórny. Nabierają znaczenia dopiero po określeniu prawa zachowania charakteryzującego model ekonomiczny. Pseudopojęcia można zidentyfikować w kontekście zasad (praw zachowania) opisujących stan równowagi, które przyjmujemy poprzez wybór modelu, a więc apriorycznie. Ułamne w jednym, mogą stać się pełnoprawnymi składnikami innego modelu.

---

<sup>1</sup> takich, jak: operacja kupna, spłata kredytu, wypłata dywidendy, zmiana wartości obligacji spowodowana ruchem stóp procentowych, reorientacja funkcji produkcji, komasacja, arbitraż cenowy, przemieszczenie wzdłuż krzywej obojętności itp.

### § 1. Hiperpowierzchnia stanu równowagi

Rozważmy  $(N+1)$ -wymiarową rzeczywistą przestrzeń  $\mathbb{R}^{N+1}$  parametrów ekonomicznych  $p_0, p_1, \dots, p_N$ . Mogą nimi być np. składniki majątku, ceny rynkowe, różnookresowe stopy procentowe, wysokości świadczeń emerytalnych, wydatki konsumenta, wielkości nakładów i produkcji itd. Zdefiniujemy *przestrzeń stanu równowagi*  $\mathcal{B}$  jako  $N$ -wymiarową hiperpowierzchnię zadaną w  $\mathbb{R}^{N+1}$  liniowym równaniem różniczkowym pierwszego rzędu (tzw. *prawem zachowania parametru*  $p_0$ ) o postaci<sup>2</sup>

$$(4.1) \quad \sum_{\mu} \pi_{\mu}(p_1, \dots, p_N) dp_{\mu} = 0.$$

Dla jednoznaczności rozwiązania uzupełniamy je stosownym warunkiem brzegowym  $(p_0^*, p_1^*, \dots, p_N^*) \in \mathcal{B}$ . Równanie (4.1) posiada szczególną cechę. Współczynniki  $\pi_{\mu}(p_1, \dots, p_N)$  nie są funkcjami jednego z parametrów ekonomicznych, który figurując w nazwie prawa zachowania wyróżniony jest indeksem zerowym. Ten parametr  $p_0$  nazywamy *potencjałem*. Pozostałe parametry  $p_1, \dots, p_N$  nazywamy *parametrami stanu*. Interesującym nas obszarem zainteresowania ekonomii będą teorie, które po odpowiednim wyborze parametrów ekonomicznych, często poprzedzonym ich stosowną nieliniową transformacją prowadzą do równania (4.1).

W modelach statyki porównawczej interesujemy się różnymi możliwościami zmiany parametrów w równowadze, prowadzącymi od jednego dopuszczalnego zbioru parametrów ekonomicznych do drugiego. Posługując się opisem infinitezymalnych zmian o postaci (4.1) generujemy, przy pomocy rachunku całkowego, krzywe (trajektorie) zawarte w  $\mathcal{B}$ , przebiegające przez dozwolone w równowadze zestawy parametrów ekonomicznych. Wychodząc od aspektów lokalnych zanurzenia hiperpowierzchni  $\mathcal{B}$  w  $\mathbb{R}^{N+1}$ , dochodzimy do poziomu pośredniego, na którym możemy porównywać warunki ekonomiczne panujące na trajektoriach dozwolonych zmian czynników ilościowych. Opis globalny możliwych zmian parametrów jest zazwyczaj zbędny. Ekonomistów nie interesuje, czy przestrzeń  $\mathcal{B}$  jest spójna, jak wygląda jej brzeg, czy posiada dziury, bądź rączki. Ekonomiczne modele dotyczą raczej aspektów zanurzenia  $\mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^{N+1}$ , a nie wewnętrznych właściwości przestrzeni  $\mathcal{B}$ . Dlatego topologiczną charakterystykę opisu hiperpłaszczyzny  $\mathcal{B}$  możemy zignorować, przyjmując dla wygody założenie, że przestrzeń ta jest homeomorficzna z  $\mathbb{R}^N$ . Wyłączywszy z  $\mathcal{B}$  punkty

<sup>2</sup>poniższy zapis uwzględnia obowiązującą w całej książce konwencję, że wskaźnik będący grecką literą (np.  $\mu$ ) przebiega wartości  $0, 1, \dots, N$ , w odróżnieniu od wskaźnika łacińskiego przyjmującego tylko wartości  $1, 2, \dots, N$

osobliwe, równanie (4.1) możemy przepisać w następującej formie

$$(4.2) \quad dp_0 + \sum_k c_{k0}(p_1, \dots, p_N) dp_k = 0,$$

gdzie

$$(4.3) \quad c_{k0}(p_1, \dots, p_N) := \frac{\pi_k(p_1, \dots, p_N)}{\pi_0(p_1, \dots, p_N)}.$$

Postać (4.2) równania (4.1) separująca zmienną  $p_0$  po całkowaniu daje jej jawny opis jako funkcji zależnej od pozostałych parametrów stanu. W ten sposób scałkowanie równania (4.2) (zawsze wykonalne, gdyż  $\mathcal{B}$  jest homeomorficzna z  $\mathbb{R}^N$ ) prowadzi do wyznaczenia przestrzeni stanu równowagi przy pomocy równania więzów (równania funkcyjnego) zwanego równaniem stanu. Równanie to najprościej przedstawić w następującej formie, eliminującej potencjał  $p_0$  ze zbioru parametrów niezbędnych do jednoznacznego określenia dozwolonego położenia modelowanego układu w stanie, w jakim się on znajduje

$$(4.4) \quad p_0 + f(p_1, \dots, p_N) = 0.$$

Prawo zachowania (4.2), będąc równaniem lokalnym (różniczkowym), opisuje infitezymalne zmiany w otoczeniu każdego z punktów przestrzeni stanu równowagi. Z ekonomicznego punktu widzenia jest ono bilansem przepływów pomiędzy rezerwuarami środków (np. dóbr, cen, stóp procentowych itd., ale też długów, czy podatków, gdyż przyjmujemy tu, że zobowiązania należy kwalifikować jako ujemne środki), których ilości charakteryzują parametry  $p_\mu$ . Funkcje  $c_{k0}(p_1, \dots, p_N)$  są *współczynnikami intensywności* informującymi jaka ilość środka wyznaczającego potencjał równowagi przepływu jednostki środka o indeksie  $k$ . Natomiast równanie stanu (4.4) opisujące dozwoloną ekonomicznie podprzestrzeń parametrów w  $\mathbb{R}^{N+1}$  ma, w kontekście skal czasowych, charakter globalny, jest bilansem stanu rezerwuarów nagromadzonych w wyniku przepływów środków cechujących proces ekonomiczny.

## § 2. Tożsamości dla współczynników intensywności

Jeżeli na potencjał spojrzymy jak na funkcję parametrów stanu  $p_k$ , to równanie (4.2), określające różniczkę zupełną  $p_0$ , wyznacza kolejne pochodne cząstkowe tej funkcji

$$(4.5) \quad c_{k0}(p_1, \dots, p_N) := \frac{\pi_k}{\pi_0} = -\frac{\partial p_0(p_1, \dots, p_N)}{\partial p_k}.$$



Zadają one wartości współczynników kierunkowych hiperpłaszczyzny, w zadanym punkcie stycznej do rozmaitości  $\mathcal{B}$  stanu równowagi. Dlatego hiperpłaszczyzny te wyznaczają w przestrzeni parametrów ekonomicznych dopuszczalne kierunki zmian tych parametrów przy przejściu z jednego do drugiego zbioru ich równowagowych wartości. Dekompozycji zbioru parametrów ekonomicznych na potencjał i parametry stanu często możemy dokonać na wiele sposobów, więc decyzja o tym, który z parametrów nie zostanie uwzględniony w zbiorze niezależnych wielkości opisujących stan równowagi jest arbitralna i poddyktowana jedynie wygodą opisu modelowanych zjawisk. W sytuacji wyboru innego parametru ekonomicznego  $p_\mu$  jako potencjału, należy uogólnić definicję (4.3) na pary indeksów  $k, \mu$ . Uogólnienie to na postać

$$c_{k\mu} := \frac{\pi_k}{\pi_\mu} = \frac{\partial p_\mu(p_0, p_1, \dots, p_{\mu-1}, p_{\mu+1}, \dots, p_N)}{\partial p_k},$$

gdzie indeks  $k$  przebiega wskaźniki różne od wskaźnika  $\mu$  numerującego aktualny potencjał. Definiując  $c_{\mu\mu} := 1$  otrzymamy ciąg tożsamości spełnianych przez funkcje, zwanych *regułami łańcuchowymi* [Chi94]

$$(4.6) \quad c_{\mu\nu} = c_{\mu\rho} c_{\rho\nu},$$

których szczególnym przypadkiem jest własność

$$c_{\mu\nu} = c_{\nu\mu}^{-1}.$$

Reguły tożsame z (4.6) pojawiły się już w rozdziale 1<sup>3</sup> i dotyczą każdej liniowej funkcji użyteczności<sup>4</sup>.

Jeżeli pochodne cząstkowe  $\frac{\partial c_{\mu\rho}}{\partial p_\nu}$  oraz  $\frac{\partial c_{\nu\rho}}{\partial p_\mu}$  są funkcjami ciągłymi na hiperpłaszczyźnie stanu równowagi, która została sparametryzowana zmiennymi  $p_0, p_1, \dots, p_{\mu-1}, p_{\mu+1}, \dots, p_N$ , to na mocy twierdzenia Younga [Chi94] są one równe (bowiem odpowiadające im pochodne mieszane są przemienne). Tak więc możemy wypisać cały ciąg tożsamości dotyczących pochodnych cząstkowych funkcji intensywności

$$(4.7) \quad \frac{\partial c_{\mu\rho}}{\partial p_\nu} - \frac{\partial c_{\nu\rho}}{\partial p_\mu} = 0,$$

które w termodynamice noszą nazwę równań Maxwella [Ans78].

Tożsamości (4.6) i (4.7) warto stosować w przypadkach, gdy czynniki  $\pi_\mu$  czy intensywności  $c_{\mu\nu}$  posiadają bezpośrednią interpretację ekonomiczną. W prezentowanym tekście autor zamieścił jedynie przykład o stałych intensywnościach, więc dla niego równania Maxwella są trywialne.

<sup>3</sup>własność (1.2)

<sup>4</sup>patrz rozdział o dwoistościach konwencji kredytowania w części drugiej tej rozprawy



## § 3. Nowe warianty prawa zachowania

Przy opisie przestrzeni  $\mathcal{B}$  parametr stanu  $p_m$  może zostać zastąpiony parametrem określonym wartościami funkcji intensywności  $c_{m0}$ . Jest to możliwe dzięki transformacji Legendre'a [Arn81]

$$(p_1, \dots, p_N) \longrightarrow (p_1, \dots, p_{m-1}, c_{m0}, p_{m+1}, \dots, p_N).$$

Polega ona na wprowadzeniu nowego potencjału  $\bar{p}_0(\dots, c_{m0}, \dots)$ , zwanego transformacją Legendre'a funkcji  $p_0(\dots, p_m, \dots)$ , o następującej postaci

$$(4.8) \quad \begin{aligned} \bar{p}_0 &= \bar{p}_0(p_1, \dots, p_{m-1}, c_{m0}, p_{m+1}, \dots, p_N) = \\ &:= -p_0(p_1, \dots, p_N) - c_{m0}p_m, \end{aligned}$$

który dzięki takiej konstrukcji nie zależy bezpośrednio od zmiennej  $p_m$  (choć, co widać, jest funkcją m.in. zmiennej  $c_{m0}$ ), bowiem na skutek zachodzenia równości (4.5) znika pochodna cząstkowa potencjału  $\bar{p}_0$  po  $p_m$

$$\left. \frac{\partial \bar{p}_0}{\partial p_m} \right|_{c_{m0}=c_{m0}(p_1, \dots, p_N)} = - \left( \frac{\partial p_0}{\partial p_m} + c_{m0} \right) \Big|_{c_{m0}=c_{m0}(p_1, \dots, p_N)} = 0.$$

Równość (4.5) traktowana jako uwikłana postać funkcji

$$p_m = p_m(p_1, \dots, p_{m-1}, c_{m0}, p_{m+1}, \dots, p_N)$$

pozwala wyrugować zmienną  $p_m$  w wyrażeniu (4.8) definiującym potencjał  $\bar{p}_0$ . Zróżniczkowanie stron równania (4.8) prowadzi do nowego odpowiednika prawa zachowania (4.2), tym razem będącego zasadą zachowania potencjału  $\bar{p}_0$

$$\begin{aligned} d\bar{p}_0 &= \sum_k c_{k0} dp_k - c_{m0} dp_m - p_m dc_{m0} = \\ &= -p_m(p_1, \dots, p_{m-1}, c_{m0}, p_{m+1}, \dots, p_N) dc_{m0} + \sum_{k \neq m} c_{k0} dp_k. \end{aligned}$$

Dzięki takiej zamianie współrzędnych przy parametryzowaniu stanu równowagi możemy posługiwać się innym układem  $N$  zmiennych wybranych spośród elementów zbioru  $\{p_1, \dots, p_N, c_{10}, \dots, c_{N0}\}$ . Ważne jest, aby żadna para zmiennych  $p_m, c_{m0}$  o jednakowych indeksach nie występowała w nim jednocześnie. Transformację Legendre'a możemy przeprowadzić przy wyborze potencjału spośród zbioru wszystkich parametrów ekonomicznych  $p_\mu$ .

Z powyżej przedstawionych przyczyn parametry  $c_{m\mu}$  nazywamy parametrami kanonicznie sprzężonymi do odpowiadających im parametrów stanu  $p_m$ . Transformacja Legendre'a jest inwolucją, tzn. ponowne jej wykonanie na parametrze o niezmiennym indeksie jest transformacją odwrotną. Łatwo obliczyć, że w ten sposób możemy otrzymać nawet  $(N+1)2^N$  różnych, choć równoważnych sobie modeli statyki porównawczej. Jest tak, gdyż dla każdego z  $N+1$

możliwych wyborów potencjału (spośród parametrów ekonomicznych) mamy  $N$  możliwych inwolucji Legendre'a dla kolejnych parametrów stanu, które możemy wykonywać w różnych kombinacjach. W ramach termodynamiki wykorzystuje się transformację Legendre'a każdorazowo dla każdego z parametrów termodynamicznych w celu sformułowania wygodnych wariantów obowiązującego tam prawa zachowania energii. Jest nim zapisana w postaci jednego równania pierwsza i druga zasada termodynamiki. Z racji braku miejsca zastosujemy tu jedynie najdalej idący wariant transformacji, zastępujący wszystkie parametry stanu parametrami do nich sprzężonymi. Odpowiednikiem potencjału (4.8) będzie wtedy funkcja  $c_{00}$  zadana wyrażeniem

$$(4.9) \quad c_{00} = c_{00}(c_{10}, \dots, c_{N0}) := -p_0(p_1, \dots, p_N) - \sum_k c_{k0} p_k.$$

Różniczkując strony równości (4.9) i korzystając z prawa (4.2) otrzymamy jego alternatywną wersję w postaci prawa zachowania potencjału  $c_{00}$

$$dc_{00} = \sum_k c_{k0} dp_k - \sum_k (c_{k0} dp_k + p_k dc_{k0}) = - \sum_k p_k(c_{10}, \dots, c_{N0}) dc_{k0}.$$

Rozwiązanie układu  $N$  równań funkcyjnych (4.5) ze względu na każdą zmienną  $p_k$ , posiadające postać  $p_k = p_k(c_{10}, \dots, c_{N0})$ , pozwala z użyciem formuły (4.9) otrzymać zależność funkcyjną nowego potencjału  $c_{00}$  od nowych parametrów stanu (czyli od parametrów sprzężonych do parametrów stanu  $p_k$ ). Zależność ta jest nową formą równania stanu (4.4). Układ równań (4.5) może nie mieć rozwiązania, bądź mieć ich wiele. W pierwszym przypadku inwolucja Legendre'a  $(p_1, \dots, p_N) \leftrightarrow (c_{01}, \dots, c_{0N})$  nie istnieje. W drugim wystarczy wybrać do eliminacji zmiennych  $p_k$  dowolne z tych rozwiązań. Część intensywności  $c_{k0}$  w równaniach (4.5) może być stała (skrajny wariant takiego przypadku jest szczegółowo omówiony w następnym paragrafie). Uzmienniając te stałe (jak niżej) otrzymamy przejście do opisu za pomocą współczynników intensywności, jednak nie będą one parametryzować  $\mathcal{B}$  lecz opisywać przekształcenia  $\mathcal{B}$  wewnątrz  $\mathbb{R}^{N+1}$  spowodowane egzogenicznymi zmianami parametrów intensywności. Dlatego inwolucję Legendre'a  $\mathcal{T}_L$  powinniśmy traktować nie jako automorfizm  $\mathcal{T}_L : \mathcal{B} \leftrightarrow \mathcal{B}$ , lecz jako odwzorowanie zadane formułą (4.9) pomiędzy dwoma strukturami kontaktowymi [4]

$$\mathcal{T}_L : \mathbb{R}_{p_0}^{2N+1} \longleftrightarrow \mathbb{R}_{c_{00}}^{2N+1},$$

gdzie strukturę kontaktową  $\mathbb{R}_{p_0}^{2N+1}$  definiujemy jako zbiór parametrów rzeczywistych  $(p_0, p_1, \dots, p_N, c_{01}, \dots, c_{0N})$  wraz z włożeniem hiperpowierzchni  $\mathcal{B}_{p_0} \hookrightarrow \mathbb{R}_{p_0}^{2N+1}$  zadany potencjałem  $p_0(p_1, \dots, p_N)$  przy pomocy równania

$$(4.10) \quad dp_0(p_1, \dots, p_N) + \sum_k c_{k0} dp_k = 0.$$

W analogiczny sposób określamy dualną strukturę kontaktową  $\mathbb{R}_{c_{00}}^{2N+1}$ . Należy przypomnieć, że tylko jedna z funkcji jest określona niezależnie, bowiem są one, jedna do drugiej, transformatami Legendre'a. Poniższy diagram obrazuje opisywaną sytuację:

$$\begin{array}{ccc}
 (p_0, \dots, c_{10}, \dots) \in \mathbb{R}_{p_0}^{2N+1} & \xleftrightarrow{\mathcal{T}_L} & \mathbb{R}_{c_{00}}^{2N+1} \ni (c_{00}, \dots, p_1, \dots) \\
 \downarrow dp_0(p_1, \dots, p_N) & & \downarrow dc_{00}(c_{10}, \dots, c_{N0}) \\
 (p_1, \dots, p_N) \in \mathcal{B}_{p_0} & & \mathcal{B}_{c_{00}} \ni (c_{10}, \dots, c_{N0})
 \end{array}$$

Inwolucja Legendre'a umożliwia stosowanie w modelach równowagi dwoistego opisu zjawisk, w którym, z formalnego punktu widzenia, czynniki intensywności mogą pełnić rolę parametrów stanu i vice versa. Swobodny wybór między zestawami parametrów ekonomicznych  $(p_0, p_1, \dots, p_N)$  i  $(c_{0\mu}, c_{1\mu}, \dots, c_{N\mu})$  pozwala dogłębnie wnikać w charakterystyczne właściwości takich modeli. Przekształcenie Legendre'a jest często użyteczne w rachunkach mających na celu znalezienie równania stanu (jawnej postaci potencjału) przez efektywne wycałkowanie prawa zachowania, prawa występującego w formie uproszczonej dzięki tej inwolucji. Znacznie łatwiej jest zaobserwować i opisać lokalnie prawo zachowania, niż zbudować potencjał odpowiadający przepływowi zgodnym z tymi, które zamierzaliśmy uwzględnić w modelu skonstruowanym przez zadanie potencjału.

---

#### § 4. Koszyki i cenniki

Dla przedstawienia omówionego sposobu badania modeli, w trzech kolejnych paragrafach tego rozdziału zostanie zanalizowany podstawowy, a jednocześnie najprostszy nietrywialny przykład, którym jest prawo zachowania o wszystkich intensywnościach  $c_{k0}$  stałych (lub o stałych dualnych do intensywności parametrach). Przykłady pozornie bardziej skomplikowanych potencjałów przytoczone są w paragrafie siódmym.

Gdy współczynniki  $c_{k0}$  nie zależą od parametrów  $p_k$  równanie (4.2) przybiera następującą postać

$$(4.11) \quad dp_0 + \sum_k c_{k0} dp_k = 0.$$

Wybierając warunek początkowy  $p_\mu = p_\mu^*$  po scałkowaniu wszystkich separujących się składników równania (4.11) otrzymamy następujące równanie stanu

$$(4.12) \quad p_0 - p_0^* + \sum_k c_{k0}(p_k - p_k^*) = 0$$

czy, po pomnożeniu (4.12) przez  $\pi_0$ ,

$$\sum_\mu \pi_\mu (p_\mu - p_\mu^*) = 0.$$

Równanie (4.11) możemy interpretować jako równanie bilansu przepływów dóbr opisującego koszyk  $N+1$  dóbr. Występują one w koszyku odpowiednio w ilościach  $p_0, \dots, p_N$ . Jeżeli dodatnie środki  $p_\mu$  symbolizują aktywa, to ujemne wartości  $p_\mu$  dotyczą zobowiązań (bądź odwrotnie). Niech ceny rynkowe określa relacja wymiany dóbr rynkowych na dowolne (zawarte, bądź nie zawarte w koszyku) arbitralnie wyróżnione dobro. Ceny te mają charakter egzogeniczny i nie zależą od parametrów koszyka. Wtedy jednostka  $\mu$ -tego dobra jest wymieniana za (kosztuje)  $\pi_\mu$  jednostek wyróżnionego dobra. Przyjmujemy konwencję że  $p_\mu \in \mathbb{R}$  i  $\pi_\mu \in \mathbb{R}_+$ , czyli że ceny zawsze są dodatnie (lecz równie dobrze moglibyśmy założyć, że  $p_\mu \in \mathbb{R}_+$  i  $\pi_\mu \in \mathbb{R}$ ). Warto w tym miejscu uczynić jedną dygresję. Założenie o niezależności cen od współrzędnych koszyka wydaje się uniwersalne na rynkach zabezpieczonych przed mechanizmami dyktatu cenowego. Jednak wówczas też nic nie przeszkadza konstruować portfeli, których zawartość jest kształtowana w oparciu o zmiany kursów cenowych, a jeżeli  $p_\mu$  są nietrywialnymi funkcjami  $\pi_\mu$ <sup>5</sup>, to i funkcje odwrotne  $\pi_\mu$  zależą od  $p_\mu$ . Nieвозмоść wpływania na ceny (czy, w słabszym wariacie, ich przewidywania) oznacza, że przyjmując pewien algorytm kształtowania składu koszyka jedynie w zależności od ruchów cenowych tracimy możliwość bezpośredniego (niezależnego od cen) wpływania na wielkości  $p_\mu$ . Stwierdzenie „złoto potroi swą cenę gdy będę bogaty” może oznaczać jedynie, że ulokowałem poważną część swojego majątku w tym kruszcu. Zależność funkcyjna czynników ilościowych nie określa ich porządku przyczynowo-skutkowego.

Opis koszyka nie ulegnie zmianie, gdy ceny jego dóbr przedstawimy w stosunku do arbitralnie wyróżnionego dobra z koszyka (oznaczanego dalej indeksem zerowym i nazywanego jedynie z tego powodu pieniądzem). Wybór ten oznacza, że potencjałem jest ilość pieniądza w koszyku. Kursy (relatywne ceny)  $c_{k0} = \frac{\pi_k}{\pi_0}$  są intensywnościami przepływu pozostałych dóbr w koszyku względem pieniądza. Gdy koszyk nie jest dziurawy, a rynek jest zrównoważony, to wyznaczona wartość przepływów w ramach koszyka musi bilansować się do zera – strumień pieniądza  $dp_0$  jest skompensowany strumieniem niepieniężnych środków  $\sum_k c_{k0} dp_k$ . Stwierdza to prawo zachowania strumienia kapitału (4.11) wyrażone w jednostkach pieniężnych. Wyznaczony w jednostkach pieniężnych

<sup>5</sup>zob. rozdz. 1

bilans aktualnego stanu skumulowanych w koszyku przepływów (bilans środków) przedstawia równanie (4.12).

Równanie stanu (4.12) ma skutkującą ekonomicznymi konsekwencjami symetrię — transformacja skalowania oraz zamiana współrzędnych koszyka z odpowiednimi współrzędnymi cennika:

$$(4.13) \quad \begin{aligned} \lambda p_\mu &\longleftrightarrow p_\mu, \\ \pi_\mu &\longleftrightarrow p_\mu, \end{aligned}$$

nie zmieniają samego równania. Z tego powodu portfele (będące klasami proporcjonalnych do siebie koszyków) tworzą rzeczywistą przestrzeń rzutową  $\mathbb{R}P^N$ , a kursy (proporcje cen) przestrzeń dualną do niej. Więc modelem dualnym, posiadającym identyczne własności rachunkowe jak wyżej prezentowany, będzie model opisany równoważnym równaniu (4.11) prawem zachowania wartości portfela

$$(4.14) \quad dc_{00} + \sum_k p_k dc_{k0} = 0,$$

w którym potencjałem  $c_{00}$  (wielkość ta nie była jeszcze definiowana) okaże się bieżąca wartość (wartość księgową, deficyt bilansowy) portfela. Na niepieniężne komponenty portfela możemy spojrzeć jako na intensywności przepływów wartości odpowiednich składników portfela wywołanych ruchami cen.

## § 5. Podwójna księgowość

Nietrudno zauważyć, że zamiana parametrów fizycznych stanowiąca drugie z przekształceń (4.13) jest inwolucją Legendre'a. Podstawiając bowiem do wyrażenia (4.9) potencjał  $p_0$  określony równaniem stanu (4.12) otrzymamy nowy potencjał o następującej postaci

$$c_{00}(c_{10}, \dots, c_{N0}) = -p_0^* + \sum_k c_{k0}(p_k - p_k^*) - c_{k0}p_k,$$

czyli

$$(4.15) \quad c_{00} + p_0^* + \sum_k p_k^* c_{k0} = 0.$$

Parametry  $p_\mu^*$  są teraz stałe (komponenty koszyka nie ulegają zmianie), więc transformatę Legendre'a  $c_{00}(c_{10}, \dots, c_{N0})$  stanu rezerwuaru pieniężnego portfela  $p_0 = (p_1, \dots, p_N)$  należy, w oparciu o równanie (4.15), zinterpretować jako bieżącą wartość koszyka. Posługując się formułą inwolucji Legendre'a (4.9) dla

$p_\mu = p_\mu^*$  i  $c_{\mu 0} = c_{\mu 0}^*$  równanie (4.15) możemy zapisać w postaci

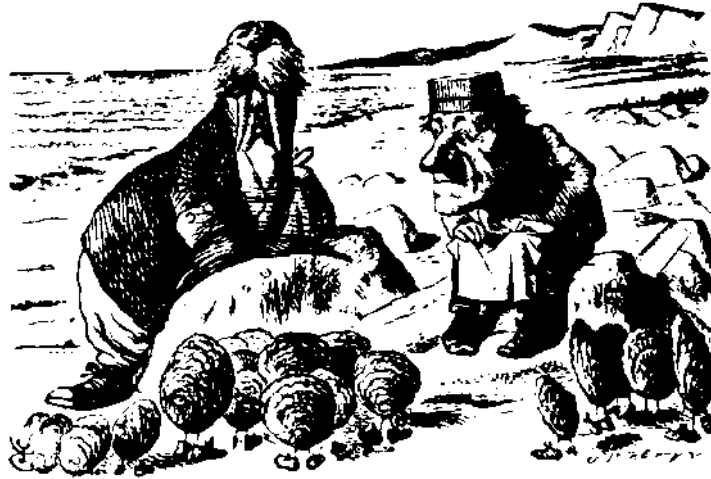
$$(4.16) \quad (c_{00} - c_{00}^*) + \sum_k p_k^* (c_{k0} - c_{k0}^*).$$

Przedstawione w tej postaci równanie stanu jest ewidentnie dwoiste do (4.12).

Przepiszmy jeszcze raz niezwykle istotną formułę inwolucji Legendre'a (4.9) uwydatniając liczbowe wartości występujących w niej funkcji

$$c_{00} + p_0 + \sum_k p_k c_{k0} = 0.$$

Z ekonomicznego punktu widzenia równanie to jest *równaniem bilansu koszyka*, które w odróżnieniu od równań stanu (czy ich różniczkowych odpowiedników, tj. praw zachowania przepływów) nie bilansuje względnych zmian (przepływów), lecz wiąże ze sobą absolutne wartości dwóch dualnych względem siebie zestawów parametrów ekonomicznych.



Jest ono warunkiem koniecznym zachowania konsystencji pomiędzy różnymi obrazami zmian cenowo-koszykowych, niezależnym od konkretnej postaci praw zachowania. Narzucenie tej spójności stanowi istotę procedury bilansu finansowego. Może nieprzypadkowo twórca podwójnej księgowości Fra Luca Paciolo będąc nauczycielem mistrzów perspektywy stworzył podwaliny dla geometrii rzutowej — teorii w której centralną rolę gra dwoistość, będąca w powyżej przedstawionym sensie efektem inwolucji Legendre'a. Można wykazać, że dwoistość algebry kredytów<sup>6</sup> jest efektem zastosowania okrojonego dodatkowym warunkiem wariantu odpowiedniej transformacji Legendre'a. Tak więc, zgodnie z argumentami, które zostaną przedstawione we wskazanym tu rozdziale części II, inwolucja owa stanowi efektywne narzędzie odkrywania nieznanych jeszcze metod kredytowania, tworzenia nowych instrumentów finansowych, czy

<sup>6</sup>szczegółowo badana w rozdziale o dwoistościach konwencji kredytowania w części drugiej tej rozprawy

obiekty teorii	stałe ceny	stałe koszty
potencjał	zasoby pieniężne koszyka	wartość koszyka
parametry niezależne	niepieniężne składniki koszyka	ceny dóbr wyrażone względem pieniądza
intensywności	ceny dóbr wyrażone względem pieniądza	niepieniężne składniki koszyka
prawo zachowania	dla przepływów kapitałowych	dla zmian wartości kapitałowych
transformata Legendre'a	wartość koszyka	zasoby pieniężne koszyka
inwolucja Legendre'a	równanie bilansu stanu koszyka	

Tabela 4.1. Obiekty dwoiste w modelach o stałych współczynnikach intensywności.

formułowania nieznanymi dotąd form warunków ubezpieczeniowych. Z jego pomocą możemy kierować się różnymi postaciami praw zachowania. Znajomość zależności pomiędzy różnymi potencjałami jest konieczna dla właściwego porównywania ich wartości liczbowych.

Zamiast podsumowania rozważań dotyczących modeli o stałych współczynnikach intensywności autor proponuje czytelnikowi tabelę 4.1 zestawiającą wyróżnione obiekty tych dualnych typów, przypominając zarazem o często ignorowanym relatywizmie przedstawianego obrazu, który jest konsekwencją sytuacji, że dowolne wyróżnione dobro rynkowe zostało nazwane pieniądzem. Występujące w niektórych wierszach dwoiste pozycje mogą wydawać się tożsame. Oprócz samodualnego równania opisującego inwolucję Legendre'a tak nie jest, o czym świadczą dobitnie rachunki zamieszczone w tym paragrafie.

## § 6. Zysk

Infinityzmalny zysk (stopa zwrotu) z kapitału ulokowanego w koszyku to przyrost wartości portfela wyrażony w stosunku do tej wartości

$$(4.17) \quad dr_{00} := \frac{dc_{00}}{c_{00}} = \text{sign}(c_{00}) d \ln |c_{00}|,$$

gdzie funkcja  $\text{sign}(x)$  ma wartość znaku liczby  $x$  będącej jej argumentem. Ograniczmy rozważania do takiej części przestrzeni równowagi  $\mathcal{B}_{c_{00}}$ , na której potencjał  $c_{00}$  posiada stały znak. Wtedy stopa zwrotu z koszyka wynosi

$$\int_{c_{00}^*}^{c_{00}} dr_{00} = r_{00}(c_{00}) - r_{00}(c_{00}^*) = \text{sign}(c_{00}) \ln|c_{00}| - \text{sign}(c_{00}^*) \ln|c_{00}^*|.$$

Zysk  $r_{00}(c_{00})$ , będący tzw. stopą kapitalizacji ciągłej [KP99], jest określony z dokładnością do stałej (jak każdy potencjał wyznaczający jedynie prawa zachowania przepływów). Korzystając z prawa (4.14) otrzymamy następujący wynik

$$dr_{00} = - \sum_k \frac{p_k}{c_{00}} dc_{k0},$$

czyli

$$(4.18) \quad dr_{00} + \sum_k \frac{p_k}{c_{00}} c_{k0} dr_{k0} = 0,$$

gdzie stopa  $dr_{k0} := \frac{dc_{k0}}{c_{k0}}$ , określona analogicznie jak w definicji (4.17), jest stopą zmiany ceny  $k$ -tego dobra wyrażanej w pieniądzu.

Równania (4.18) nie można nazwać prawem zachowania stopy zwrotu gdyż, zgodnie z założoną postacią każdego prawa zachowania, intensywności  $w_k := p_k \frac{c_{k0}}{c_{00}}$  nie powinny być funkcjami wartości koszyka  $c_{00}$ .

Oczywiście, wewnątrz obszaru  $\mathcal{B}_{c_{00}}$ , gdzie potrafimy wyrugować potencjał  $c_{00}$  z wyrażen określających „intensywności”  $w_k$ , równanie (4.18), będąc na  $\mathcal{B}_{c_{00}}$  tożsamością, przybierze postać przypominającą (4.2). Nazwiemy tego typu „prawo zachowania” *pseudoprawem* — jest ono tożsamościowo spełnione na hiperpowierzchni  $\mathcal{B}_{c_{00}}$ , lecz jej nie wyznacza. Konsekwentnie stopę zwrotu z koszyka  $r_{00}$  powinniśmy w tym modelu nazwać *pseudopotencjałem*, a współczynniki  $w_k$  *pseudointensywnościami*, które są *pseudosprężone* względem odpowiednich stóp zmian cenowych  $r_{k0}$ . Na podstawie pseudoprawa możemy wyznaczyć zysk osiągnięty przez posiadacza koszyka  $p_\mu$ . Nie potrafimy jednak określić hiperpowierzchni stanu równowagi  $\mathcal{B}_{c_{00}}$ , ani — posługując się inwolucją Legendre'a — dualnej do niej przestrzeni  $\mathcal{B}_{p_0}$ . Jednak, dzięki naszej wiedzy o przekształceniu Legendre'a, możemy otrzymać dualne do (4.18) (nie pseudodualne) pseudoprawo o następującej postaci

$$(4.19) \quad dr_0 + \sum_k \frac{p_k}{p_0} c_{k0} dr_k = 0,$$

gdzie  $dr_\mu := \text{sign}(p_\mu) d \ln|p_\mu|$ .

Jest ono tożsamościowo spełnione na hiperpowierzchni  $\mathcal{B}_{p_0}$ . Równanie (4.18) można interpretować jako formułę przedstawiającą zysk kredytodawcy wynikający z niewielkiej modyfikacji wysokości stóp dyskontowych dotyczących kolejnych  $N$  okresów zwrotu rat zadłużenia. Natomiast (4.19) traktujemy np. jako



wzór na stopę wzrostu  $r_0$  kwoty kredytu (udzielonego w wysokości  $p_0$ ), gdy nieznacznie ulegają zmianie wysokości kolejnych rat spłaty  $p_k$  mierzone stopami  $r_k$ , gdzie zmienne oprocentowanie kredytu wyrażają czynniki dyskontowe  $c_{k0}$ . Wypisane w tym paragrafie tożsamości mają charakter lokalny, więc są spełnione niezależnie od wcześniejszego założenia o stałej wartości odpowiednich czynników intensywności. Uwzględniając to założenie możemy wycałkować równania (4.18), (4.19), wstawiając zamiast dwoistych pól  $p_0$  i  $c_{00}$  odpowiednie równania stanu (4.12) i (4.16). Otrzymamy wtedy następujące wzory będące pseudoodpowiednikami równań stanu

$$r_{00} = r_{00}^* + \text{sign}(c_{00}^*) \ln \left| 1 - \sum_k p_k (e^{\text{sign}(c_{k0}^*)(r_{k0} - r_{k0}^*)} - 1) \right|$$

oraz

$$r_0 = r_0^* + \text{sign}(p_0^*) \ln \left| 1 - \sum_k c_{k0} (e^{\text{sign}(p_k^*)(r_k - r_k^*)} - 1) \right|.$$

W interpretacji dotyczącej kredytu formuły powyższe określają sposób obliczania zysku kredytodawcy i stopy zmiany kwoty kredytu przy wystąpieniu zmian warunków kredytowania na tyle dużych, że nie wystarcza użycie formuł uwzględniających jedynie liniową reakcję na modyfikację parametrów rat spłaty, czy stóp dyskontowych. Nie należy zapominać, że ostatnie wzory są słuszne jedynie w przypadku braku zmiany znaków parametrów cenowych i koszykowych.

Równanie określające różniczkę  $dr_0$  (czy  $dr_{00}$ ) podobne do (4.18) (czy do (4.19)) może stanowić faktyczne prawo zachowania, ale w modelu innym niż omawiany w tym rozdziale.

## § 7. Podręcznikowe przykłady

Dla dalszego zobrazowania zastosowania opisanego formalizmu możemy poddać reinterpretacji modele oparte na popularnych w podręcznikach akademickich funkcjach, takich jak funkcja produkcji Cobba-Douglasa, czy funkcja CES<sup>7</sup> [Chi94, Var95]. Z prezentowanego tam punktu widzenia funkcje te są potencjałami generującymi interesujące gospodarcze prawa zachowania.

Przypomnijmy, że definiujące funkcję produkcji Cobba-Douglasa równanie stanu (4.4) ma postać

$$p_0 - \kappa p_1^\alpha p_2^{1-\alpha} = 0,$$

gdzie  $\alpha \in (0, 1)$  i  $\kappa > 0$  są stałymi parametrami modelu, zmienne  $p_1$  i  $p_2$  wyrażają odpowiednio nakłady kapitału i nakłady pracy, a dualne do nich wielkości  $c_{10}$

<sup>7</sup>ang. constant elasticity of substitution

i  $c_{20}$  to krańcowe produktywności (odpowiednio) kapitału i pracy. Przeprowadzając elementarne rachunki łatwo jest zauważyć, że transformaty Legendre'a  $\bar{p}_0(c_{10}, p_2)$  i  $\bar{p}_0(p_1, c_{20})$  są w równowadze proporcjonalne do wartości produkcji i wynoszą odpowiednio  $-(1 - \alpha)p_0$  i  $-\alpha p_0$ . Szczególnie prostą postać przyjmuje wtedy potencjał  $\bar{p}_0(c_{10}, c_{20})$ , gdyż równy jest 0. Przejście do rachunku w logarytmach, polegające na posłużeniu się nowymi zmiennymi

$$(4.20) \quad p'_\mu = \ln p_\mu,$$

$\mu = 0, 1, 2$  sprowadza model Cobba-Douglasa do rodziny równań termodynamicznych (4.11) o stałych współczynnikach intensywności, którą szczegółowo omówiliśmy w poprzednich paragrafach. Liniową zależność logarytmu wartości produkcji od logarytmów nakładów zwykliśmy określać jako brak możliwości osiągnięcia dodatkowych przychodów będących efektem skali produkcyjnego przedsięwzięcia. Tą właściwość modelu najłatwiej jest dostrzec w równaniu stanu (4.2) dla potencjału  $p'_0$ .

Zapisana w formie równania (4.4) funkcja produkcji CES

$$p_0 - \kappa (\alpha p_1^\gamma + (1 - \alpha) p_2^\gamma)^{\frac{1}{\gamma}} = 0,$$

gdzie  $\gamma \in (0, 1)$ , pozwala na analogiczną reinterpretację modelu. Tym razem zamiana zmiennych ma postać

$$(4.21) \quad p'_\mu = p_\mu^\gamma,$$

$\mu = 0, 1, 2$ . Znajomość powierzchni więzów w stanie równowagi, tj. otoczenia każdego z punktów podprzestrzeni  $\mathcal{B}$ , pozwala nam w każdym z dwóch przykładów funkcji produkcji odtworzyć, po przejściu na powrót do pierwotnych współrzędnych, wartość dowolnej, ekonomicznie interesującej wielkości. Tak więc mozolnie studiowane przez adeptów ekonomii modele są w pełni sprawdzalne do prostej, acz pouczającej koncepcji koszyków i cenników. Zawikłane meandry książkowych opisów tych funkcji produkcji są jedynie konsekwencją poruszania się w geometrycznie niezbyt czytelnej konwencji „naturalnych” ekonomicznych współrzędnych. Używając w opisie produkcji jednolitej konwencji współrzędnych „koszyków i cenników”<sup>8</sup> możemy być zaintrygowani powodami, dla których autorzy podręczników ekonomii, symulując realnie istniejące procesy, wyróżniają jedynie dwa rodzaje „naturalnych” parametryzacji w postaci funkcji (4.20) i (4.21). Niestety, poza pewną prostotą, autor nie doszukał się innego zadowalającego wyjaśnienia tej intrygującej prawidłowości.

---

<sup>8</sup>czyli takiej, w której równania (4.2) przybierają postać równań (4.11) o stałych współczynnikach

---

## § 8. Uogólnienia formalizmu

W rozdziale tym, poświęconym transformacji Legendre'a, poddaliśmy analizie jedynie lokalne własności pierwszego rzędu dla zanurzeń  $\mathcal{B} \hookrightarrow \mathbb{R}^{N+1}$  zdefiniowanych odpowiednim dla wybranego modelu prawem zachowania. Niemniej interesujące są aspekty przestrzeni stanu równowagi zależne od wyrażen drugiego rzędu względem infinytezymalnych zmian parametrów. Tensor metryczny jest podstawowym obiektem geometrycznym drugiego rzędu, więc dla prawidłowej konstrukcji tej części teorii należałoby szczegółowo zbadać aspekty metryczne popularnych modeli statyki równowagowej. Pewne sugestie jak to robić można odnaleźć w rozdziale 1, gdzie przekonaliśmy się o naturalności struktur nieeuklidesowych dla geometrycznego opisu modeli ekonomicznych. Zasady termodynamiki fenomenologicznej zostały wyjaśnione przez wprowadzenie statystycznego opisu zjawisk cieplnych. Istnieje naturalna sposobność podobnego dopełnienia statyki procesów ekonomicznej równowagi o aspekt stochastyczny poprzez nawiązanie do idei kanonicznego rozkładu Gibbsa [Ans78, Pio95]. Tej tematyce poświęcony jest następny rozdział. Uzupełnienie statyki o elementy niepewności odpowiada współczesnemu paradygmatowi naukowemu i rozszerza zakres stosowalności niedynamicznych modeli w ekonomii. Jednak, zdaniem autora, taka teoria powinna także uwzględniać zaprezentowany w ostatniej części książki formalizm kwantowy.

## Termodynamika portfeli kanonicznych

W tle zmieniającego ceny rynku specjaliści zarządzający portfelami inwestycyjnymi odnoszą porażki, bądź sukcesy. Wartość owych poczynań oceniamy zwykle post factum. Wtedy jednak brakuje nam obiektywnego ilościowego miernika jakości ich decyzji, który w sposób poprawny i subtelny różnicowałby wyniki całej gamy „średniaków” dominujących np. na rynku funduszy inwestycyjnych, czy emerytalnych. Potrzeba umiejętnej oceny efektywności inwestowania jest szczególnie istotna, gdy, dla określenia jakości zarządzania portfelem, zamierzamy odnieść się do różnych okresów czasowych. Sukces łatwo jest osiągnąć w dobie koniunktury rynkowej. Przy niesprzyjających warunkach trudno „utrzymać swoje”. Jaka część wzrostu wartości kapitału jest jedynie efektem ogólnej prosperity? Jak wyodrębnić zysk zawdzięczany wyłącznie profesjonalizmowi inwestora? Jak zmierzyć spadek czy wzrost umiejętności analitycznych (czy prognostycznych) konstruującego portfel inwestycyjny, czy porównać jakość sformułowanej przez bank polityki kredytowej w różnych okresach jego działalności?

---

### § 1. Ciepła statyka równowagi

Dla oceny jakości zarządzania portfelami inwestycyjnymi w praktyce wykorzystuje się miary Sharpe’a, Treynora czy Jensena [EG98]. Wszystkie one bazują na modelu CAPM<sup>1</sup>, który wymaga spełnienia wielu rygorystycznych i trudnych do zweryfikowania założeń. Ze względu na brak takich ograniczeń, algorytmicznie znacznie łatwiejszą technikę rachunku oraz oparcie w uniwersalnych koncepcjach teorii informacji niżej proponowana metoda wydaje się jakościowo lepszym narzędziem porównawczym. Zamiast bezpośredniej oceny portfela inwestycyjnego rozważymy badanie tzw. portfela kanonicznego o takiej samej wartości. Określimy formalizm rachunkowy pozwalający wyodrębnić część zmiany wartości portfela, która jest efektem jakości decyzji inwestycyjnej. Rachunek ten stanowi rozszerzenie metod statyki porównawczej na dziedzinę

---

<sup>1</sup>ang. capital asset pricing model

procesów statystycznych. Uzupełnia on opisane w poprzednim rozdziale metody termodynamiczne zaadoptowane do potrzeb ekonomii o charakterystyczny w dziedzinie fizyki czynnik opisujący wpływ zjawisk chaotycznych na obserwowane zmiany parametrów modeli. Wydaje się, że pojęcie temperatury, zidentyfikowanej przed wiekiem przy pomocy narzędzi statystycznych jako odwrotność odpowiedniego mnożnika Lagrange'a dla zagadnienia maksymalizacji entropii [Isi71], ma równie uzasadnioną rację bytu w statystycznych modelach ekonomicznych. Pojawienie się ciepła w problemach statyki równowagowej pozwala wprowadzić nowe, globalne mierniki stanu modelu dualne np. do wartości użyteczności, czy zysku. Odkrywanie roli tych funkcji (zwanym w tradycji metod matematycznych potencjałami) pozwoli dogłębnie zrozumieć znaczenie statystycznych uogólnień modeli równowagi ekonomicznej.

---

## § 2. Cisi i gracze

Załóżmy, że chcemy zmierzyć preferencje specjalisty inwestującego np. w spółki giełdowe. Możemy wyróżnić dwa typy decyzji inwestycyjnych podejmowanych w nie ulegającej zmianom sytuacji zewnętrznej, gdy ustalone są ceny oraz pozostałe parametry gospodarcze. Pierwszą z nich jest decyzja zdeterminowana, będąca jedynie funkcją sytuacji zewnętrznej. Inwestor działający w ten sposób w jednakowych warunkach zawsze tak samo (mechanicznie) lokuje swój kapitał, rozpraszając go na różnego rodzaju aktywa, bądź nie. Zachowanie to jest w pełni przewidywalne. Odpowiednio zaprogramowany i przyczynowo uwarunkowany automat mógłby zastąpić jednoznacznie działającego specjalistę. Informacja o jego przyszłych decyzjach jest w pełni określona jego wcześniejszymi działaniami. Absorbujący naszą uwagę przekaz, dotyczący tego, co on zamierza zrobić w znanych nam okolicznościach, jest zerowy. Takiego inwestora nazwiemy *cichym*. O jego portfelu powiemy, że zawiera informację zerową, gdyż jest w pełni wyznaczony przez ilości wchodzących w jego skład aktywów kapitałowych.

Prócz zachowań zdeterminowanych, określających portfele o informacji zerowej, możemy mieć do czynienia z decyzjami indeterministycznymi, gdy w jednakowej sytuacji zewnętrznej ten sam inwestor decyduje się na różne posunięcia. Nie zmienia przy tym własnej metody postępowania gdyż my, obserwując jego działanie, nie odnotowujemy żadnych zmian w statystyce jego poczynań. Jednak nie do końca potrafimy przewidywać jego posunięcia, część jego wiedzy nie jest nam dostępna przez samą obserwację jego decyzji inwestycyjnych. Pomiar owej decyzyjnej nieokreśloności wyznacza ilość niedostępnej

wiedzy inwestycyjnej. W oparciu o znane zależności pomiędzy statystyką, a termodynamiką jesteśmy w stanie określić ilościowe zasady rządzące wpływem niejednoznaczności decyzji na zyski osiągnięte z portfela kształtowanego przez takiego inwestora, który zasługuje na miano *gracza*. W nagłówku tego paragrafu autor świadomie strawestował tytuł satyry politycznej Janusza Szpotańskiego [Szp90] uważając, że powstałe dzięki temu skojarzenia niezwykle celnie oddadzą specyfikę jego subiektywnych poglądów dotyczących rozpatrywanego niżej tematu.

By ilościowo opisać zachowania cichych i graczy zdefiniujemy *portfel urnowy*.

### § 3. Portfel urnowy

Poniżej uogólnimy model opisany w paragrafie 4 rozdziału 4 wprowadzając czynnik stochastyczny, zaś ceny  $c_\mu$  ujmijemy relatywnie, tym razem względem ich wartości początkowych. W tym celu rozważmy loterię opartą na generatorze zdarzeń losowych, który z ustalonymi prawdopodobieństwami  $w_\lambda$ ,  $\lambda = 0, \dots, N$ , w kolejnych losowaniach, przejawiających brak jakichkolwiek korelacji, wskazuje numer jednej z  $N+1$  urn. Niech wybór urny o numerze  $\lambda$  oznacza zakup dobra rynkowego o numerze  $\lambda$  za kwotę  $\bar{p}_\lambda$ . Ilość jednostek zakupionego dobra wynosi  $p_\lambda = \frac{\bar{p}_\lambda}{c_\lambda^*}$ , gdzie  $c_\lambda^*$  jest wartością początkową rynkowej ceny dobra  $\lambda$ , obowiązującą w chwili jego zakupu. Wielkość  $\bar{p}_\lambda$ , ustaloną w konkretnej loterii, będziemy nazywać *wagą dobra  $\lambda$  w portfelu*. Wagi  $\bar{p}_\lambda$  nie należy mylić z odpowiadającym jej dodatkowym parametrem portfela urnowego, jakim jest prawdopodobieństwo  $w_\lambda$ . Specyfikację  $N+1$  dóbr objętych losowaniem nazywamy *sektorem rynku*. W dowolnej chwili po losowaniu *wartość* określonego tym sposobem portfela urnowego wynosi  $-c_{00l}$ , gdzie potencjał  $c_{00l}$  będący funkcją zmiennej losowej  $l$  (przyjmującej wartości równe numerom wylosowanych urn) spełnia następujące równanie bilansu



$$(5.1) \quad c_{00l}(\bar{c}_0, \dots, \bar{c}_N) + \sum_{\lambda} [l = \lambda] \bar{c}_\lambda \bar{p}_\lambda = 0.$$

Symbol  $l$  oznacza zmienną losową przyjmującą wartości równe numerom wylosowanych urn. Liczby  $\bar{c}_0, \dots, \bar{c}_N$  są aktualnymi cenami jednostkowymi dóbr należących do sektora rynku, odniesionymi do ich początkowych wartości pieniężnych. Tak więc aktualną ceną dobra  $\lambda$  jest  $c_\lambda = \bar{c}_\lambda c_\lambda^*$ , a  $c_\lambda^*$  jest jego ceną występującą w stanie rynku, jaki istniał bezpośrednio po losowaniu (gdy zakupiono składniki portfela). Wagi  $\bar{p}_\lambda$  i ceny względne  $\bar{c}_\lambda$  są wielkościami dualnymi, analogicznymi do parametrów  $p_\lambda$  i  $c_\lambda$ . Równanie bilansu (5.1) możemy potraktować jako definicję wartości portfela urnowego  $-c_{00l}$ .

Przyjmujemy, że jedna z urn (np. zerowa) odpowiada składnikowi pieniężnemu portfela gracza, więc w całym procesie zmieniających się cen mamy  $\bar{c}_0 = 1$ . Wartość oczekiwana wielkości  $\bar{p}_0 [l = 0]$  pieniężnego składnika portfela jest transformatą Legendre'a średniej wartości portfela (patrz rozdział 4). Spostrzeżenie to pozwala rozwinąć formalizm dualnego (do przedstawionego w tym rozdziale) opisu portfela urnowego. Jest on przydatny w sytuacjach, gdy dla ustalonych przyrostów cenowych  $\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_N$  zamierzamy zmodyfikować wielkości poszczególnych wag portfela  $\bar{p}_0, \dots, \bar{p}_N$ . W rozdziale 1 zostało wykazane, że ceny  $u_\lambda$  (oznaczane, po nadaniu im w rozdziale 4 ogólnego charakteru współczynników intensywności, symbolami  $c_{\lambda 0}$ , lub krócej:  $c_\lambda$ ), a więc także względne ceny  $\bar{c}_\lambda$ , są współrzędnymi niejednorodnymi kursów stanowiących punkty  $N$ -wymiarowej rzeczywistej przestrzeni rzutowej. Dualne do nich hiperpłaszczyzny portfeli są wtedy parametryzowane jednorodnymi współrzędnymi rzutowymi — wagami  $\bar{p}_0, \dots, \bar{p}_N$ .

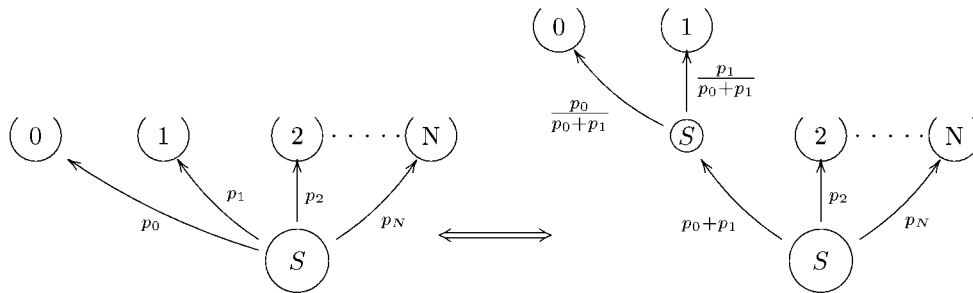
Momentowi bezpośrednio po losowaniu odpowiada następująca postać równania bilansu (5.1)

$$c_{00l}(1, \dots, 1) + \sum_{\lambda} [l = \lambda] \bar{p}_\lambda = 0.$$

Łatwo zauważyć, że portfel urnowy o wagach  $\bar{p}_0, \dots, \bar{p}_N$  i o rozkładzie jednostajnym  $w_0 = \dots = w_N = \frac{1}{N+1}$  ma, po dowolnej zmianie cen, wartość oczekiwaną  $E(c_{00l})$  równą wartości portfela cichego określonego wagami  $\frac{\bar{p}_0}{N+1}, \dots, \frac{\bar{p}_N}{N+1}$  (dla rachunkowej wygody zakładamy doskonałą podzielność dóbr). Warto byłoby eksperymentalnie zbadać jak wielu inwestorów posiadających portfele o takiej strukturze jest de facto zdeterminowanymi cichymi uczestnikami rynku. Może nie mała ich część to gracze, których działalność inwestycyjna przypomina raczej wielokrotnie powtarzany dobór aktywów o wartościach  $\bar{p}_0, \dots, \bar{p}_N$  pochodzących z sektora rynkowego, gdy prawdopodobieństwa wyboru każdego z aktywów są jednakowe. Dla pełnego opisu procesu zmian wartości portfela urnowego określimy teraz entropię portfela, a następnie odniesiemy się do jej zmian spowodowanych ruchem cen rynkowych.

## § 4. Miara informacji o graczu

W książce tej zajmiemy się jedynie ilością informacji, rezygnując z pełnego niejasności wglębiania się w jej aspekty jakościowe. Warto to podkreślić, gdyż w minionych latach odnosiły prestiżowe sukcesy w ekonomii badania nad mechanizmami skłaniającymi do ujawniania informacji [Wel97], [Pio99a], zaś mierzenie ilości danych pozostawiono informatykom. Zaczniemy od rozważenia informacji o zachowaniach gracza (czyli o działaniu loterii), która dotyczy części spośród  $N+1$  urn. Wystarczy nam analiza sytuacji dotyczącej dowolnych dwóch urn, gdyż poniższe rozumowanie można rozszerzyć metodą indukcyjną na większą ich ilość. Określmy, jak miara takiej ograniczonej informacji powinna być uwzględniona w mierze dotyczącej całości informacji o graczu. Naturalne jest przyjęcie zasady, że miara informacji o dwóch urnach powinna addytywnie uzupełniać miarę informacji dotyczącej pozostałych urn, z wagą równą sumarycznemu prawdopodobieństwu wylosowania tych urn przez gracza.



Taką właściwość miary  $S$ , zilustrowaną na powyższym rysunku, możemy zapisać w postaci równania funkcyjnego

$$(5.2) \quad S(w_0, w_1, w_2, \dots, w_N) = S(w_0 + w_1, w_2, \dots, w_N) + (w_0 + w_1) S\left(\frac{w_0}{w_0 + w_1}, \frac{w_1}{w_0 + w_1}\right),$$

gdzie liczby  $w_\lambda = E([I = \lambda])$  są prawdopodobieństwami wylosowania urny o numerze  $\lambda$ . Ze względu na zamieszczone niżej uogólnienie formuły (5.2) założymy, że  $w_\lambda \in \mathbb{R}_+$ , czyli że dziedziną funkcji  $S$  jest suma zbiorów  $(\mathbb{R}_+)^n$  będących iloczynami kartezjańskimi

$$S : \bigcup_{n=1}^{N+1} (\mathbb{R}_+)^n \longrightarrow \mathbb{R}_+.$$

Miarę informacji o graczu spełniającą wyżej zobrazowaną własność (5.2) nazywamy *entropią*. W ten sam sposób definiował entropię Claude Shannon –



twórca teorii informacji. W jego pracy [Sha48] odnajdziemy liczne pozaformalne, acz fundamentalne, uwagi dotyczące tej funkcji.

W przypadku miary regułą jest poszukiwanie rozwiązania równania (5.2), które spełniałoby następującą własność:

$$(5.3) \quad S(w_0, w_1, \dots, w_N) = S(w_0) + S(w_1, \dots, w_N),$$

gdzie funkcje występujące po prawej stronie równania (5.3) nie są miarą pełnej informacji o zachowaniu gracza, lecz jedynie miarą informacji o składnikach jego urnowego portfela (argumenty tych funkcji nie są unormowane do jedności). Dzięki założeniu (5.3) zmienne  $w_2, \dots, w_N$ , po odseparowaniu, zostają wyeliminowane z równania (5.2), co prowadzi do następującej własności funkcji  $S(w)$ :

$$(5.4) \quad \begin{aligned} S(w_0 + w_1) &= S(w_0) + S(w_1) + \\ &- (w_0 + w_1) \left( S\left(\frac{w_0}{w_0 + w_1}\right) + S\left(\frac{w_1}{w_0 + w_1}\right) \right). \end{aligned}$$

Możemy podać szczególną postać równania (5.4) dla  $w_0 = w_1 = w$

$$(5.5) \quad 2S(w) - S(2w) = 4wS\left(\frac{1}{2}\right).$$

Podstawiając do formuły (5.5) wartości  $w = \frac{1}{2}$  oraz  $w = 0$  otrzymamy wartość funkcji informacji dla zdarzeń zdeterminowanych  $S(1) = S(0) = 0$ . Nie trzeba nic wiedzieć, by przewidzieć rezultat „przemysleń” cichego. Każda informacja przed jej zdobyciem musi być dla nas tajemnicą, a gdy ją uzyskamy to de facto przestaje być interesującą nas informacją. Z tego powodu, odchodząc nieco od tradycji, entropię powinniśmy nazywać raczej miarą tajemnicy, a nie informacji.

## § 5. Rozwiązanie równania kumulowania informacji

W szczególności zależność (5.5) prowadzi do niejednorodnego równania różnicowego, gdyż przyjmując  $w = \frac{1}{2^{k+1}}$  i oznaczając  $S_k := S(2^{-k})$  otrzymamy

$$(5.6) \quad 2S_{k+1} - S_k = 2^{1-k} S_1.$$

Przekształcenie

$$(5.7) \quad \tilde{S}_k := 2^k S_k$$

trywializuje równanie (5.6), sprowadzając go do następującej formy

$$\tilde{S}_{k+1} - \tilde{S}_k = \tilde{S}_1,$$

która jest popularną rekurencją określającą szereg arytmetyczny o postaci  $\tilde{S}_k = k\tilde{S}_1$ . Stosując transformację odwrotną do (5.7) otrzymujemy rozwiązanie rekurencji (5.6). Tym sposobem mamy następującą jawną postać miary  $S(w)$  w

punktach  $\frac{1}{2^k}$ , dla  $k=2, 3, \dots$

$$(5.8) \quad S(2^{-k}) = S_k = k2^{-k}2S_1 = -2S_12^{-k} \log_2 2^{-k}.$$

Po przedłużeniu funkcji (5.8) z dziedziny złożonej z punktów  $\frac{1}{2^k}$  na cały odcinek  $[0, 1]$  dostajemy:

$$(5.9) \quad S(w) = -2S\left(\frac{1}{2}\right) w \log_2 w$$

Możemy łatwo sprawdzić, że ma ona własność (5.5). Ogólnymi, a zarazem naturalnymi warunkami wystarczającymi na to, by powyższe rozwiązanie równania (5.6) było jednoznaczne są: ciągłość funkcji  $S(w)$  oraz monotoniczny wzrost wartości  $S(w_0, \dots, w_N) \Big|_{w_0=\dots=w_N=\frac{1}{N+1}}$  na skutek zwiększającej się liczby  $N+1$  argumentów [Khi53]. Wstawiając do rekurencji (5.3) postać (5.9) funkcji  $S(w)$  otrzymujemy jawne wyrażenie entropii

$$(5.10) \quad S(w_0, \dots, w_N) = \sum_{\lambda=0}^N w_\lambda \ln w_\lambda$$

określonej wcześniej własnością (5.2).

Rozważmy zbiór zdarzeń elementarnych będący iloczynem kartezjańskim dwóch zbiorów złożonych z  $M+1$  i  $N+1$  zdarzeń elementarnych, wzajemnie niezależnych statystycznie. Wtedy ze wzoru (5.10) bezpośrednio wynika, że entropia rozkładu statystycznego określonego na takim zbiorze jest sumą entropii rozkładów wyznaczonych z osobna dla każdego składnika iloczynu

$$\begin{aligned} S_{(M+1) \times (N+1)} &= - \sum_{\lambda=0}^M \sum_{\mu=0}^N w'_\lambda w''_\mu \ln(w'_\lambda w''_\mu) = \\ &= - \sum_{\lambda=0}^M \sum_{\mu=0}^N w''_\mu w'_\lambda \ln w'_\lambda - \sum_{\lambda=0}^M \sum_{\mu=0}^N w'_\lambda w''_\mu \ln w''_\mu = \\ &= - \sum_{\lambda=0}^M w'_\lambda \ln w'_\lambda - \sum_{\mu=0}^N w''_\mu \ln w''_\mu = S_{M+1} + S_{N+1}. \end{aligned}$$

W powyższym sensie entropia posiada własność addytywności.

Równanie (5.2), jak każda inna definicja miary, wyznacza funkcję  $S$  z dokładnością do dowolnej stałej multiplikatywnej. Tematy wiążące się z entropią dotyczą zwykle problemów optymalizacyjnych badanych z pomocą rachunku różniczkowego, dlatego we wzorze (5.10) przyjęliśmy, że wartość stałej  $2S\left(\frac{1}{2}\right) = S\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$  jest równa granicy szeregu anharmonicznego  $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \ln 2$ . Nie wpływając na charakterystykę opisywanych entropią modeli podstawa naturalna logarytmu pozwala otrzymywać najprostszą postać pochodnej tej funkcji. Wzoru (5.10) nie należy mylić z logarytmem funkcji wiarygodności, która jest centralnym obiektem metody największej wiarygodności [Cho95].

---

 § 6. Entropia koniunkcji niezależnych cech gracza

Nawiązując do addytywności entropii warto zwrócić uwagę, że definiując entropię równanie (5.4) można traktować jako jej własność, określoną za pomocą warunku Leibniza [Enc97], znanego z wyznaczania pochodnej iloczynu funkcji:

$$(5.11) \quad S(vw) = vS(w) + wS(v).$$

Korzystając z tego warunku uzyskamy następujące równanie funkcyjne:

$$(5.12) \quad \begin{aligned} S(w_0, w_1) &= S(w_0) + S(w_1) = S\left(\frac{w_0}{w} w\right) + S\left(\frac{w_1}{w} w\right) = \\ &= \frac{w_0+w_1}{w} S(w) + w\left(S\left(\frac{w_0}{w}\right) + S\left(\frac{w_1}{w}\right)\right), \end{aligned}$$

które, przy dowolnym parametrze  $w \in \mathbb{R}_+$ , stanowi uogólnienie równania (5.4), gdyż tamto otrzymamy z (5.12) po narzuceniu więzu  $w_0 + w_1 = w$ . W przypadku warunku Leibniza problem unikalności rozwiązania (5.10) jest prostszy. Oznaczając

$$(5.13) \quad f(x) := \frac{S(e^x)}{e^x}$$

sprowadzamy (5.11) do funkcyjnego równania liniowego

$$f(x_0 + x_1) = f(x_0) + f(x_1),$$

którego wszystkie rozwiązania, w klasie funkcji ciągłych, mają postać liniową  $f(x) = c x$ , gdzie  $c$  jest pewną stałą<sup>2</sup>. Funkcja  $S(w)$  wyraża się przy pomocy funkcji  $f(x)$ , zdefiniowanej równaniem (5.13), następująco:

$$S(w) = w f(\ln w) = c w \ln w,$$

co prowadzi do formuły (5.10) stanowiącej jawny wzór na entropię. Ciągłość funkcji  $S(w)$  jest teraz wystarczającym warunkiem istnienia jednoznacznego (z dokładnością do stałej multiplikatywnej) rozwiązania równania (5.11) w postaci wzoru (5.10). Warunek Leibniza (5.11) możemy zinterpretować jako własność miary tajemniczości portfela gracza, określający sposób jej wyznaczenia w sytuacjach, gdy jego składnik jest wskazywany przez koniunkcję dwóch losowo niezależnych czynników, występujących z prawdopodobieństwami odpowiednio  $v$  i  $w$ . Interesującą interpretację wynikającego stąd uogólnienia przedstawionego graficznie warunku (5.4) w postaci wzoru (5.12) autor pozostawia wyobraźni czytelnika.

---

<sup>2</sup>zob. [Fic72]

---

 § 7. *Kanoniczny portfel urnowy*

Chcąc mierzyć poziom niewiedzy (czy dezorientacji) inwestora musimy odnieść jego wynik inwestycyjny do rezultatów uzyskanych przez innych uczestników gry rynkowej. Dlatego pogrupujemy inwestorów w klasy cechujące się jednakową wartością ich portfeli. Pozwoli to przeprowadzić w następnym paragrafie dekompozycję zmian wartości szczególnego portfela-reprezentanta klasy na część będącą efektem zmiany wiedzy inwestycyjnej oraz resztę powstałą jedynie na skutek zmiany koniunktury rynkowej manifestującej się ruchem cen. Dla reprezentowania klasy inwestora wybierzmy, spośród portfeli urnowych osiągających na zmianach kursów rynkowych jednakowe zyski, portfel o takich prawdopodobieństwach wylosowania poszczególnych urn, aby ich łączna entropia była maksymalna, czyli by tajemnica dotycząca potencjalnego wyniku losowania była możliwie największa. Obserwator takiej loterii niczego nie docięnie prócz informacji o oczekiwanej wartości osiągniętego na jej podstawie wyniku finansowego. Zakładamy brak korelacji pomiędzy wynikami losowań oraz efektywność samego rynku. Wartości zmiennej losowej  $l$  raczej nie symbolizują pojedynczych dóbr (które mogą być skorelowane np. ze względu na wspólną branżę, czy zależności kapitałowe), lecz odpowiadają zortogonalizowanym, rzeczywistym kombinacjom liniowym jednostek tych dóbr, tj. ortogonalnym koszykom. Owa ortogonalizacja opiera się na iloczynnie skalarnym zadaniem macierzą korelacji notowań cenowych dla dóbr rynkowych. Reasumując, poszukujemy ekstremum funkcji  $S(w_0, \dots, w_N)$  o unormowanych do jedynki prawdopodobieństwach

$$(5.14) \quad \sum w_\lambda = 1$$

i przy ustalonej wartości portfela<sup>3</sup>:

$$-c_{00}(\bar{c}_0, \dots, \bar{c}_N) = E\left(\sum_\lambda [l = \lambda] \bar{c}_\lambda \bar{p}_\lambda\right).$$

Jest to osłabiony warunek bilansu (5.1). Zamiast ścisłego spełnienia równania (5.1) wymagamy, aby było ono spełnione dopiero na poziomie wartości oczekiwanych. Głębszą analizę poprawności takiego postępowania można znaleźć w

---

<sup>3</sup>por. (5.1)

pracy [Pio99b] w związku z analizą ekonomicznego odpowiednika trzeciej zasady dynamiki w postaci popularnego stwierdzenia o rynkach finansowych, głoszącego nieistnienie zjawiska darmowego obiadu (*no free lunch theorem*). Stosując metodę Lagrange'a wyznaczania ekstremum warunkowego [Sł085] znajdujemy warunki zerowania się następującej formy różniczkowej

$$\begin{aligned} dS(w_0, \dots, w_N) + \beta dE\left(\sum_{\lambda} [l=\lambda] \bar{c}_{\lambda} \bar{p}_{\lambda}\right) + \zeta d\sum_{\lambda} w_{\lambda} &= \\ = \sum_{\lambda} (-\ln w_{\lambda} - 1 + \beta \bar{c}_{\lambda} \bar{p}_{\lambda} + \zeta) dw_{\lambda} &= 0, \end{aligned}$$

gdzie  $\beta$  i  $\zeta$  są *mnożnikami Lagrange'a*. Z powyższej równości wynika, że przy dowolnych niezależnych przyrostach  $dw_{\lambda}$  sumy  $-\ln w_{\lambda} - 1 + \beta \bar{c}_{\lambda} \bar{p}_{\lambda} + \zeta$  powinny zniknąć dla  $\lambda=0, \dots, N$ . Przekształcając równanie

$$-\ln w_{\lambda} - 1 + \beta \bar{c}_{\lambda} \bar{p}_{\lambda} + \zeta = 0$$

otrzymujemy jawną zależność prawdopodobieństw  $w_{\lambda}$  (cechujących portfel urnowy o maksymalnej entropii) od względnych cen  $\bar{c}_{\lambda}$

$$w_{\lambda} = e^{\beta \bar{c}_{\lambda} \bar{p}_{\lambda} + \zeta - 1},$$

którą możemy zapisać w poniższy sposób, eliminując mnożnik  $\zeta$  przez wprowadzenie warunku unormowania

$$w_{\lambda}(\bar{c}_0, \dots, \bar{c}_N) = \frac{e^{\beta \sum_{\lambda} [l=\lambda] \bar{c}_{\lambda} \bar{p}_{\lambda}}}{\sum_{\lambda} e^{\beta \bar{c}_{\lambda} \bar{p}_{\lambda}}}.$$

Powyższy rozkład prawdopodobieństwa w literaturze fizycznej nosi nazwę *rozkładu Gibbsa* [Isi71]. W tym miejscu warto zrobić dygresję. Otóż nieco bardziej skomplikowana postać rozkładu prawdopodobieństwa pojawia się w przypadku uwzględnienia w bilansie portfela kosztów związanych z operacją zmiany jego struktury (która wymaga kupna, bądź sprzedaży dóbr). Otrzymujemy wtedy model statystyczny izomorficzny z jednowymiarowym łańcuchem Isinga cząstek o spinie  $s = \frac{N}{2}$  w zmiennym polu magnetycznym [Pio95]. Model Isinga [Fey80] odegrał ważką rolę w rozwoju fizyki statystycznej ze względu na jego związki ze zjawiskami zmian nieciągłych (tzw. przejścia fazowe).

Zysk inwestora określa jedynie sumaryczna wartość oczekiwana składników jego portfela. Inwestorzy o których niczego nie wiemy prócz tego, że osiągnęli jednakowy wynik tworzą tzw. *kanoniczny zespół statystyczny* [Isi71, Zal78, Hua78], stanowiący analogon podstawowego narzędzia używanego do opisu zjawisk fizycznych. W tym zespole mieści się także inwestor cichy, jeśli osiągnął zysk charakteryzujący zespół. Zespół kanoniczny opisywany urnowym portfelem o maksymalnej entropii (dlatego nazywany jest *portfelem kanonicznym*) charakteryzuje się rozkładem prawdopodobieństw  $w_0, \dots, w_N$  reprezentującym wszystkie algorytmy inwestycyjne — tak cichych (deterministyczne), jak i graczy (stochastyczne) — prowadzące do tego samego sukcesu rynkowego (w postaci

osiągniętego zysku). Wskazanie innego reprezentanta tej klasy faworyzowałoby którąś z urn (czyli odpowiadające jej dobro inwestycyjne), zaś nasza informacja o takim zespole statystycznym byłaby większa (zmniejszyłaby się wartość entropii reprezentanta). Odwrotność mnożnika  $\beta$  nazywamy *temperaturą* zespołu kanonicznego  $T = \frac{1}{\beta}$  [Isi71, Zal78]. Portfel kanoniczny ma przy dowolnych cenach rynkowych taką wartość oczekiwaną  $E(\bar{c}_{00t})$ , jak wartość portfela cichego o składnikach  $\bar{p}_{0c}, \dots, \bar{p}_{Nc}$ , gdzie

$$\bar{p}_{\lambda c} := \bar{p}_{\lambda} \frac{e^{\beta \bar{c}_{\lambda} \bar{p}_{\lambda}}}{\sum_{\lambda} e^{\beta \bar{c}_{\lambda} \bar{p}_{\lambda}}}.$$

Odpowiedniość ta stanowi uogólnienie rozważań kończących paragraf 3 bieżącego rozdziału. Łatwo możemy się przekonać, że omawiany w tamtym miejscu portfel urnowy, o jednakowo prawdopodobnych komponentach, odpowiada portfelowi kanonicznemu z zerową wartością mnożnika Legendre'a  $\beta$  (niziej zostanie wykazane, że  $T$  jest ceną, więc punkty dla których  $T = \pm\infty$  są punktami niewłaściwymi przestrzeni rzutowej).

Można zauważyć, że wartość oczekiwaną  $E(c_{00t})$  otrzymamy różniczkując względem mnożnika  $\beta$  funkcję tworzącą dla momentów rozkładu Gibbsa  $\ln Z$ , gdzie  $Z(\bar{c}_0, \dots, \bar{c}_N, T) := \sum_{\lambda} e^{\beta \bar{c}_{\lambda} \bar{p}_{\lambda}}$  nazywamy *sumą statystyczną* [Isi71], czyli

$$\begin{aligned} -c_{00} &:= -E(c_{00t}) = \frac{\partial}{\partial \beta} \ln \sum_{\lambda} e^{\beta \bar{c}_{\lambda} \bar{p}_{\lambda}} = \frac{\sum_{\lambda} \bar{c}_{\lambda} \bar{p}_{\lambda} e^{\beta \bar{c}_{\lambda} \bar{p}_{\lambda}}}{\sum_{\lambda} e^{\beta \bar{c}_{\lambda} \bar{p}_{\lambda}}} = \\ (5.15) \quad &= E(\bar{c}_i \bar{p}_i) = E\left(\sum_{\lambda} [i = \lambda] \bar{c}_i \bar{p}_i\right) = \sum_{\lambda} \hat{p}_{\lambda} \bar{c}_{\lambda}, \end{aligned}$$

gdzie symbol  $\hat{p}_{\lambda}$  oznacza przeciętną ilość dobra o numerze  $\lambda$  w portfelu kanonicznym.

Nawiązując do wywiedzionej przez Claudea Shannona<sup>4</sup> z idei kryptograficznych teorii informacji można wykazać, że entropia (5.10) jest proporcjonalna do minimalnej długości (czyli złożoności) zapisu komputerowego zawierającego informację o portfelu urnowym, zapisu który został skompresowany przy pomocy algorytmu zachłannego zwanego kodowaniem Huffmana [CLR97]. Maksymalną złożoność potencjalnie możliwych wyników loterii, które prowadzą do jednokowej wartości oczekiwanej portfela określa entropia rozkładu Gibbsa. Dlatego rozsądnym będzie założenie, że jest ona stochastyczną miarą osiągalności (dostępności, powszechności, ilości różnych algorytmów konstruowania portfela) takiej a nie innej wartości portfela, a co za tym idzie — miarą zdezorientowania posiadaczy portfeli o tej wartości. Inwestorzy kierują się w swoich decyzjach tajemniczymi przesłankami, które przypominają nam wyniki pewnej loterii, a o ilości takich różnorodnych, choć przeciętnie jednakowo korzystnych wyników dowiadujemy się z pomiaru entropii loterii. Maksymalna entropia portfela

<sup>4</sup>krewnego Thomasa Edisona, zob. [Biu01]

oznacza także maksymalną dywersyfikację ryzyka kapitałowego. W tym kontekście problem rozproszenia ryzyka okazuje się zagadnieniem minimaxowym. Jest tak, gdyż inwestor unikający niebezpieczeństw powinien wybierać portfel, który z punktu widzenia ewolucji czasowej jest najmniej „rozchwiany” (najtrudniej osiągalny w sensie opisanym w rozdziale 3) jednocześnie będąc wyjątkowo łatwo osiągalnym ze względu na maksymalizację jego entropii (określonej dla ustalonych wartości początkowych  $\bar{p}_0, \dots, \bar{p}_N$  kolejnych dóbr zawartych w portfelu).

---

### § 8. Zmiany zysku zespołów kanonicznych

Wartość portfela pozostaje stała przy zmianie cen jedynie w klasie portfeli urnowych o stałej entropii, które posiadają szczególne znaczenie dla przedstawionego w rozdziale 1 geometrycznego opisu rynku. Portfele te wykazują zachowanie współzmiennicze z kursem cen rynkowych, bowiem wielkości  $\bar{p}_\lambda$  pozostają odwrotnie proporcjonalne do względnych cen  $\bar{c}_\lambda$ . Nie zmieniająca się wartość takiego portfela nie oznacza, że osiągany z niego zysk jest zerowy. Formułę pozwalającą wyliczyć zysk z portfela współzmienniczego odnajdziemy w rozdziale 1. Gdy wagi  $\bar{p}_\lambda$  nie podlegają modyfikacjom, to ruch cen implikuje zmianę wartości oczekiwanej portfela urnowego o rozkładzie Gibbsa. Ten infinitesimalny przyrost określimy wyznaczając odpowiednią różniczkę

$$-dc_{00}(\bar{c}_0, \dots, \bar{c}_N) = dE(\bar{c}_i \bar{p}_i).$$

Ponieważ

$$(5.16) \quad S = - \sum_{\lambda} w_{\lambda} \ln w_{\lambda} = \ln Z - \beta E(\bar{c}_i \bar{p}_i),$$

więc różniczka entropii rozkładu Gibbsa ma postać

$$\begin{aligned} dS &= \frac{\beta \sum_{\lambda} \bar{p}_{\lambda} e^{\beta \bar{p}_{\lambda} \bar{c}_{\lambda}} d\bar{c}_{\lambda}}{Z} - \beta dE(\bar{c}_i \bar{p}_i) = \\ &= \beta \left( \sum_{\lambda} E([I=\lambda] \bar{p}_{\lambda}) d\bar{c}_{\lambda} - dE(\bar{c}_i \bar{p}_i) \right). \end{aligned}$$

Stąd otrzymujemy następującą zależność

$$(5.17) \quad dc_{00}(\bar{c}_0, \dots, \bar{c}_N, S) + \sum_{\lambda} \hat{p}_{\lambda} d\bar{c}_{\lambda} = T dS,$$

gdzie entropię  $S$ , charakteryzującą zespół kanoniczny, potraktowaliśmy jako zmienną niezależną. Dlatego formuła (5.17) ma ogólniejszy charakter niż wynikałoby to z założeń, jakie przyjęliśmy w celu jej wyprowadzenia. Na postawie równania (5.17) możemy zdefiniować temperaturę  $T$  w ramach przedstawionej

w rozdziale 4 statyki równowagowej (czynnik  $\beta = \frac{1}{T}$  określa temperaturę dopiero na poziomie stochastycznym). Wyrażając różniczkę wartości portfela  $dc_{00}$  przez różniczki argumentów funkcji  $c_{00}(\bar{c}_0, \dots, \bar{c}_N, S)$  zauważamy, że

$$(5.18) \quad T = \left. \frac{\partial c_{00}}{\partial S} \right|_{\bar{c}_\lambda = \text{constans}}.$$

Temperatura  $T$  wyznacza intensywność zmiany wartości portfela kanonicznego spowodowaną zmianą jego entropii. Równanie (5.17) jest odpowiednikiem pierwszej i drugiej zasady termodynamiki. W kontekście opisu zachowania się zespołu kanonicznego inwestorów treść owych zasad przybiera następującą postać:

I zasada zespołu kanonicznego. *Wzrost wartości portfela kanonicznego  $-dc_{00}$  jest sumą dwóch składników. Pierwszym jest przyrost wartości wiedzy inwestora  $\delta Q$ , a drugim – wzrost wartości przeciętnych poziomów dóbr w portfelu spowodowany ruchem cen w sektorze rynkowym.*

$$(5.19) \quad dc_{00} + \delta Q + \sum_{\lambda} \hat{p}_{\lambda} d\bar{c}_{\lambda} = 0.$$

II zasada zespołu kanonicznego. *Wartość  $-\delta Q$  utraconej wiedzy inwestora o sektorze rynku jest proporcjonalna do wzrostu entropii (dezorientacji) zespołu kanonicznego, do którego on należy*

$$\delta Q + T dS = 0.$$

Użycie oznaczenia  $\delta Q$  (zamiast narzucającego się  $dQ$ ) jest konieczne, gdyż forma różniczkowa  $\delta Q$  nie jest różniczką żadnej funkcji. W fizyce wielkości  $-dc_{00}$ ,  $\delta Q$  oraz  $\sum_{\lambda} \hat{p}_{\lambda} d\bar{c}_{\lambda}$  odnoszą się odpowiednio do: zmiany energii wewnętrznej układu, wchłoniętego przez niego ciepła i wykonanej nad nim pracy. W powyższym sensie w standardowej ekonomicznej statyce równowagi rozważano dotychczas jedynie procesy adiabatyczne [Zal78], czyli takie, dla których model ekonomiczny nie zmieniał swojej zawartości informacyjnej  $\delta Q = dS = 0$ .

Ujednolicając interpretację wyrażeń występujących w łączącym powyższe dwie zasady równaniu (5.17) dochodzimy do wniosku, że wielkość  $-T$  należy odczytywać jako cenę (koszt) jednostki entropii (dezorientacji). W portfelu kanonicznym jednostkowy wzrost dezinformacji  $S$  kosztuje  $T$  jednostek pieniężnych. Entropia portfela kanonicznego monotonicznie rośnie wraz ze wzrostem wartości bezwzględnej parametru  $T$ . Oznacza to, że zdezorientowanym inwestorom za błędy tej samej miary przychodzi płacić wyższą cenę aniżeli specjalistom. Jednak w przypadku temperatur ujemnych największe zyski z błędnych decyzji odnoszą nowicjusze. Portfel kanoniczny specjalisty (mała wartość  $S$ ) o ujemnej temperaturze przynosi ponadprzeciętne straty. Jednak może go skonstruować



jedynie specjalista wykorzystujący swe umiejętności *à rebours*. Po zmianie znaków wag  $\bar{p}_\lambda$  (która oznacza zajęcie pozycji krótkiej w aktywach portfela) portfel ów staje się źródłem nieprzeciętnych zysków. Czym wyższa jest klasa umiejętności specjalisty, tym mniejszą entropię i mniejszą wartość bezwzględną temperatury (ceny dezinformacji) ma jego zespół kanoniczny. Dzięki własności addytywności entropia rośnie liniowo wraz ze wzrostem wielkości sektora rynkowego (tak zachowujące się parametry termodynamiczne nazywamy ekstensywnymi [Zal78]). Temperatura portfela złożonego, zbudowanego z dwóch portfeli o jednakowej temperaturze, lecz operujących na różnych sektorach rynkowych, równa jest temperaturze jego składników<sup>5</sup>, więc lepiej od entropii nadaje się do liczbowej charakterystyki umiejętności specjalisty od inwestowania.

### § 9. Zrównoważone zespoły kanoniczne

Określając portfel kanoniczny w oparciu o jego wartość posiadamy swobodę w wyborze wag  $\bar{p}_\lambda$ . Zgodnie z ideą prawdopodobieństw apriorycznych Bayesa [Ste53] dla reprezentowania portfela cichego należałoby wybrać rozkład kanoniczny z wagami  $\bar{p}_\lambda$  odpowiadającymi wodom jego portfela, gdyż wtedy prawdopodobieństwa  $w_\lambda$  portfela kanonicznego byłyby jednakowe ( $T = \pm\infty$ ). Wydaje się jednak, że bardziej ogólne, a zarazem wolne od subiektywizmu decyzji cichego, jest przyjęcie nie równych prawdopodobieństw, lecz równych apriorycznych wag portfela kanonicznego  $\bar{p}_0 = \dots = \bar{p}_N = 1$ . Możemy także, wzorując się na konstrukcji większości indeksów giełdowych, przyjąć zbiór wag o postaci  $\bar{p}_0 = 0$ ,  $\bar{p}_1 = \dots = \bar{p}_N = 1$ , eliminując tym samym walutę z sektora rynkowego. Ten rodzaj urnowych portfeli kanonicznych nazwiemy *portfelami zrównoważonymi* (z walutą, bądź bez). Stosowanie portfeli zrównoważonych do pomiaru jakości inwestowania (przez wyznaczenie temperatury portfela zrównoważonego, która odpowiada osiągniętej wartości portfela inwestora) wydaje się najbardziej obiektywną metodą klasyfikowania umiejętności lokowania kapitału.



W rozdziale 1 została przedstawiona temperaturowa metryka rynku (wzór (1.16)), która odnosi się do portfela zrównoważonego.

<sup>5</sup> $T$  ma, jak każda inna cena, własność parametru intensywnego [Zal78]

W przypadku znajomości danych o bieżącej wielkości wymiany handlowej można zaproponować alternatywny wybór portfela kanonicznego. Skala obrotu towarem określa średni stopień zainteresowania nim, co wyróżnia portfele o wagach  $\bar{p}_\lambda$  równych odpowiednim wartościom obrotu rynkowego dobrem o numerze  $\lambda$  w chwili początkowej (której dotyczą ceny  $c_\lambda^*$ ).

### § 10. Nieznane rynkowe potencjały termodynamiczne



Korzystając z odpowiedniej inwolucji Legendre'a (rozdz. 4) sytuację inwestora rynkowego, zamiast wartością portfela, możemy opisywać potencjałem zależnym jedynie od cen (łącznie z temperaturą). Przez analogię do używanego w zastosowanym tu formalizmie nazewnictwa okreśmy ten potencjał mianem *wartości swobodnej*  $-F$  portfela kanonicznego. Ma on postać

$$(5.20) \quad F(\bar{c}_0, \dots, \bar{c}_N, T) = c_{00}(\bar{c}_0, \dots, \bar{c}_N, S) - T S.$$

Z powodu własności (5.18) prawa strona powyższej definicji nie zależy od entropii  $S$ . Po wyznaczeniu różniczki wartości swobodnej  $-F$  dochodzimy do wniosku, że wyrażone przy pomocy tego potencjału zasady zespołu kanonicznego (równoważne zasadom podanym w paragrafie 8 bieżącego rozdziału) przybierają postać następującego równania bilansu

$$(5.21) \quad dF(\bar{c}_0, \dots, \bar{c}_N, T) + S dT + \sum_{\lambda} \hat{p}_\lambda d\bar{c}_\lambda = 0.$$

Mnożąc strony formuły (5.16) przez  $T$  i porównując wynik z definicją (5.20) zauważymy, że wartość swobodna portfela wyraża się w prosty sposób przez zdefiniowaną w paragrafie 7 sumę statystyczną  $Z$

$$(5.22) \quad F + T \ln Z = 0.$$

Dzięki powyższej tożsamości suma statystyczna uzyskuje naturalną interpretację rynkową: jej logarytm jest wartością swobodną  $-F$  portfela kanonicznego, wyrażoną w aktualnych jednostkach kosztu  $T$  dezorientacji kanonicznego zespołu inwestorów. Wyrażając to samo za pomocą mnożnika  $\beta$  możemy stwierdzić, że wartość swobodna  $-F$  jest wartością funkcji  $\ln Z(\beta)$  przypadającą na jednostkę jej argumentu:

$$-F = \frac{\ln Z}{\beta}.$$

W związku z powyższym warto zauważyć ciekawą symetrię własności sumy statystycznej związanej z inwolucją  $c_{00} \leftrightarrow F$ . Otóż na podstawie tożsamości

(5.15) transformata Legendre'a wartości swobodnej, tj. wartość portfela  $-c_{00}$ , jest wielkością krańcową dla  $Z(\beta)$ :

$$-c_{00} = \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}.$$

Trafność użycia nazwy „wartość swobodna” dla potencjału  $F(\bar{c}_0, \dots, \bar{c}_N, T)$ , przyjętej ze względu na zaproponowaną przez Helmholtza podobnie brzmiącą nazwę fizycznego odpowiednika tej funkcji [Hua78], uzasadnimy w oparciu o wariant zasad zachowania portfeli kanonicznych, sformułowany w postaci równania (5.21). Załóżmy, że w trakcie procesu, którym steruje rynek poprzez reorientację wartości parametrów cenowych  $\bar{c}_\lambda$  zgodną z bilansem (5.21), klasa specjalisty-reprezentanta zespołu kanonicznego pozostaje stała ( $T = \text{constans}$ ). Wtedy swobodną (od skutków wyjścia z klasy inwestycyjnej) zmianę wartości przeciętnych stanów dóbr w portfelu  $\sum_\lambda \hat{p}_\lambda d\bar{c}_\lambda$  mierzy zmiana potencjału  $F$  (a nie zmiana wartości portfela  $c_{00}$ ). Obrazujące przebieg takiego procesu izokwanty powinniśmy nazywać izotermami, gdyż odnoszą się do sytuacji spełniających warunek  $T = \text{constans}$ . Stosując regułę de l'Hospitala w celu wyliczenia granicy wyrażenia (5.22) dla portfela zrównoważonego z walutą można się przekonać, że wartość swobodna  $-F$  zmierza dla  $T \rightarrow 0$  do wartości portfela  $c_{00}$ . Gdy  $T \rightarrow +0$  wartość  $c_{00}$  osiąga względną cenę  $\bar{c}_\lambda = \frac{c_\lambda}{c_\lambda^*}$  dobra o największym wzroście wartości rynkowej (jeśli ceny wszystkich dóbr sektora spadły względem waluty, to jest to cena  $\bar{c}_0 = 1$ ):

$$\begin{aligned} -\lim_{T \rightarrow 0} F &= -\lim_{T \rightarrow 0} c_{00}, \\ -\lim_{T \rightarrow +0} c_{00} &= \max(\bar{c}_0, \dots, \bar{c}_N). \end{aligned}$$

Ostatnia własność jest dobitnym argumentem za wyróżnieniem znaczenia portfeli zrównoważonych w klasie portfeli kanonicznych. W pełni zorientowany w trendach rynkowych inwestor, zdeterminowany jak nikt inny, bo nic nie stanowi dla niego tajemnicy ( $S = 0$ ), powinien osiągać w interesującym go sektorze rynku najwyższe z możliwych zyski. Funkcja  $c_{00}(T)$  posiada nieciągłość w temperaturze  $T = 0$ . Lewostronna granica tej funkcji w zerze wynosi

$$-\lim_{T \rightarrow +0} c_{00} = \min \bar{c}_0, \dots, \bar{c}_N.$$

Nieprzypadkowo w topologii parametru  $T$  najgorszy portfel sąsiaduje z portfelem najdroższym — wiedza ich posiadaczy jest pełna ( $S = 0$ ), jednak jeden z nich robi wszystko, by najwięcej stracić. Jest więc idealnym filantropem lub po prostu zajął względem tego portfela pozycję krótką.

Zasady zespołów kanonicznych można w sposób równoważny opisywać za pomocą określeń bazujących na potencjałach innych niż wartość portfela  $c_{00}(\bar{c}_0, \dots, \bar{c}_N, S)$  i wartość swobodna portfela  $F(\bar{c}_0, \dots, \bar{c}_N, T)$ . Brakujące dwa

potencjały otrzymamy z dowolnego, już znanego potencjału, przy pomocy transformacji Legendre'a<sup>6</sup>. Jedną z tych transformacji jest szczegółowo już opisana w przypadku  $S=0$ <sup>7</sup>, a teraz uogólniona na portfele kanoniczne wartość zasobów pieniężnych portfela  $\hat{p}_0(\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_N, S)$ . Druga to jeszcze nigdzie nie omawiana funkcja  $G(\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_N, T)$ , której odpowiednik w termodynamice procesów fizycznych nazywamy *entalpią swobodną* [Hua78]. Stąd można się domyśleć, że w fizyce odpowiednikiem funkcji wartości zasobów  $\hat{p}_0$  jest *entalpia*. Gdy w procesach rynkowych parametrami sterowania są parametry dualne do cen<sup>8</sup>, czyli przeciętne wartości początkowe  $\hat{p}_k$  dóbr w portfelu, to dotyczące nie zmieniającego klasy specjalisty izotermy przedstawiają ewolucję wartości dóbr portfela, skutkującą zmianą jego potencjału  $G$ . Już przed 120 laty odpowiednikami wszystkich czterech potencjałów  $c_{00}$ ,  $F$ ,  $\hat{p}_0$  i  $G$  biegle posługiwał się w swych badaniach Josiah Willard Gibbs [Gib78]. Niezwykle interesującym byłoby zbadanie konsekwencji, które wynikają z zasad zespołów kanonicznych, wyrażonych kolejno w języku każdego z czterech potencjałów. Warianty tych zasad, choć faktycznie opisują jeden i ten sam model rynku, oferują zaskakująco nowy punkt jego widzenia. Wyrażające je, formalnie odmienne równania bilansu, oznaczają różne, lecz równoważne techniki rachunkowości i nie chodzi tu o żadną, modną w ostatnich latach tzw. kreatywną księgowość, lecz o prawidłowo wykonane, acz nietrywialnie<sup>9</sup> inaczej postrzegane, sposoby bilansowania przeływów.

Naśladując losy kilku praw fizyki niektóre rządzące rynkiem prawa ekonomiczne mogą okazać się prostą konsekwencją omówionych w poprzednim rozdziale termodynamicznych tożsamości, zwanych równaniami Maxwella.

Zasady zespołów kanonicznych obowiązują dla dowolnego, wzbogaconego loterią o efekty losowe, modelu statyki procesów równowagi. Dlatego w kontekście rozkładów kanonicznych należałoby rozpoznać różne znane z ekonomii warianty funkcji-potencjałów, których różniczki charakteryzują się tym, że zależność występujących w nich parametrów  $\hat{p}_\lambda$  od zmiennych  $\bar{c}_0, \dots, \bar{c}_N$  nie jest stała (cokolwiek by te parametry i zmienne nie oznaczały). Przykładami tego typu potencjałów są funkcja Cobba-Douglasa i funkcja CES [Chi94]. Jest to ciekawy i obszerny temat, który tu został jedynie zasygnalizowany.

Część trzecia *Dwoistości wartości kapitału* proponuje kwantowy opis różnego rodzaju strategii sprzedaży i kupna. Taki model rynku nie wymaga uzupełniania metodami statystycznymi, gdyż elementy wysoce nieklasycznej probabilistyki są w nim już obecne. Teoria kwantów jest holistyczną koncepcją

<sup>6</sup>patrz rozdział 4

<sup>7</sup>patrz rozdz. 4

<sup>8</sup>por. rozdział 1

<sup>9</sup>różnice nie sprowadzają się do zmiany kolejności sumowania składników bilansu

widzenia świata, która pozwala wyprowadzić przedstawione tu zasady zespołów kanonicznych w formalizmie zredukowanych operatorów gęstości<sup>10</sup>. Dlatego możemy stwierdzić, że model IMM obejmuje także kwantowe gry rynkowe — obydwaj proponowane spojrzenia na rynek są w pełni konsyistentne.

### § 11. Przykład liczbowy

Niech sektor rynkowy prócz waluty obejmuje dwa dobra. Przyjmijmy, że jeden z uczestników rynku (Alicja, cicha) nabyła za połowę swoich aktywów finansowych dobro 1, a drugą połowę wydała na dobro 2. Inny inwestor (Bill, cichy) określił swój portfel zakupem dobra 1 do wysokości 25% posiadanego kapitału, którego resztę zachował w pieniądzu. Przyjmijmy dalej, że w interesującym nas okresie czasu dobro 1 staniało o 20%, a cena dobra 2 wzrosła o 30%. Wynika stąd że interesujące nas wartości parametrów  $\bar{c}_k$  są następujące

$$\bar{c}_1 = \frac{100\% - 20\%}{100\%} = 0.8 \quad \text{oraz} \quad \bar{c}_2 = \frac{100\% + 30\%}{100\%} = 1.3.$$

Załóżmy, że każdy z inwestorów dysponował jedną złotówką ( $c_{00}^* = 1$  zł). Po zmianie cen złotówka zainwestowana przez Alicję przynosi wartość

$$-c_{00}^A = \bar{c}_1 0.5 \text{ zł} + \bar{c}_2 0.5 \text{ zł} = 1.05 \text{ zł},$$

a złotówkowa inwestycja Billa daje wartość jego portfela równą

$$-c_{00}^B = 0.75 \text{ zł} + \bar{c}_1 0.25 \text{ zł} = 0.95 \text{ zł}.$$

Chcąc wyznaczyć temperatury Alicji i Billa możemy posłużyć się kalkulatorem, dla którego stosowny program zamieszczony jest w §2 *Uzupełnień*. Obliczone na podstawie danych  $c_{00}$ ,  $\bar{c}_1$  i  $\bar{c}_2$  wartości temperatur odpowiednich zrównoważonych zespołów kanonicznych z walutą są następujące  $T_A \simeq 2.55$  oraz  $T_B \simeq -0.46$  (dla większej czytelności podawane rezultaty posiadają dokładność jedynie kilku cyfr znaczących). Alicja osiągnęła lepszy wynik finansowy niż Bill, bo choć  $T_A > T_B$ , to jedynie Alicja odnosi zysk ze swej wiedzy (tylko cena  $T_A$  jednostki wiedzy jego zespołu kanonicznego jest dodatnia). Jednak autor wolałby Billa w roli doradcy inwestycyjnego, gdyż wiedza jego jest większa niż wiedza Alicji (bo jeśli  $|T_A| > |T_B|$ , to  $S_A > S_B$ ). Gdyby wsłuchiwać się w rady Billa, by móc jednocześnie postępować im na przekór (bo  $T_B < 0$ ) zajmując pozycję krótką do



<sup>10</sup>zob. [JO96]

wysokości 25% swego kapitału w dobrze I sektora rynkowego, można by było uzyskać wynik finansowy lepszy od Alicji.

Uważnie śledząc podobne do powyższych rachunki dojdziemy do wniosku, że ciekawa, na poziomie zasad zespołów kanonicznych, symetria pomiędzy portfelami o temperaturach  $T$  i  $-T$  niezupełnie odpowiada zajęciu w dobrach sektora pozycji długiej, bądź krótkiej, przez jednakowo dobrze poinformowanych inwestorów. Aby usunąć ten mankament należy przejść do termodynamicznego opisu opartego na wspomnianych w §8 portfelach współzmienniczych z kursem rynkowym. Pamiętać jednak należy, że pozostanie pewna asymetria proponowanego podejścia związana z portfelami zrównoważonymi. Równość wartości  $\bar{p}_\lambda$  zachodzi w konkretnej sytuacji cenowo-portfelowej, dlatego odnośnie innych notowań kursowych portfel, który był zrównoważony, zwykle zrównoważonym już nie jest.

---

## § 12. Portfele współzmiennicze z kursem

Powyżej opisana charakterystyka jakości inwestowania, która opiera się na temperaturze portfela kanonicznego odnoszącego się do wartości rynkowej dóbr, ignoruje wymóg współzmienniczości opisu rynku względem grupy odwzorowań rzutowych<sup>11</sup>. Mając na uwadze problemy wynikające z paradoksu równowagi cen [Pio97]<sup>12</sup>, autor jest przekonany o konieczności dostosowania formalizmu opisu portfeli i kursów rynkowych do postulatu współzmienniczości. By to uczynić, wystarczy odpowiednio zmodyfikować interpretację formuł występujących w poprzednich rozdziałach przez zastąpienie wartości portfeli  $c_{00}$  oraz parametrów cenowych  $\bar{c}_\lambda$ , logarytmami ich wartości bezwzględnych<sup>13</sup>:

$$(5.23) \quad \begin{aligned} \ln |c_{00}| &\longrightarrow -c_{00}, \\ \ln |\bar{c}_\lambda| &\longrightarrow \bar{c}_\lambda, \\ \frac{|\bar{c}_\lambda|}{|c_{00}|} \bar{p}_\lambda &\longrightarrow \bar{p}_\lambda. \end{aligned}$$

Analizując odwzorowanie (5.23) zauważymy, że gdy poprzednie wagi  $\bar{p}_\lambda$  (w cenowej interpretacji parametrów  $\bar{c}_\lambda$ ) są odwrotnie proporcjonalne do  $\bar{c}_\lambda$ , to nowe wagi  $\bar{p}_\lambda$  (dla logarytmów cen) są niezależne od cen. Interesuje nas teraz portfel

<sup>11</sup>patrz rozdział 1

<sup>12</sup>zob. też rozdział o dyfuzji cen i zysków w części trzeciej *Dwoistości*, gdzie zamieszczono uwagi na ten temat

<sup>13</sup>czyli całkami oznaczonymi różniczkowymi stóp procentowych mierzących tempa względnego wzrostu tych wielkości

kanoniczny o takiej własności, czyli poznany w rozdziale 1 portfel współzmienniczy z kursem rynkowym. Parametr  $-c_{00}$  nie opisuje już wartości portfela, lecz osiągnięty zysk. Rozkład kanoniczny wyznaczony w oparciu o zysk (a więc i wyliczona na jego podstawie entropia) zmienia się wraz ze zmianą logarytmów cen, którym, po transformacji, odpowiadają symbole  $\bar{c}_\lambda$ , obecne we wcześniejszych równaniach. Szczególnie prosta jest statystyczna waga waluty  $e^{\beta\bar{c}_0\bar{p}_0} = 1$ , gdyż dotyczy czynnika  $\bar{c}_0 = \ln 1 = 0$ .

Zmodyfikowane w powyżej opisany sposób dane o zmianach kursów cenowych, dla przykładu zamieszczonego w §11, są następujące:

$$\begin{aligned}\bar{c}_1 &= \ln 0.8 \simeq -0.223, \quad \bar{c}_2 = \ln 1.3 \simeq 0.262, \\ -c_{00}^A &= \ln 1.05 \simeq 0.049, \quad -c_{00}^B = \ln 0.95 \simeq -0.051.\end{aligned}$$

Nowe będą więc wartości temperatur portfeli Alicji i Billa, teraz określone na podstawie zespołów kanonicznych o współzmienniczych portfelach zrównoważonych w sektorze rynku z walutą. W celu wyznaczenia tych parametrów możemy skorzystać z kodu programu zamieszczonego w *Uzupełnieniach* §2, z siódmą linią zmienioną w na poniższą

$$\tanh^{-1}A \rightarrow Y : eY \rightarrow Y : (D \times Y^{\wedge}D + E \times Y^{\wedge}E) \div (1 + Y^{\wedge}D + Y^{\wedge}E) - C \rightarrow Y \downarrow.$$

Wyliczone temperatury przykładowych inwestorów, odnoszące się do współzmienniczych portfeli zrównoważonych, są następujące:  $T^A \simeq 1.09$  oraz  $T^B \simeq -0.59$ . Uwagi poczynione w poprzednim paragrafie, dotyczące przewagi informacji pochodzącej od przewrotnego Billa, pozostają nadal aktualne.

Takiego typu temperatur można używać w celach rankingowych w związku z dowolną grupą inwestorów, z których każdy mógłby działać w innym sektorze rynku, w różnym czasie i w dowolnie długim przedziale czasowym. Porównajmy dla przykładu naszych inwestorów z graczem Celina, która na rynku bliżej nieokreślonej waluty \$ i pewnego dobra  $\mathcal{E}$ , wykazującego czteroprocentowy wzrost ceny, osiągnęła 3.2% zysku. Modyfikując odpowiednio siódmą linię programu do postaci

$$\tanh^{-1}A \rightarrow Y : eY \rightarrow Y : D \times Y^{\wedge}D \div (1 + Y^{\wedge}D) - C \rightarrow Y \downarrow,$$

na podstawie danych

$$\bar{c}_{\mathcal{E}} = \ln 1.04 \simeq 0.039, \quad -c_{00}^C = \ln 1.032 \simeq 0.031$$

znajdujemy temperaturę Celiny  $T^C \simeq 0.26$ . Opierając się na wyznaczonych parametrach temperaturowych stwierdzamy, że Celina jest specjalistką posiadającą wiedzę większą niż Alicja, czy Bill ( $|T^A| > |T^B| > |T^C|$ ). Jako technikę dualną do przedstawionego sposobu pomiaru umiejętności inwestycyjnych można proponować m.in. ocenę wartości zadanego scenariusza spłaty kredytu, czy ocenę wartości cichego portfela obligacji (ewentualnie opcji) przy stochastycznym zachowaniu się stóp procentowych. W następnym rozdziale zapoznamy się

z sytuacją, w której specyfika konstruowanego portfela prowadzi do uogólnienia temperaturowego parametru zespołu kanonicznego na dziedzinę zespoloną.



## Temperatura dźwigni finansowej

Po rozszerzeniu zbioru dopuszczalnych wartości mnożnika Lagrange'a  $\beta$  na liczby zespolone staje się możliwym objęcie temperaturowym formalizmem zagadnień dotyczących specyficznej klasy portfeli, jakimi są dźwignie finansowe. Pojawiające się przy okazji ujemne prawdopodobieństwa w rozkładzie Gibbsa uzyskują formalnie uzasadnioną rację bytu. W części trzeciej tej książki przekonamy się, że miary prawdopodobieństwa nie spełniające warunku dodatniej określoności mogą dotyczyć znacznie szerszej klasy zagadnień ekonomicznych. Teraz ograniczmy się jedynie do przykładu ilustrującego potrzebę uwzględnienia w temperaturze portfela części urojonej. Autorzy pracy [PW00] omawiają niżej przedstawiony algorytm  $sbO$  w dwuwalutowym wariancie dla stałych stóp kapitalizacji ciągłej, odnosząc go do konkretnej sytuacji Polski pogrążonej w hiperinflacji 1990 roku. Swym artykułem sugerują iż ów mechanizm stanowił źródło niebywałej fortuny, do jakiej w tym okresie doszła spółka polskich przedsiębiorców: Bąsika i Gąsiorowskiego, którzy stosowali finansowy oscylator <sup>1</sup>  $sbO_{0.7}$ <sup>2</sup>. W bieżącym rozdziale starano się wykazać, że przekonanie takie nie znajduje uzasadnienia, gdyż ewentualne zyski z wykorzystania oscylatora  $sbO_{0.7}$  nie mogłyby doprowadzić do poważnego zwielokrotnienia kapitału. Dla wyjaśnienia bogactwa Bąsika i Gąsiorowskiego należy rozważyć oparty na innym źródle kapitału oscylator  $sbO_{1.93}$ .

---

### § 1. Oscylator z powolną obligacją

Załóżmy, że mamy do czynienia z sytuacją, gdy arbitrażer  $X$  ma do dyspozycji dwa banki:  $A$  i  $B$ , z których pierwszy jest gotów pożyczać w oparciu o stopę przedziałową<sup>3</sup>  $r_A(m, m+k)$ , a drugi — przyjmować kapitał w depozyt na stopę  $r_B(m, m+k)$  oraz, że  $r_A(m, m+k) \ll r_B(m, m+k)$ . Celem arbitrażera

<sup>1</sup>w rozdziale o stopie macierzowej (część druga *Dwoistości*) pojawia się tzw. oscylator harmoniczny, który dotyczy zjawisk finansowych innego rodzaju niż tu opisywane

<sup>2</sup>indeks 0.7 zostanie wyjaśniony w dalszej części tekstu

<sup>3</sup>patrz str. 38

będzie terminowe zadłużenie się w  $A$  oraz ulokowanie tak uzyskanego kapitału w  $B$  w ten sposób, by osiągnięty z przeprowadzonego przedsięwzięcia zysk był możliwie najwyższy. Autorzy pracy [PW00] skoncentrowali swoją uwagę na następującym algorytmie  $sbO$ , który miał ich zdaniem tłumaczyć niebywałe osiągnięcia finansowe Bąsika i Gąsiorowskiego w Polsce roku 1990.

**Chwila 0** – Bankier  $A$  uważa, że aktywa arbitrażera  $X$  (np. jego dom) w chwili  $N$  będą warte 1, więc przekazuje mu w chwili 0, w formie pożyczki na hipotekę przykładowego domu, kwotę  $e^{-r_A(0,N)}$ , za co  $X$  zobowiązany jest zwrócić  $A$  w chwili  $N$  kwotę 1. Bankier  $B$  oferuje za lokatę kwoty 1 w chwili 0 kwotę  $e^{r_B(0,N)}$  wypłacaną w chwili  $N$ . Oznacza to, że za ulokowaną w banku przez  $X$  sumę  $e^{-r_A(0,N)}$  bankier  $B$  zobowiązuje się, we wręczonej  $X$ -owi obligacji imiennej, wypłacić w chwili  $N$  kwotę

$$(6.1) \quad p_0 := e^{r_B(0,N) - r_A(0,N)}.$$

**Chwila  $k$**  – Przyjmując w depozyt nową obligację bankier  $A$  stwierdza, że obecnie ujawnione aktywa arbitrażera  $X$  (na poprzednie  $A$  posiada już obligacje) będą warte w chwili  $N$  kwotę  $p_{k-1}$ . Dlatego  $A$  wypłaca  $X$ -owi kwotę  $e^{-r_A(k,N)} p_{k-1}$ . Bankier  $B$  (zgodnie z prezentowanymi już regulami), przyjmując kwotę  $e^{-r_A(k,N)} p_{k-1}$ , wystawia zobowiązanie (nową obligację) zwrócenia arbitrażerowi  $X$  w chwili  $N$  dodatkowo kwoty:

$$(6.2) \quad p_k := e^{r_B(k,N) - r_A(k,N)} p_{k-1}.$$

Wielokrotnie wystawiany przez  $B$  obligacja jest dokumentem, umożliwiającym odzyskanie przez  $X$ -a od  $B$  w chwili  $N$  wymienionej w niej kwoty kapitału. Formuła rekurencyjna (6.2) stwierdza banalny fakt, że aby poznać kwotę  $p_k$ , wypisaną na  $k$ -tej obligacji, należy kwotę z poprzedniej obligacji pomnożyć przez czynnik kapitalizacji  $e^{r_B(k,N) - r_A(k,N)}$ . Korzystając z warunku początkowego (6.1) otrzymamy kwotę  $p_{N-1} = e^{\sum_{m=0}^{N-1} (r_B(m,N) - r_A(m,N))}$  widniejącą na wystawionej przed chwilą zakończenia arbitrażu, ostatniej obligacji. Jest to jedyna obligacja, która nie trafia do  $A$ . Pozostałe wystawione przez  $B$  obligacje pokrywają wartość zobowiązań  $X$ -a wobec  $A$ , uczynionych w chwilach  $k=1, \dots, N-1$ . Jeżeli  $X$  w chwili  $N$  wykupi od  $A$  zastaw hipoteczny, to prócz nieruchomości będzie właścicielem kwoty

$$(6.3) \quad e^{\sum_{m=0}^{N-1} (r_B(m,N) - r_A(m,N))} - 1.$$

Warto zwrócić uwagę, że w kolejnych krokach rozważanego algorytmu banki  $A$  i  $B$  mogłyby być fizycznie zupełnie różnymi podmiotami rynku.

Włącznie z nieruchomością pełny majątek  $X$ -a w chwili  $N$  ma wartość

$$e^{\sum_{m=0}^{N-1} (r_B(m,N) - r_A(m,N))},$$

więc przedziałowa stopa zwrotu z jego arbitrażu wynosi

$$(6.4) \quad r_{BA}(0, N) = \sum_{m=0}^{N-1} (r_B(m, N) - r_A(m, N))$$

i nie posiada własności addytywności (1.19). Owa interesująca i wymagająca badań cecha charakteryzuje wszelkie agresywne techniki arbitrażu. Addytywność stóp  $r(k, m)$  pozwala formułę (6.4) zapisać w prostszej postaci

$$(6.5) \quad \begin{aligned} r_{BA}(0, N) &= \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{k=m}^{N-1} (r_B(k, k+1) - r_A(k, k+1)) = \\ &= \sum_{k=1}^N k (r_B(k-1, k) - r_A(k-1, k)). \end{aligned}$$

Jeżeli chwile  $k=1, \dots, N$  będą równomiernie rozłożone, tzn. tak, by wszystkie wartości różnic  $r_B(k-1, k) - r_A(k-1, k)$  były jednakowe, to wtedy będą one wynosić  $r_B(k-1, k) - r_A(k-1, k) = \frac{1}{N} (r_B(0, N) - r_A(0, N))$ , a stopa  $r_{BA}(0, N)$  równomiernego *sbO* będzie wyrażać się wzorem

$$(6.6) \quad r_{BA}(0, N) = \frac{N+1}{2} (r_B(0, N) - r_A(0, N)).$$

W równomiernym *sbO* posiadaną przez  $X$ -a kwotę (6.3) określa formuła

$$(6.7) \quad e^{\frac{N+1}{2} (r_B(0, N) - r_A(0, N))} - 1$$

równoważna formule wyznaczonej w artykule [PW00] (wzór (16)). Jeśli  $r_B(0, N)$  jest najwyższą, dostępną na rynku finansowym w danym okresie stopą lokat, to warunkiem opłacalności arbitrażu przy pomocy równomiernego *sbO* jest, by stopa  $r_{BA}(0, N)$  była większa niż  $r_B(0, N)$ , czyli aby  $N > \frac{r_B(0, N) + r_A(0, N)}{r_B(0, N) - r_A(0, N)}$ . Za-uważmy jeszcze, że warunkiem koniecznym osiągnięcia wyznaczonego formułą (6.4) zysku z przedstawionego arbitrażu jest istnienie *gwarancji zamknięcia* (CW) tj. zapewnienia błyskawicznego przepływu w chwili  $N$  kolejno wszystkich obligacji i określonych nimi kapitałów w kierunku przeciwnym.

## § 2. Oscylator Bąsika-Gąsiorowskiego

Omówiona metoda arbitrażu *sbO* fizykom kojarzy się mniej z oscylatorem, a bardziej z powielającym mechanizmem tajemniczego silnika cieplnego, który na

skutek kontaktu z dwiema kąpielami ciepłymi (o temperaturach odpowiednio  $r_B$  i  $r_A$ ) jest źródłem zysku o wyjątkowych rozmiarach. Przy niezmienionej konstrukcji silnika najwyższą jego wydajność uzyskamy dla  $r_B = r_{\min}$  i  $r_A = r_{\max}$ , czyli odpowiednio dla najniższej i najwyższej stopy spośród wszystkich stóp zwrotu istniejących w danym okresie na rynku. Nazwa „oscylator”, po użyciu jej w enigmatycznym artykule [Gąs91], przyjęła się jako określenie sposobu funkcjonowania dźwigi finansowej, będącej narzędziem multiplikacji kapitału przez spółkę *Art B*<sup>4</sup>. W podjętej próbie wyjaśnienia działania oscylatora Bagsika-Gąsiorowskiego autorzy artykułu [PW00] założyli, że opierał się on na mechanizmie  $sbO_{0.8-0.1}$ , w którym kąpielą ciepłą była lokata złotówkowa w polskim banku (o rocznej stopie zwrotu  $r_B = 0.8$ ), a kąpielą zimną był kredyt dolarowy (w dolarach USA, o rocznych kosztach  $r_B = 0.1$ ). Różnica kursów złotówki do dolara była w tym okresie stała, a dwuwalutowość oscylatora potrzebna była jedynie do wykazania, że w przypadku braku sztywnego kursu tych walut oscylator Bagsika-Gąsiorowskiego nie mógłby się pojawić. Lansujący ten scenariusz Polacy zapomnieli, że istniały wtedy znacznie bardziej interesujące termostaty finansowe. Najcieplejszą  $r_{\max}$  jak i najzimniejszą stopę  $r_{\min}$  proponowała wtedy sama hiperinflacja. Przeciętne ceny towarów nieżywnościowych w ciągu 1990-go roku uległy zmianie o 591.2% (zgodnie z oficjalnymi danymi [Roc92], str.168), dla której otrzymujemy stopę przedziałową  $r_*$  równą  $\ln 6.912 \simeq 1.93$  (liczoną względem złotego). Wzrost cen usług był jeszcze wyższy, bo wynosił 780.7%, co daje stopę  $r_{\max} = \ln 8.807 \simeq 2.18$ . Stopa  $r_A = r_{\min} = 0$  (względem złotówki) była osiągalna poprzez niespłacanie nieoprocentowanego zadłużenia złotówkowego — funkcjonujące groteskowo polskie prawo nie oferowało mechanizmu egzekucji zrewaloryzowanych przynajmniej o stopę hiperinflacji długów. Jako źródło „ciepła” oscylatora wybierzemy ceny towarów nieżywnościowych  $r_b = r_*$ , gdyż specyfika usług czyni ich ceny trudnymi do wykorzystania w tym charakterze. Tak działający polski  $sbO_{1.93}$  miał wmontowane gwarancje *CW*. „Bankiem” *A* byli sprzedawcy, których *X* skazywał na zwłokę w przekazie należnej im nominalnej kwoty kapitału (wypłacał ją dopiero w chwili *N*), zaś „bankiem” *B* — przedsiębiorstwo należące do *X*-a. Wytwarzanie przez nie produktów stało się nieistotne. Jedynie musiało ono stanowić rezerwuar dóbr codziennego użytku i nieruchomości, naturalnie indeksowanych stopą  $r_{\max}$ . W chwili *N* realizacja *CW* przebiegała błyskawicznie. W jednej kolejce oczekiwali przerażeni wierzyciele, a w drugiej — konsumenci chcący jak najszybciej wyzbyć się gotówki. Domykający wszystko mechanizm kupna dóbr codziennego użytku z warunkiem odroczonej płatności także istniał: dyrektorów państwowych przedsiębiorstw można było nakłonić do formalnie legalnych, a tragicznych w skutkach transakcji.

Korzystając z powszechnie dostępnego archiwum polskiego dziennika internetowego *Donosy* [Don] możemy przekonać się, że w polskich bankach na

<sup>4</sup>jej udziałowcami byli Bagsik i Gąsiorowski

początku 1990 roku (2-gi styczeń) lokaty a vista oprocentowane były jedynie na poziomie 7%, a trzyletnie — 38%. Dopiero pod koniec roku (13 grudzień) oprocentowanie lokat rocznych wzrosło do 60%. Jeśli więc przyjmujemy, że złotówkowa lokata dawała w Polsce 1990 roku przeciętnie 50-cio procentowy zwrot, to prawdopodobnie wykonamy szacunek zawyżony. Dla takiej lokaty roczna przedziałowa stopa wynosi  $\ln 1.5 \simeq 0.4$ , a nie, jak założyli autorzy [PW00] —  $r_B(0, N) = 0.8$ . Dlatego sugerowany przez nich mechanizm powinien dawać Bagsikowi i Gąsiorowskiemu zyski opisywane oscylatorem  $sbO_{0.3}$  a nie  $sbO_{0.7}$ . Dochody określone formułą (6.3) dla oscylatorów  $sbO_{0.7}$ ,  $sbO_{0.3}$  i  $sbO_{1.93}$  przedstawia tabela 6.1. Pierwsza kolumna tych danych była prezentowana w pracy [PW00].

$r_B(0, N) - r_A(0, N) =$	0.7	0.3	1.93
$N = 1$	1.0138	0.34986	5.8895
2	1.8577	0.56831	17.084
3	3.0552	0.82212	46.465
4	4.7546	1.1170	123.59
5	7.1662	1.4596	326.01
6	10.588	1.8577	857.34
7	15.445	2.3201	2252.0
8	22.336	2.8574	5912.5
9	32.116	3.4817	15521
10	45.993	4.2070	40740
11	65.686	5.0497	$1.0694 \times 10^5$
12	93.632	6.0287	$2.8069 \times 10^5$

Tabela 6.1. Kwoty zysku z jednostki kapitału w arbitrażu  $sbO$ .

### § 3. Oscylator z powolną gotówką

W  $sbO$  arbitrażer  $X$  potrzebuje istotnej ilości czasu pomiędzy chwilą  $k-1$  a  $k$  (dla  $k = 1, \dots, N-1$ ) na dostarczenie bankierowi  $A$  obligacji. Przeciętną długość tego czasu oznaczymy przez  $\tau_{B \rightarrow A}$ . Autorzy pracy [PW00] sugerują możliwość funkcjonowania  $sbO$  w warunkach roku 1990, gdy bank  $A$  pożyczka dolary, bank  $B$  przyjmuje lokaty złotówkowe i tylko bank  $B$  znajduje się na

terenie Polski (wtedy kredyty dolarowe nie były w tym kraju dostępne). Wtedy, z przyczyn oczywistych, czas  $\tau_{B \rightarrow A}$  powinien być znacznie krótszy od czasu  $\tau_{A \rightarrow B}$ , w którym arbitrażer  $X$  przewozi, unikając ingerencji coraz bardziej podejrzliwych celników, coraz większe ilości kapitału od  $A$  do  $B$ , w postaci dóbr, bądź gotówki (w opisanym w poprzednim paragrafie oscylatorze  $sbO_{1.93}$  czas  $\tau_{A \rightarrow B}$  był równy 0, gdyż wtedy  $B = X$ ). Zignorujmy konieczność wskazania w tym mechanizmie źródła gwarancji  $CW$  i przyjmijmy, że autorzy prezentowanych w pracy [PW00] wyliczeń znali je. W przypadku spełnienia nierówności  $\tau_{A \rightarrow B} \gg \tau_{B \rightarrow A} \simeq 0$  algorytm  $sbO$  należy zastąpić następującym algorytmem  $scO$ :

**Chwila 0** – Bankier  $A$  uznaje, że aktywa arbitrażera  $X$  w chwili  $N$  będą warte 1, więc za zobowiązanie się do zwrotu w chwili  $N$  kwoty 1 pożycza  $X$ -owi kwotę  $p_0 = e^{-r_A(0,N)}$ .

**Chwila  $k$**  – W zamian za ulokowaną przez  $X$  sumę  $p_{k-1}$  bankier  $B$  zobowiązuje się obligacją wypłacić mu w chwili  $N$  kwotę  $e^{r_B(k,N)} p_{k-1}$ . Jeśli  $k < N-1$ , bankier  $A$  przyjmuje tę obligację w depozyt i wypłaca  $X$ -owi kwotę  $p_k := e^{r_B(k,N) - r_A(k,N)} p_{k-1}$ .

Zakładając istnienie  $CW$ , w analogiczny sposób jak w przypadku  $sbO$ , dojdziemy do kwoty jaką  $X$  osiąga z arbitrażu po zlikwidowaniu zastawu hipotecznego. Teraz jest ona równa

$$\begin{aligned} & e^{r_B(N-1,N)} \prod_{k=1}^{N-2} e^{r_B(k,N) - r_A(k,N)} e^{-r_A(0,N)} - 1 = \\ & = e^{\sum_{k=0}^{N-1} (r_B(k,N) - r_A(k,N))} e^{r_A(N-1,N) - r_B(0,N)} - 1 \end{aligned}$$

i jest mniejsza niż  $r_{BA}(0, N)$ , gdyż wynosi

$$(6.8) \quad r_{BA}(0, N) - (r_B(0, N) - r_A(N-1, N)),$$

co w przypadku arbitrażu równomiernego daje przedziałową stopę zysku  $\frac{N+1}{2} (r_B(0, N) - r_A(0, N)) - r_B(0, N) + \frac{r_A(0, N)}{N}$ . Dlatego hipotetyczny dwuwalutowy wariant oscylatora Bagsika-Gąsiorowskiego z gwarancjami  $CW$  powinien dawać dochody niższe niż prezentowane w tabeli 6.1 wyniki oscylatora  $sbO_{0.3}$ . Dla równomiernego oscylatora  $scO_{0.3}$  ( $N \leq 12$ ) niemultiplikatywny czynnik kapitalizacji  $U(0, N)$  jest mniejszy o 26 do 32 procent względem swojego odpowiednika w arbitrażu  $sbO_{0.3}$ <sup>5</sup>, więc algorytm ten przynosi efektywnie zysk taki, jak  $sbO_{0.3}$  skrócony o jeden krok.

W podobny sposób moglibyśmy rozważać zyski osiągalne przez całą jednoparametrową rodzinę analogicznych procedur arbitrażowych  $\lambda O$ , korzystających łącznie z pełnych  $N$  cykli operacji finansowych z  $A$  i  $B$  (w  $sbO$  jest

<sup>5</sup>ponieważ  $e^{r_A(0,1) - r_B(0,1)} \simeq 0.741$ ,  $e^{r_A(11,12) - r_B(0,12)} \simeq 0.676$

ich  $N+1$ ), gdzie liczba  $\lambda \in [0, 1]$  jest ilorazem czasów charakteryzujących arbitraż  $\frac{\tau_{A \rightarrow B}}{\tau_{B \rightarrow A}}$ ,  $\tau_{A \rightarrow B} + \tau_{B \rightarrow A} = 1$ . Dla przykładu, w przypadku gdy jako ekwiwalent kapitału  $X$  uzyskuje od  $A$  list kredytowy, czyli dokument wydany przez  $A$  upoważniający jego okaziciela do podjęcia od zaraz w dowolnym banku określonej w nim kwoty gotówki, czasy  $\tau_{A \rightarrow B}$  i  $\tau_{B \rightarrow A}$  mogłyby być jednakowe i wtedy mielibyśmy do czynienia z arbitrażem  $\frac{1}{2}O$ . Dwóch reprezentantów tej rodziny już poznaliśmy, gdyż  $0O = sbO$  oraz  $1O = scO$ . Logarytmiczna stopa zysku z  $\lambda O$  jest malejącą funkcją parametru  $\lambda$ . Wynika to stąd, że wraz ze wzrostem  $\lambda$  arbitrażer  $X$  stopniowo zmniejsza długość zwielokrotnionego, łącznego czasu wykorzystywania „rezerwuaru ciepła”  $B$ . Tak więc algorytmy  $sbO$  i  $scO$  wyznaczają skrajne wartości zysków osiąganych przy pomocy rodziny  $\lambda O$  procedur arbitrażowych.

---

#### § 4. Temperatura arbitrażu

W poprzednim rozdziale poznaliśmy metodę posługiwania się temperaturą<sup>6</sup> jako miarą osiąganych zysków. Parametr ten umożliwia porównywanie wyników finansowych osiąganych na różnych rynkach, w różnym czasie i w różnych przedziałach czasowych. Termodynamicznie sprzężona z nim entropia pozwala wyznaczać stopień profesjonalizmu eksperta finansowego. Rynek rozważany w bieżącym rozdziale odpowiada dwupoziomowemu układowi fizycznemu o energiach  $-r_{\max}$  i  $-r_{\min}$ . W oparciu o zasadę maksymalnej entropii grupom inwestorów osiągających jednakową przedziałową stopę zwrotu  $r$  przypisujemy reprezentujący ich rozkład kanoniczny. Temperatura  $T^{-1}$  tego rozkładu związana jest z odpowiadającą jej przedziałową stopą addytywną  $r$  równaniem:

$$(6.9) \quad T_r^{-1} = \ln \frac{r - r_{\min}}{r_{\max} - r},$$

gdzie  $r_{\min}$  i  $r_{\max}$  są odpowiednio najniższą i najwyższą stopą  $w$  w charakterystycznym dla  $r$  okresie czasowym. Wybierając jedną z gałęzi logarytmu wzór (6.9) możemy stosować dla dowolnych rzeczywistych wartości  $r$ . Dla stóp  $r \notin [r_{\min}, r_{\max}]$  przybierze on wtedy następującą postać:

$$T_r^{-1} = \ln \left( (-1) \cdot \frac{r - r_{\min}}{r - r_{\max}} \right) = i\pi + \ln \frac{r - r_{\min}}{r - r_{\max}}.$$

Przy czym, przeciwnie niż w sytuacji stóp addytywnych, rozważanych w rozdziale 5, arbitraż powinien być tym bardziej ceniony, im rzeczywista dodatnia część jego temperatury  $T^{-1}$  jest mniejsza. Może oscylatorami finansowymi powinniśmy nazywać tylko takie arbitraże, którym odpowiadają temperatury o

---

<sup>6</sup>tj. mnożnikiem Lagrange'a  $T^{-1}$  dla rozkładu Gibbsa

$r_B(0,N)-r_A(0,N)=$	0.3	1.93
$N = 1$	-1.8352	2.0438 = $T_*^{-1}$
2	-1.3466	$i\pi+1.3985$
3	-0.96825	$i\pi+0.83187$
4	-0.64536	$i\pi+0.60114$
5	-0.35222	$i\pi+0.47243$
6	-0.073428	$i\pi+0.38968$
7	0.20252	$i\pi+0.33182$
8	0.48643	$i\pi+0.28903$
9	0.79113	$i\pi+0.25606$
10	1.13565	$i\pi+0.22988$
11	1.5554	$i\pi+0.20857$
12	2.1375	$i\pi+0.19089$

Tabela 6.2. Temperatury  $T^{-1}$  arbitrażu  $sbO$ .

niezerowej części urojonej?

Wyrażenie opisujące entropię portfela z temperaturą o niezerowej części urojonej

$$S(r) = -\frac{r-r_{\min}}{r_{\max}-r_{\min}} \ln \frac{r-r_{\min}}{r_{\max}-r_{\min}} - \frac{r_{\max}-r}{r_{\max}-r_{\min}} \ln \frac{r_{\max}-r}{r_{\max}-r_{\min}}$$

ma postać taką samą, jak w przypadku stóp  $r \in [r_{\min}, r_{\max}]$ , jednak teraz ta miara informacji przyjmuje wartości zespolone.

Jeśli proponowaną tu metodą zmierzyć temperaturę  $sbO_{0.3}$ <sup>7</sup> i  $sbO_{1.93}$ <sup>8</sup>, to otrzymamy wyniki zamieszczone w tabeli 6.2. Pamiętamy z rozdziału 5, że ujemne temperatury określają działania finansowe niekorzystne nawet na rozwiniętym rynku efektywnym. Występujące w tabeli 6.2 temperatury  $T^{-1}$  mniejsze niż  $T_*^{-1} = 2.0438$  także dotyczą wyników negatywnych, gdyż w specyficznym okresie polskiej hiperinflacji temperatura  $T_*^{-1}$  osiągnięta była przez prawie całe polskie społeczeństwo, czyli tą jego część, która posiadała jedynie dobra codziennego użytku. Dlatego pierwsza kolumna tabeli 6.2 obrazuje wątpliwe osiągnięcia finansowe. W przypadku  $scO_{0.3}$  z  $CW$  dopiero wynik dla  $N = 13$  jest pozytywny, co praktycznie czyni wątpliwą możliwość pojawienia się takiego oscylatora jako sposobu szybkiego pomnażania kapitału w Polsce 1990-go roku.

<sup>7</sup>druga kolumna tabeli 6.1

<sup>8</sup>trzecia kolumna tabeli 6.1



A przecież pominęliśmy w rozważaniach niebagatelne koszty wdrażania i rozliczania tego arbitrażu. Interesującą byłaby próba odpowiedzi na pytanie czy, kiedy i na ile motorem napędowym polskiej hiperinflacji był prowadzony przez polskie banki arbitraż podobny do  $sbO_{0.3}$ , pozostający w równowadze ze stopą hiperinflacji, a polegający na udzielaniu kredytów złotówkowych i przyjmowaniu lokat dolarowych od obywateli. Hiperinflacja wygasła jednocześnie z wyczerpaniem się zasobów dewizowych drobnych ciułaczy. Wydaje się, że silnik ten skutecznie służył jej hamowaniu.





## **Część 2**

# **Algebraiczne własności stopy**

Klasyczna teoria obliczeń, która przez pół wieku była niepodważalną podstawą informatyki jest teraz zbędna chociaż, tak jak fizyka klasyczna, może być traktowana jako pewnego rodzaju przybliżenie.<sup>9</sup>

*David Deutsch, [Deu98]*

---

<sup>9</sup>tłum. J. Kowalski-Glikman

## Stopa macierzowa

Celem inwestycji kapitałowych jest maksymalizacja zysku. Zamiaru tego nie sposób osiągnąć przeznaczając cały kapitał na najbardziej rentowne przedsięwzięcia — takie sytuacje się nie zdarzają. Przyszła rentowność inwestycji rynkowej jest wielkością niepewną, dlatego inwestor tworzy złożone koszyki, zawierające lokaty kapitałowe o możliwie odmiennym charakterze, działaniem swoim dywersyfikując ryzyko przedsięwzięcia. Opis ewolucji takiego wielowymiarowego kapitału staje się pożądanym dla charakterystyki ilościowych zależności dotyczących procesów inwestycyjnych, szczególnie tych, które wymykają się pojęciom tradycyjnej matematyki finansowej [DS96]. W zależności od punktu widzenia, w każdym koszyku kapitałowym możemy, prócz ilościowych zmian poszczególnych składników, dostrzec przepływy między jego komponentami, patrz niżej, przykład 2.1. Przepływy kapitału mogą być rejestrowane nawet wtedy, gdy nie zapada żadna decyzja o operacjach kapitałowych. Sytuacje takie, wymagające opisu macierzowego, stawiają nas przed koniecznością uogólnienia rachunku stóp procentowych w sposób pozwalający jednolicie traktować stopy wzrostu i stopy przepływu kapitału. W rozdziale tym zajmiemy się konsekwentną i możliwie różnorodną postacią takiego formalizmu, wyposażonego w kontekst finansowy. Ów rachunek, od dawna z powodzeniem stosowany w innych dyscyplinach, wydaje się być odpowiednim narzędziem, prowadzącym do poszerzenia całej dziedziny matematyki finansowej na koszyki dóbr dowolnego typu. Może algebra liniowa, będąca językiem sformułowań wielu modeli ekonomicznych, zostanie zaakceptowana w roli rachunku przydatnego w konstrukcji elementarnych wskaźników rentowności przedsięwzięć inwestycyjnych.

---

### § 1. Liniowe jednorodne procesy kapitałowe

**1.1. Prosty przykład** Rozważmy kapitał bankiera składający się z dwóch komponent:  $k_1$  – kwoty pożyczonej klientowi i  $k_2$  – pozostałych aktywów. Niech argument  $l$ , będący liczbą

całkowitą  $l \in \mathbb{Z}$ , numeruje np. upływające lata (choć nic nie stoi na przeszkodzie, by były to dowolne interwały czasowe, niekoniecznie tej samej długości). Proces zmiany kapitału bankiera, dotyczący każdej z kwot  $k_1$  i  $k_2$ , przedstawia się następująco.

**Ad  $k_1(l)$**  – Zgodnie ze stopą oprocentowania  $\alpha_1(l)$ , na jaką bankier udzielił kredytu, wzrost składnika  $k_1(l)$  wynosi  $\alpha_1(l)k_1(l)$ . Poza tym kwota niezwróconej części kredytu  $k_1(l)$  maleje o wielkość raty spłaty  $\beta(l)k_1(l)$ , której wysokość określa stopa  $\beta(l)$ .

**Ad  $k_2(l)$**  – Kapitał  $k_2(l)$  powiększa się o kwotę  $\beta(l)k_1(l)$  spłaty kredytu. Dodatkowo, będąc ulokowany np. w płynnych papierach wartościowych o rocznej stopie zwrotu  $\alpha_2(l)$ , wzrasta on o kwotę  $\alpha_2(l)k_2(l)$ .

Składniki kapitału bankiera tworzą koszyk  $\mathbf{k}(l) := (k_1(l), k_2(l))$ . Jest on elementem dwuwymiarowej rzeczywistej przestrzeni wektorowej  $\mathbb{R}^2$ . Układ równań opisujących ewolucję takiego koszyka ma postać:

$$(7.1) \quad \begin{aligned} k_1(l+1) &= (1 + \alpha_1(l) - \beta(l)) k_1(l), \\ k_2(l+1) &= \beta(l) k_1(l) + (1 + \alpha_2(l)) k_2(l). \end{aligned}$$

Ujemne wartości składowych koszyka  $k_i(l)$ ,  $i = 1, 2$ , interpretujemy jako zobowiązania bankiera.

**1.2. Dygresja** Inne niż liniowe względem pozostałego długu raty spłaty, czy formalnie tożsame im należności (np. koszty obsługi kredytu, podatki itp.) daje się przedstawić w postaci spłaty liniowej po odpowiednim zmodyfikowaniu czynnika  $\beta(l)$ , bowiem może on ulegać zmianom wraz z upływem czasu  $l$ . W szczególności różne zobowiązania kredytobiorcy względem bankiera mogą zostać ujęte za pomocą wyrażenia będącego w zmiennej proporcji do wysokości niespłaconego kredytu, co czyni bardzo szerokim zakres stosowalności takiego opisu. Dopisane do prawych stron równań wyrażenia niejednorodne mogą zostać wyeliminowane poprzez pomnożenie ich przez utworzoną w tym celu nową składową koszyka  $k_3$ , z definicji niezależną od czasu  $l$ .

**1.3. Procent w przykładzie 1.1** Opisany w przykładzie 1.1 proces ewolucji kapitałowej można przedstawić tak, by wszelkie zmiany składowych koszyka wyrażone były jedynie jako zmiany procentowe tychże składowych, czyli jako autonomiczne zmiany poszczególnych składników. Dla przejrzystości sytuacji założmy chwilowo, że w trakcie procesu wszystkie stopy  $\alpha_1(l) = \alpha_1$ ,  $\alpha_2(l) = \alpha_2$  i  $\beta(l) = \beta$  z upływem czasu nie ulegają zmianom oraz, że stopy wzrostów są różne,  $\alpha_1 \neq \alpha_2$ . Koszyk kapitałowy, jako element przestrzeni wektorowej, może być opisywany jako kombinacja liniowa innych koszyków [BB74]. W przestrzeni wektorowej koszyków wybierzmy więc nową bazę tak, aby ten sam kapitał bankiera wyrażał się teraz następującymi składnikami.

$k'_1(l)$  – jest to, jak w poprzedniej bazie, kwota pożyczona klientowi, czyli

$$k'_1(l) = k_1(l),$$

$k'_2(l)$  – kwota ta jest sumą kwot koszyka składającego się po części z kwoty pożyczonej klientowi oraz po części z pozostałych aktywów bankiera, przy czym na każde  $\beta$  części pożyczki przypada  $\alpha_2 - \alpha_1 + \beta$  części pozostałych aktywów bankiera, czyli

$$k'_2(l) = \beta k_1(l) + (\alpha_2 - \alpha_1 + \beta) k_2(l).$$

W nowym układzie współrzędnych równania (7.1) opisujące zmiany koszyka separują się, przybierając następującą postać

$$\begin{aligned} k'_1(l+1) &= (1 + \alpha_1 - \beta) k'_1(l), \\ k'_2(l+1) &= (1 + \alpha_2) k'_2(l). \end{aligned}$$

Nie obserwujemy już żadnych przepływów, a składniki koszyka zmieniają się teraz zgodnie ze stopami procentowymi  $\alpha_1 - \beta$  (dla pierwszej składowej) i  $\alpha_2$  (dla drugiej). Formalizm matematyki finansowej nie powinien zależeć od specyfiki wyboru bazy opisu koszyków kapitałowych. Niżej przedstawione definicje stóp macierzowych wydają się podejściem rachunkowym spełniającym ten postulat.

**1.4. Uogólnienie** Procesy kapitałowe, których dotyczy przykład 1.1, opisują jednorodne układy różnicowych równań liniowych, w notacji macierzowej posiadające postać:

$$(7.2) \quad \mathbf{k}(l+1) - \mathbf{k}(l) = \underline{\mathbf{R}}(l) \mathbf{k}(l), \text{ czyli } \mathbf{k}(l+1) = (\mathbf{I} + \underline{\mathbf{R}}(l)) \mathbf{k}(l),$$

gdzie  $\mathbf{k}(l) \in \mathbb{R}^M$ , zaś  $\underline{\mathbf{R}}(l)$  oraz  $\mathbf{I}$  są macierzami rzeczywistymi o wymiarach  $M \times M$  ( $\mathbf{I}$  jest macierzą jednostkową). Zgodnie z przyjętym standardem<sup>1</sup> przestrzeń  $\mathbb{R}^M$  wszystkich możliwych koszyków nazywać będziemy *przestrzenią fazową koszyków*, a jednorodny liniowy układ równań różniczkowych, bądź różnicowych, pierwszego rzędu (np. w postaci (7.2)) *równaniem ruchu koszyka*.

W przedstawionym przykładzie  $M=2$ , a macierz  $\underline{\mathbf{R}}(l)$  jest następująca:

$$(7.3) \quad \underline{\mathbf{R}}(l) = \begin{pmatrix} \alpha_1(l) - \beta(l) & 0 \\ \beta(l) & \alpha_2(l) \end{pmatrix}.$$

Jeżeli przyjmiemy, że śledzimy ewolucję koszyka od chwili  $p$ , to ustalając warunek początkowy  $\mathbf{k}(p)$  otrzymujemy następujące rozwiązanie równania ruchu (7.2):

$$(7.4) \quad \mathbf{k}(r) = \left( \mathcal{T} \prod_{s=p}^{r-1} (\mathbf{I} + \underline{\mathbf{R}}(s)) \right) \mathbf{k}(p).$$

<sup>1</sup>zob. np. [Arn75]

Operator  $\mathcal{T}^2$  we wzorze (7.4) porządkuje chronologicznie wszystkie macierze po jego prawej stronie<sup>3</sup>, czyli

$$\mathcal{T} \prod_{s=p}^{p+n} \mathbf{A}(s) = \mathbf{A}(p+n) \mathbf{A}(p+(n-1)) \dots \mathbf{A}(p+1) \mathbf{A}(p)$$

dla dowolnego ciągu macierzy  $\mathbf{A}(s)$ .

Macierz  $\mathcal{T} \prod_{s=p}^{r-1} (\mathbf{I} + \mathbf{R}(s))$ , bardziej szczegółowo niż iloraz  $\frac{\sum_{i=1}^M k_i(r)}{\sum_{i=1}^M k_i(p)}$ , informuje o zmianie kapitału koszyka. Nawiązując, tu i w dalszym tekście, do nazewnictwa dla wariantu  $M=1$  opisanego w [KP99], macierz  $\mathbf{R}(l)$  z równania ruchu (7.2) określimy mianem *macierzowej kredytowej stopy zwrotu*, bądź *macierzowej stopy dolnej*. Przymiotnik „dolna” odnosi się do sposobu wyznaczania przyrostów wektora  $\mathbf{k}(l)$ . Zmiany te ujmowane są jako wartość odwzorowania liniowego na wektorze koszyka  $\mathbf{k}(l)$  w chwili  $l$  poprzedzającej tą zmianę. Możliwość stosowania standardowego rachunku stóp procentowych w przypadku przykładu 1.1 zależała od sposobu opisu koszyka (wyboru bazy). Dlatego naturalnym rozwiązaniem jest traktowanie stopy wzrostu jako obiektu złożonego  $\mathbf{R}(s)$ , przy zmianie układu odniesienia stosownie transformującego się według znanych prawideł. Z uwagi na procesy kapitałowe przebiegające w wielowymiarowej przestrzeni fazowej określenie „stopa kredytowa” wydaje się autorowi mniej dezinformujące niż określenie „stopa procentowa”.

Rozważmy procesy, dla których macierz  $\mathbf{I} + \mathbf{R}(l)$  jest nieosobliwa. Wtedy, wprowadzając pojęcie *macierzowej dyskontowej stopy zwrotu*, bądź *macierzowej stopy górnej*  $\overline{\mathbf{R}}(l)$ , równanie ruchu (7.2) można przeformułować do następującej postaci:

$$(7.5) \quad \mathbf{k}(l+1) - \mathbf{k}(l) = \overline{\mathbf{R}}(l) \mathbf{k}(l+1).$$

Porównując wzory (7.2) i (7.5) otrzymamy związek pomiędzy obydwoma typami wprowadzonych stóp macierzowych:

$$(7.6) \quad (\mathbf{I} + \mathbf{R}(l)) (\mathbf{I} - \overline{\mathbf{R}}(l)) = (\mathbf{I} - \overline{\mathbf{R}}(l)) (\mathbf{I} + \mathbf{R}(l)) = \mathbf{I}.$$

Rozwiązując powyższe równanie ze względu na np.  $\mathbf{R}(l)$ , otrzymamy następujący wzór:

$$(7.7) \quad \mathbf{R}(l) = \overline{\mathbf{R}}(l) + \overline{\mathbf{R}}^2(l) + \overline{\mathbf{R}}^3(l) + \dots$$

Łatwo teraz dostrzec, że (dla ustalonego argumentu  $l$ ) stopy macierzowe są przemiennie, tzn.  $\mathbf{R}(l)\overline{\mathbf{R}}(l) = \overline{\mathbf{R}}(l)\mathbf{R}(l)$ . Zależność (7.7) pomiędzy stopami jest często interpretowana jako uwzględnienie stopy dyskontowej w przyroście kapitału poprzez dodawanie wszystkich odsetek od odsetek (ciąg geometryczny)

<sup>2</sup>zob. [Mau74]

<sup>3</sup>tak, aby te z argumentami późniejszymi znajdowały się na lewo macierzy o argumentach wcześniejszych



w konwencji kapitalizacji z góry<sup>4</sup>. Odpowiedni do (7.7) wzór na  $\bar{\mathbf{R}}(l)$  będzie podobny, różniąc się jedynie znakami „-” przy parzystych potęgach stóp z lewej strony równości (7.7), bowiem

$$-\bar{\mathbf{R}}(l) = (-\mathbf{R}(l)) + (-\mathbf{R}(l))^2 + (-\mathbf{R}(l))^3 + \dots$$

Gdy dokonamy formalnej zmiany kierunku upływu czasu, stopy kredytowa i dyskontowa, zmieniając znaki, zamienią się rolami, co w konsekwencji skutkuje symetriami zachodzącymi pomiędzy formułami zawierającymi te macierze. Aby każdy z już wypisanych wzorów posiadał, w powyższym sensie, swój odpowiednik, należy jeszcze wypisać stosownie przetransformowaną formułę (7.4), przedstawiającą rozwiązanie równania ruchu. Po wielokrotnym wykorzystaniu tożsamości (7.6) rozwiązanie to przybiera następującą postać

$$(7.8) \quad \mathbf{k}(p) = \left( \mathcal{T}' \prod_{s=p}^{r-1} (\mathbf{I} - \bar{\mathbf{R}}(s)) \right) \mathbf{k}(r),$$

gdzie  $\mathcal{T}'$  jest operatorem uporządkowania antychronologicznego, ustawiającym stopy macierzowe  $\bar{\mathbf{R}}(s)$  w odwrotnej kolejności niż operator  $\mathcal{T}$ .

W rozwiązaniach (7.4) i (7.8) operatory  $\mathcal{T}$  i  $\mathcal{T}'$  można pominąć, gdy stopy macierzowe dotyczące różnych chwil są przemienne. Jest tak dla  $M = 1$ , bądź dla dowolnego  $M$ , jeżeli stopy macierzowe są funkcją stałą argumentu czasowego.

## § 2. Interpretacja macierzowej stopy zwrotu

Porównując dowolną postać macierzy  $\mathbf{R}(l) = (\underline{R}_{ij}(l))$  z jej postacią (7.3), występującą w przykładzie 1.1, dochodzimy do wniosku, że pozadiagonalne elementy macierzy, czyli liczby  $\underline{R}_{ij}(l)$  dla  $i \neq j$ , określają, jaka część kapitału  $j$ -tej składowej koszyka wpływa do składowej  $i$ -tej koszyka.

Znaczenie elementów diagonalnych  $\underline{R}_{ii}(l)$  jest odmienne. Stopa wzrostu  $i$ -tej składowej koszyka jest równa  $\alpha_i(l) = \underline{R}_{ii}(l) - \sum_{j \neq i} \underline{R}_{ji}(l)$ , czyli stanowi wartość elementu diagonalnego, skorygowaną o wszystkie wypływy kapitału, dotyczące składowej  $k_i(l)$  koszyka.

Należy podkreślić, że wpływy i wzrosty z jednej strony oraz wypływy i spadki z drugiej, nie muszą oznaczać odpowiednio zysków oraz strat dotyczących składowej koszyka, dla której wyznaczają zmiany. Sytuacja zależy od znaku wartości kapitału, do którego zmiany są proporcjonalne. Gdy kapitał jest długiem, to zmiany oznaczają proces o charakterze zgoła przeciwnym — utrata części zobowiązań jest korzystna dla dłużnika.

<sup>4</sup>zob. np. [DS96]

Powyższa interpretacja opiera się na dekompozycji stopy macierzowej  $\underline{\mathbf{R}} = \underline{\mathbf{C}} + \underline{\mathbf{D}}$ , gdzie w macierzy  $\underline{\mathbf{C}}$  suma wyrazów każdej kolumny równa jest zeru (dlatego możemy ją nazywać macierzą przepływów), a macierz  $\underline{\mathbf{D}}$  jest macierzą diagonalną (macierz wzrostów). Jedynie przy ustalonej bazie przestrzeni fazowej taka dekompozycja zadana jest w sposób jednoznaczny. Rozszerzenie pojęć matematyki finansowej na macierze staje się konieczne, gdy nie sposób sprawdzić (*via* przekształcenie podobieństwa) opisu zmian kapitałowych do sytuacji, w której macierz przepływów  $\underline{\mathbf{C}}$  jest zerowa.

### 2.1. Przykład

- (i) – Zawężmy proces z przykładu 1.1 do przypadków, gdy  $\beta(l) \equiv 0$ , współczynniki  $\alpha_i$  nie zależą od czasu  $l$ , a drugi z nich jest dwa razy większy od pierwszego. Wtedy dolna stopa macierzowa jest równa

$$(7.9) \quad \underline{\mathbf{R}} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 2\alpha \end{pmatrix}.$$

Wyznaczona na podstawie tożsamości (7.6) odpowiednia górna stopa macierzowa wynosi

$$\overline{\mathbf{R}} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{1+\alpha} & 0 \\ 0 & \frac{2\alpha}{1+2\alpha} \end{pmatrix}.$$

Proces składa się jedynie z macierzy wzrostów, bowiem macierz przepływów jest zerowa. Zyski można analizować w oparciu o autonomiczną ewolucję w ramach jednowymiarowych podprzestrzeni przestrzeni fazowej, stosując do opisu klasyczne pojęcia stóp procentowych.

- (ii) – Podobnie jak w paragrafie 1, na ten sam proces możemy spojrzeć z odmiennego punktu widzenia, opisując go we współrzędnych nowej bazy przestrzeni koszyków. Niech baza odniesienia składa się ze zobowiązań klienta oraz ze wszystkich aktywów kapitałowych bankiera. Wtedy równanie (7.1) przybierze postać:

$$(7.10) \quad \begin{aligned} k_1^\diamond(l+1) &= (1+\alpha)k_1^\diamond(l), \\ k_2^\diamond(l+1) &= -\alpha k_1^\diamond(l) + (1+2\alpha)k_2^\diamond(l). \end{aligned}$$

Macierz przepływów, określona równaniem ruchu (7.10), jest teraz niezerowa i wynosi

$$\underline{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix},$$

zaś macierz wzrostów wynosi

$$\underline{\mathbf{D}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2\alpha \end{pmatrix}.$$

Dług klienta  $k_1^\diamond(l)$  zmienia się tak samo jak w poprzednim oglądzie sytuacji, choć nie na skutek autonomicznego wzrostu, lecz jedynie dzięki

wpływowi kapitału bankiera. Cały kapitał bankiera wzrasta według stopy takiej samej, jaka dotyczyła lokaty  $k_2(l)$ .

(iii) – Wyznaczona w nowej bazie na podstawie wzoru (7.6) górna stopa macierzowa dla równania ruchu (7.10) ma postać

$$\bar{\mathbf{R}} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{1+\alpha} & 0 \\ -\frac{\alpha}{(1+\alpha)(1+2\alpha)} & \frac{2\alpha}{1+2\alpha} \end{pmatrix}$$

i składa się z następujących macierzy przepływów i wzrostów

$$\bar{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{(1+\alpha)(1+2\alpha)} & 0 \\ -\frac{\alpha}{(1+\alpha)(1+2\alpha)} & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{D}} = \begin{pmatrix} \frac{2\alpha^2}{(1+\alpha)(1+2\alpha)} & 0 \\ 0 & \frac{2\alpha}{1+2\alpha} \end{pmatrix}.$$

Zaprezentowane różne sposoby (i), (ii), (iii) spojrzenia na ten sam proces kapitałowy są jednakowo poprawne i sensowne. Porównując konwencję kredytową w wariancie (ii) z konwencją dyskontową (iii) dostrzegamy istotną różnicę pomiędzy macierzami  $\underline{\mathbf{D}}$  i  $\bar{\mathbf{D}}$  – raz wzrost pierwszej składowej koszyka jest jedynie efektem przepływów, w drugim przypadku składowa ta ma częściową autonomię swojego wzrostu. Wskazana interpretacyjna różnica, którą warto by nazwać *paradoksem stóp różnicowych*, może być przyczyną wielu finansowych nadużyć, podobnie jak ma to miejsce w przypadkach nieoprocentowania zaległych odsetek przy stosowaniu kapitalizacji prostej.

Norma dowolnej macierzy  $\underline{\mathbf{R}}(l)$ , czyli

$$(7.11) \quad \|\underline{\mathbf{R}}(l)\| := \sup_{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^M \setminus \{0\}} \frac{\|\underline{\mathbf{R}}(l)\mathbf{k}\|}{\|\mathbf{k}\|},$$

gdzie  $\|\mathbf{k}\|$  jest długością wektora  $\mathbf{k}$  (analizę własności metrycznych przestrzeni koszyków rozważana była w rozdziale 1), przedstawia najwyższą stopę zmiany kapitału, jaką daje inwestycja wybrana optymalnie spośród wszystkich przedsięwzięć bankiera. Przy czym wektor(-y)  $\mathbf{k}_0$ , na którym(-ych) powyższy iloraz osiąga *supremum*, wyznacza(-ją) ów ekstremalny wzrost. Gdy kapitał  $\mathbf{k}_0$  jest dobrem pożądanym, norma wyznacza największy sukces inwestora, jeśli zaś są to długi – mierzy najdotkliwszą stratę.

Interpretacja stopy  $\bar{\mathbf{R}}$  jest analogiczna jak macierzy  $\underline{\mathbf{R}}$ , z tą różnicą, że stopa  $\bar{\mathbf{R}}$  zamiast (jak  $\underline{\mathbf{R}}$ ) określać zmiany kapitałowe względem poprzedniego okresu rozliczeniowego, dotyczy zbliżającej się chwili rozliczenia. Konwencję kredytu zastępuje konwencja dyskonta. Przy zmianie kierunku czasu znaki „+”



i „–” przy stopach macierzowych w tożsamości (7.6) powinny być zmienione na przeciwne, chyba że wprowadzimy zasadę, w której dodatnie stopy wyrażają ubywanie kapitału, a przepływy pomiędzy składowymi koszyka odbywają się w kierunku przeciwnym. Dowolność konwencji przestaje obowiązywać dla procesów nieodwracalnych czyli wtedy, gdy macierze  $\underline{\mathbf{R}}(l)$  lub  $\overline{\mathbf{R}}(l)$  stają się osobliwe.

### § 3. Formalizm ciągłego opisu kredytowania

By rachunek kapitałowy był czytelny oraz użyteczny dla praktyków, formalne rozwiązanie równania ruchu w postaci (7.4) modelujemy numerycznie, bądź przedstawiamy w postaci zwartej<sup>5</sup>, nazywając ją ścisłym rozwiązaniem równania (7.2). W tym drugim przypadku dla osiągnięcia celu można posłużyć się różnymi znanymi technikami matematycznymi. Jedną z nich jest przejście graniczne prowadzące od opisu modeli przy pomocy liniowych równań różnicowych, do modelowania zmian kapitału za pomocą równań różniczkowych. By przedstawić ową metodę założymy, że rozważamy skale czasowe takie, że względem nich okres czasu, po upływie którego obliczamy zmiany składowych koszyka, jest zaniedbywalnie mały i wynosi  $\tau = t_{l+1} - t_l$ . Po przeskalowaniu dziedziny czasowej koszyka, równanie ruchu (7.2) możemy przepisać w postaci:

$$\frac{\mathbf{k}(t_l + \tau) - \mathbf{k}(t_l)}{\tau} = \frac{\mathbf{R}(l)}{\tau} \mathbf{k}(t_l).$$

Przejście graniczne  $\tau \rightarrow 0$  prowadzi do następującego układu równań różniczkowych:

$$(7.12) \quad \frac{d\mathbf{k}(t)}{dt} = \mathbf{R}(t) \mathbf{k}(t),$$

gdzie  $\mathbf{R}(t) := \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\mathbf{R}(l)}{\tau} \Big|_{t=t_l}$  (dolne i górne stopy macierzowe zależą od długości okresu rozliczeniowego  $\tau = t_{l+1} - t_l$ , więc licznik ilorazu o granicy  $\mathbf{R}(t)$  jest funkcją zmiennej  $\tau$ ). Macierz  $\mathbf{R}(t)$  nazwiemy *różniczkową stopą macierzową*<sup>6</sup>.

Mimo konieczności wykonywania fizycznych operacji rozliczeń, wyznaczony macierzą  $\mathbf{R}(t)$  opis odbywających się na ciągłej dziedzinie czasowej wzrostów i

<sup>5</sup>zob. np. [GKP96]

<sup>6</sup>w paragrafie 1 rozdziału 3 zdefiniowaliśmy już tę stopę w przypadku jednowymiarowym

przepliwów między składnikami koszyka jest konwencją realistyczną. Jej wdrożenie w dziedzinę praktycznej działalności podmiotów rynku kapitałowego może napotykać jedynie przeszkody o charakterze psychologicznym. Komentarz do zagadnienia rozliczeń znajduje się w następnym paragrafie.

Formalne rozwiązanie równania ruchu (7.12) ma postać:

$$(7.13) \quad \mathbf{k}(t) = \left( \mathcal{T} e^{\int_{t_0}^t \mathbf{R}(t') dt'} \right) \mathbf{k}(t_0).$$

Chronologicznie uporządkowana funkcja wykładnicza jest nieskończonym szeregiem, zwanym niekiedy *matrycantem* [Ste71] macierzowej stopy różniczkowej

$$\mathcal{T} e^{\int_{t_0}^t \mathbf{R}(t') dt'} = \mathbf{I} + \int_{t_0}^t \mathbf{R}(t_1) dt_1 + \int_{t_0}^t \mathbf{R}(t_1) \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{R}(t_2) dt_2 dt_1 + \dots$$

Jeżeli różniczkowa stopa macierzowa nie zmienia się z upływem czasu ( $\mathbf{R}(t) \equiv \mathbf{R}_0$ ), wtedy formalne rozwiązanie równania ruchu (7.13) upraszcza się, bowiem operator uporządkowania chronologicznego  $\mathcal{T}$  staje się zbędny. Wyrażenie z prawej strony równości (7.13), które opisuje ewolucję czasową koszyka, przekształca się do standardowej macierzowej funkcji wykładniczej

$$\mathcal{T} e^{\int_{t_0}^t \mathbf{R}_0 dt'} = e^{(t-t_0)\mathbf{R}_0}.$$

#### § 4. Równoważność modeli dyskretnych i ciągłych

Zachowanie jednolitego opisu procesu ewolucji koszyka, opisu niezależnego od wyboru między ciągłym a dyskretnym modelem czasu, jest możliwe. Wystarczy przyjąć, że dziedzina zmiennej ciągłej  $t$  dzieli się na (niekoniecznie jednakowej długości!) odcinki o końcach w punktach  $t_l$ . Wtedy, uzgadniając rozwiązania równań ruchu (7.4) i (7.13) przez wykonanie podstawienia  $l \rightarrow t_l$ , otrzymamy następującą zależność stóp macierzowych:

$$(7.14) \quad \mathbf{I} + \underline{\mathbf{R}}(t_l) = \mathcal{T} e^{\int_{t_l}^{t_{l+1}} \mathbf{R}(t') dt'}, \quad \text{czyli} \quad \mathbf{I} - \overline{\mathbf{R}}(t_l) = \mathcal{T}' e^{-\int_{t_l}^{t_{l+1}} \mathbf{R}(t') dt'}.$$

Klasyczny, jednowymiarowy odpowiednik tych zależności, gdzie operatory  $\mathcal{T}$  i  $\mathcal{T}'$  są zbędne<sup>7</sup>, można znaleźć w pracy [KP99]. Jeżeli zadbamy o spełnienie związku (7.14), to wszystkie konwencje opisu procesu kapitałowego (kredytowa, dyskontowa, bądź różniczkowa) stają się jednakowo uprawnione, więc o

<sup>7</sup>ze względu na przemienność stóp

wyborze jednej z nich powinna decydować skuteczność w znajdowaniu ścisłego rozwiązania konkretnego równania ruchu, gdyż stopień komplikacji elementów stóp macierzowych (jako funkcji argumentu czasowego), dla tego samego modelu, może być bardzo różny w zależności od typu stopy.

W przypadku formalizmu różniczkowego ujednoczenie konwencji likwiduje problemy techniczne dotyczące rozliczeń. Ciągłe przepływy między składnikami koszyka odbywają się jedynie na poziomie rachunkowym. Korekta stanu faktycznego koszyka do wymogów określonych macierzową stopą różniczkową może odbywać się dowolnie rzadko, w arbitralnie wybranych chwilach  $t_{l+1}$ , poprzez wyznaczenie stosownej macierzowej stopy dolnej  $\underline{\mathbf{R}}(l)$ , bądź górnej  $\overline{\mathbf{R}}(l)$ , na odcinku czasowym  $[t_l, t_{l+1}]$  pomiędzy ostatnim z minionych rozliczeń i rozliczeniem aktualnym. Z tego punktu widzenia macierzowe stopy różnicowe są pewnym rodzajem zapisu rozwiązania równania różniczkowego dla chwili  $t_{l+1}$ , z warunkiem początkowym wziętym w chwili  $t_l$ , opartym na tradycjach finansowych rozliczeń odsetkowych. Macierze  $\mathbf{I} + \underline{\mathbf{R}}(l)$  oraz  $\mathbf{I} - \overline{\mathbf{R}}(l)$  są odwrotnymi względem siebie wersjami *rezolwenty* [Mau74] równania różniczkowego (7.12) na odcinku  $[t_l, t_{l+1}]$

$$\mathbf{k}(t_{l+1}) = (\mathbf{I} + \underline{\mathbf{R}}(l)) \mathbf{k}(t_l), \quad \mathbf{k}(t_l) = (\mathbf{I} - \overline{\mathbf{R}}(l)) \mathbf{k}(t_{l+1}),$$

odpowiednio w ujęciu zgodnym i przeciwnym do kierunku upływu czasu<sup>8</sup>.

Dokonajmy uzmiennienia stałych  $t_l$  występujących w formułach (7.14). Załóżmy także, że górne i dolne stopy macierzowe są funkcjami różniczkowalnymi względem argumentu czasowego  $t = t_l$ . Obliczając pochodne tożsamości (7.14), uzyskamy macierzową stopę różniczkową wyrażoną poprzez stopy kredytowe, bądź dyskontowe:

$$(7.15) \quad -\mathbf{R}(t) = (\mathbf{I} - \overline{\mathbf{R}}(t)) \frac{d\underline{\mathbf{R}}(t)}{dt} = \frac{d\overline{\mathbf{R}}(t)}{dt} (\mathbf{I} + \underline{\mathbf{R}}(t)).$$

Dla różniczkowalnych stóp różnicowych odpowiednie rozwiązanie różniczkowego równania procesu kapitałowego jest ciągle, czyli zachodzą równości

$$\lim_{(t_{l+1}-t_l) \rightarrow 0} \underline{\mathbf{R}}(l) = \lim_{(t_{l+1}-t_l) \rightarrow 0} \overline{\mathbf{R}}(l) = 0.$$

Na podstawie zależności (7.15) otrzymamy więc następującą równość granic

$$\mathbf{R}(t) := \lim_{(t_{l+1}-t_l) \rightarrow 0} \frac{\underline{\mathbf{R}}(l)}{t_{l+1} - t_l} = \lim_{(t_{l+1}-t_l) \rightarrow 0} \frac{\overline{\mathbf{R}}(l)}{t_{l+1} - t_l}.$$

Nawiązując do tematu paragrafu 2 można stwierdzić, że interpretacja elementów stopy różniczkowej  $\mathbf{R}(t)$  jest taka sama jak elementów  $\underline{\mathbf{R}}(l)$  czy  $\overline{\mathbf{R}}(l)$ , bowiem dla stóp kredytowej i dyskontowej macierz  $\mathbf{R}(t)$  stanowi wspólny przypadek graniczny. Poza tym można powiązać różniczkową stopę macierzową ze średnią

<sup>8</sup>powyżej autor ponownie wypisał równania (7.2) i (7.5)

geometryczną pochodnych macierzowych stóp górnej i dolnej, gdyż z równości (7.15) otrzymujemy następującą zależność

$$\mathbf{R}^2(t) = \frac{d\overline{\mathbf{R}}(t)}{dt} \frac{d\mathbf{R}(t)}{dt}.$$

Związki (7.15) są pomocne np. w sytuacjach, gdy dla pewnego różnicowego procesu kapitałowego chcemy odnaleźć równoważny jemu proces różniczkowy. Takich odpowiedników różniczkowych dla jednego procesu różnicowego jest wiele, ponieważ różne funkcje mogą mieć w punktach  $t_i$  jednakowe wartości. Warto jeszcze zauważyć, że, w przypadku macierzowych stóp różnicowych niezależnych od skali czasowej, tożsamość (7.15) implikuje niezmienniczość procesu, tzn.  $\mathbf{R}(t) \equiv 0$ .

## § 5. Urojone stopy wzrostu

Niżej prezentowany przykład układu równań jest najpopularniejszym modelem fizyki, którego opisy znajdujemy w każdym podręczniku mechaniki teoretycznej, więc w tak szczególnym przypadku wydaje się zbędnym powoływanie się na konkretne źródło pisane. Ten typ równań, noszący nazwę *oscylatora harmonicznego*, należy rozważyć głównie z uwagi na jego kanoniczny charakter dotyczący opisu ruchu okresowego. Koszyki posiadające oscylujące komponenty stanowią szeroką klasę liniowych procesów finansowych<sup>9</sup>. Część ich kapitału staje się na przemian raz zadłużeniem, raz dobrem pożądanym, mogą więc stanowić podłoże dla zgubnego (bądź zbawienego) w skutkach mechanizmu „pompowania” kapitału.

**5.1. Oscylator harmoniczny** Zmodyfikujmy nieco przykład 1.1, jednocześnie upraszczając go tak, aby różniczkowa stopa macierzowa miała postać:

$$(7.16) \quad \mathbf{R}(t) = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -b & -b \\ b & b \end{pmatrix}.$$

Mimo pewnej sztuczności tego przykładu łatwo jest wyobrazić sobie powiązane umowy bankowe prowadzące do takich przepływów kapitału w koszyku oraz, dopasowane do nich, autonomiczne przyrosty każdej składowej koszyka.

Dla głębszej analizy procesów warto posłużyć się rozszerzeniem zespolonym<sup>10</sup>  $\mathbb{C}^M$  (tu  $\mathbb{C}^2$ ) przestrzeni fazowej  $\mathbb{R}^M$  (tu  $\mathbb{R}^2$ ). Wtedy  $\mathbf{k}_1^\circ = (1, i)$  oraz

<sup>9</sup>zob. paragraf 6

<sup>10</sup>zob. [Arn75]

$\mathbf{k}_2^\diamond = (1, -i) = \overline{\mathbf{k}_1^\diamond}$ <sup>11</sup> są wektorami własnymi stopy macierzowej  $\mathbf{R}(t)$  o wartościach własnych odpowiednio  $-ib$  oraz  $ib$ . Opis procesu upraszcza się, bowiem koszyk rozkłada się na dwie niezależne składowe o abstrakcyjnym kapitale zespolonym. Równanie ruchu koszyka ma następujące rozwiązanie w rozszerzonej przestrzeni fazowej  $\mathbb{C}^2$ , w bazie wektorów własnych  $\{\mathbf{k}_1^\diamond, \mathbf{k}_2^\diamond\}$ :

$$k_1^\diamond(t) = e^{-ib(t-t_0)} k_1^\diamond(t_0), \quad k_2^\diamond(t) = e^{ib(t-t_0)} k_2^\diamond(t_0).$$

Przechodząc na powrót do bazy wyjściowej otrzymamy poniższe rozwiązanie

$$\mathbf{k}(t) = \begin{pmatrix} \cos b(t-t_0) & -\sin b(t-t_0) \\ \sin b(t-t_0) & \cos b(t-t_0) \end{pmatrix} \mathbf{k}(t_0)$$

opisujące ruch po okręgu o środku w początku kartezjańskiego układu współrzędnych koszyka.

Odpowiednie rozwiązanie równania ruchu w wersji różnicowej (7.4) modelu oscylatora harmonicznego, w każdej z rozważonych baz, zadane jest powyższymi formułami w chwilach  $t = t_l$ . Wstawiając stopę różniczkową (7.16) do wzorów (7.14) wyznaczmy macierzowe stopy dolną i górną. Mają one następującą postać:

$$\underline{\mathbf{R}}(l) = \begin{pmatrix} -1 + \cos b(t_{l+1} - t_l) & -\sin b(t_{l+1} - t_l) \\ \sin b(t_{l+1} - t_l) & -1 + \cos b(t_{l+1} - t_l) \end{pmatrix},$$

$$\overline{\mathbf{R}}(l) = \begin{pmatrix} 1 - \cos b(t_{l+1} - t_l) & -\sin b(t_{l+1} - t_l) \\ \sin b(t_{l+1} - t_l) & 1 - \cos b(t_{l+1} - t_l) \end{pmatrix}.$$

Jeżeli obliczymy pochodną jednej z powyższych macierzowych stóp różnicowych po zmiennej  $t = t_l$ , po czym skorzystamy z tożsamości (7.15), to z powrotem otrzymamy macierz stopy różniczkowej  $\mathbf{R}(t)$  oscylatora harmonicznego.

Okres powrotu rozwiązania do tego samego obszaru przestrzeni fazowej wynosi  $T = \frac{2\pi}{|b|}$ . W przypadku procesu dyskretnego, gdy wybierzemy przedziały czasowe jednakowej długości  $\tau = t_{l+1} - t_l$ , to dla niewymiernych ilorazów  $\frac{\tau}{T}$  wartości składowych koszyka nigdy nie odtwarzają się dokładnie. Zachowanie konsystencji między wariantami różnicowym i różniczkowym oscylatora wymaga, by elementy diagonalne macierzowych stóp różnicowych były różne od zera. Jest to efekt wspomnianego już wcześniej paradoksu stóp różnicowych.

W rozdziale 6 poznaliśmy pewien typ dźwigni finansowej, zwanej oscylatorem. Mimo występującej zbieżności nazw nie należy mylić tych dwóch odrębnych tematów.

<sup>11</sup>kreska „-” oznacza sprzężenie zespolone



## § 6. Nieoddziaływujące zespolone procesy kapitałowe

Przy pomocy dowolnie małej deformacji elementów każdą macierz liczbową można przekształcić w macierz podobną do diagonalnej macierzy zespolonej [MP65], czyli zbiór odwzorowań diagonalizowalnych rozszerzonej przestrzeni fazowej  $\mathbb{C}^M$  jest zbiorem gęstym w zbiorze wszystkich odwzorowań liniowych, zadanych w  $\mathbb{C}^M$ . Z twierdzenia tego wynika, że ewolucję każdego koszyka kapitałowego można przedstawić (z dowolnie dużą precyzją) jako zestaw nieoddziaływujących pomiędzy sobą zespolonych lokat kapitałowych. Wniosek ów oznacza, że w rozszerzonej przestrzeni fazowej możliwa jest dekompozycja stopy macierzowej  $\mathbf{R}(t) = \mathbf{C}(t) + \mathbf{D}(t)$ , przy której macierz przepływów  $\mathbf{C}(t)$  jest zerowa. W przypadku stałych w czasie różniczkowych stóp macierzowych baza, w której można uzyskać ten obraz, także nie będzie się z czasem zmieniać. Podobnie jak w tradycyjnej matematyce finansowej, części rzeczywiste niezerowych elementów zdiagonalizowanej macierzy stóp będą mierzyć stopień strat bądź zysków dotyczących zespolonych lokat, zaś części urojone będą informacją o periodyczności zmian w proporcjach między składową rzeczywistą lokaty kapitałowej, a jej składową urojoną. Każdym takim okresowym zmianom proporcji składników zespolonej komponenty kapitału będzie towarzyszył inny zespolony odpowiednik, o współrzędnych do niego sprzężonych. Ewolucję rzeczywistego kapitału koszyka najłatwiej obserwować dokonując jego dekompozycji w bazie zespolonych wektorów własnych stóp macierzowych. W procesach, dla których różniczkowa stopa macierzowa posiada wartości własne o nieznikającej części urojonej, odpowiednie składowe rozwiązania równania ruchu przemieszczają się w przestrzeni fazowej po torach w kształcie spiral logarytmicznych. Przykład 5.1 obrazował taką sytuację dla wartości własnej o zerowej części rzeczywistej (spiralą staje się wtedy okręgiem). Poprzez wybór stosownych momentów wejścia i wyjścia z procesu oscylacje takie, po identyfikacji, mogą być wykorzystywane jako szczególnie efektywny mechanizm powiększania kapitału, podobny w skutkach do dźwigni finansowej.

Wyżej naszkicowany finansowy obraz koszyka jest prosty, bo skalarny, choć abstrakcyjny, bo zespolony. Jeśli nie mamy na niego ochoty, pozostaje nam stosować stopy macierzowe o elementach rzeczywistych.

**6.1. Symulacja procesu kapitałowego** Rozważmy pewien dowolnie wybrany czterowymiarowy proces kapitałowy. By zapewnić jego pełną dowolność, autor wygenerował elementy macierzy rzeczywistej  $\mathbf{D}$  przy pomocy generatora liczb losowych o równomiernym rozkładzie na odcinku  $[-1, 1]$ . Elementy diagonalne macierzy określiły macierz wzrostów  $\mathbf{D}$ , a pozadiagonalne — macierz przepływów  $\mathbf{C}$ . Suma tych macierzy jest poniżej wypisaną różniczkową stopą macierzową o współczynnikach

niezależnych od czasu

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 2.0715 & -0.7798 & -0.2367 & -0.9461 \\ 0.0495 & -0.2119 & 0.2992 & 0.1812 \\ 0.7610 & 0.4616 & 1.8802 & 0.1764 \\ -0.3796 & -0.5208 & 0.8118 & -0.4093 \end{pmatrix}.$$

W bieżącym przykładzie liczby są wypisane do czwartej pozycji po przecinku. Wartości własne macierzy  $\mathbf{R}$  i odpowiadające im wektory własne są następujące:

$$\begin{aligned} \lambda_1 = \overline{\lambda_2} &= 2.1416 + 0.6316i, \\ \lambda_3 = \overline{\lambda_4} &= -0.4764 + 0.2605i, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 = \overline{\mathbf{v}_2} &= (1, \quad 0.0003 - 0.1563i, \quad 0.2498 - 1.0635i, \quad -0.1369 - 0.2727i), \\ \mathbf{v}_3 = \overline{\mathbf{v}_4} &= (1, \quad -0.6328 - 1.3305i, \quad -0.4650 + 0.1505i, \quad 3.3308 + 0.7837i). \end{aligned}$$

Nie wprowadzając dalszych założeń<sup>12</sup> związanych z rynkiem, możemy przyjąć w rozszerzonej przestrzeni fazowej  $\mathbb{C}^4$  normę  $\|\mathbf{k}(t)\| = \sum_{j=1}^4 \overline{k_j(t)} k_j(t)$ , zgodną w jej podprzestrzeni rzeczywistej  $\mathbb{R}^4$  z normą euklidesową. Funkcja ta indukuje normę dla odwzorowań liniowych (7.11), „rozdzielającą” jedynie amplitudy<sup>13</sup> jednowymiarowych procesów składowych. Wtedy odpowiadające tej normie, najbardziej interesujące komponenty koszyka (także rzeczywistego, z przestrzeni fazowej  $\mathbb{R}^4$ ) leżą w dwuwymiarowej podprzestrzeni rozpiętej przez wektory  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  i wszystkie posiadają stopę zmian o wartości bezwzględnej równej  $\sqrt{\|\mathbf{R}\|} = |\lambda_1| = 2.2328$ , a okres  $T$  oscylacji komponenty rozwiązania równania ruchu, należącej do optymalnej podprzestrzeni, jest stosowną funkcją argumentu wartości własnej o największym module  $T = \frac{2\pi}{|\arg(\lambda_1)|} = 21.9087$ . Pozostałe składowe rozwiązania, przy czterokrotnie mniejszym czynniku wzrostu ( $|\lambda_3| = 0.5430$ ), mogą zostać wykorzystane do przepompowania kapitału, bowiem oscylują dziewięć razy szybciej ( $T' = \frac{2\pi}{|\arg(\lambda_3)|} = 2.3789$ ).

**6.2. Komentarze** Przedstawione ujęcie procesów ewolucji koszyków stanowi odpowiedni punkt wyjścia dla badań nad finansowymi niezmiennikami rzutowymi, patrz rozdział 1, które powinny pozwolić uszeregować różne koszyki w celu ich wartościowania.

W przypadkach braku ścisłych rozwiązań dla opisu ewolucji koszyka przy pomocy układów liniowych równań różnicowych (różniczkowych), możemy stosować standardowe metody rachunku perturbacyjnego, od dawna z powodzeniem wykorzystywane przez fizyków<sup>14</sup>. Polegają one na dekompozycji macierzy  $\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_0(t) + \lambda \mathbf{R}_1(t)$  na część  $\mathbf{R}_0(t)$ , dla której znane jest ściśle rozwiązanie równania ruchu, oraz na zaburzenie  $\lambda \mathbf{R}_1(t)$  tak, aby podanie rozwiązania

<sup>12</sup>wzorowanych na rozdziale 1

<sup>13</sup>czyli wartości bezwzględne

<sup>14</sup>zob. np. [BF75]

równania jedynie z dokładnością do reszty  $\mathcal{O}(\lambda^n)$  (dla pewnego  $n$ ) satysfakcjonowało praktyków. Z tego powodu ścisłe rozwiązania równań mają znaczenie szersze, niż mogłoby to wynikać z opisów dotyczących ich modeli.

Pojęcie stopy macierzowej dopuszcza stosowanie modeli stochastycznych, co rozszerza możliwości opisu inwestowania. Elementy macierzy  $\mathbf{R}(t)$  stają się wtedy zmiennymi losowymi, a to pozwala realistyczniej odzwierciedlać zjawiska rynkowe.

## Dwoistość konwencji kredytowania

Popularne techniki rachunkowe, stosowane do wyznaczania rat kredytów, mogą prowadzić do błędnej interpretacji parametrów kredytowania. Stanowi to przyczynę kontrowersyjnych ocen kosztów kredytu, bądź uciążliwości spłat jego rat<sup>1</sup>. W tym rozdziale spróbujemy wyjaśnić powiązania formalne, istniejące pomiędzy strukturalnie różnymi modelami spłat zobowiązań kapitałowych. Aby podejście do zagadnienia klasyfikacji sposobów kredytowania było możliwie najszersze przyjmijmy, że określenie *kredyt* będzie tu synonimem wszystkich, rozłożonych w czasie, form rozliczania (przy pomocy pieniądza) zaciągniętych zobowiązań (niezależnych od czynnika losowego). Oprócz kredytów termin ten będzie obejmował także pożyczki, renty, obligacje, lokaty itp..

---

### § 1. Kapitał a czas

W celu porównywania wartości tego samego dobra w różnych chwilach czasu<sup>2</sup>, możemy wykorzystać ideę użyteczności, w wersji podobnej do, znanej od półwiecza, koncepcji Johna von Neumanna [vNM53].

Zasada równoważności kapitału w czasie. *Każdy  $i$ -ty uczestnik działalności gospodarczej wie, ile najwyżej pieniędzy (kwota  $U(t_0, t)$  w jednostkach  $\$_{t_0}$ ) jest w stanie pożyczyć (bądź ile co najmniej gotów jest przyjąć) w chwili  $t_0$ , aby w późniejszej chwili  $t$  odzyskać (lub zwrócić) jednostkę pieniężną  $1 \$_t$ .*

Kwotę tą, będącą funkcją czasu i zależnej od czasu subiektywnej wartości jednostki pieniężnej w przyszłości, będziemy nazywać *użytecznością* pieniądza dla  $i$ -tego podmiotu, oraz oznaczać jako:

$$(8.1) \quad \text{użyteczność}_i(t_0, \$_t) = U_i(t_0, t) \$_{t_0} \quad \text{dla } t_0 \leq t.$$

---

<sup>1</sup>zob. np. [KP95]

<sup>2</sup>odmierzanych jednostkami czasu wzorcowego (str. 57)

Ponieważ znaczenie indeksu  $i$  będzie nieistotne, lub będzie wynikać z kontekstu, zostanie on pominięty.

Jeżeli pojęcie „użyteczność” ma być użyteczne potrzeba, aby funkcja  $U(t_0, t)$  charakteryzowała się kilkoma ogólnymi własnościami, które należy traktować jako warunki konieczne, określające użyteczność kapitału w czasie.

Własności funkcji użyteczności:

**Monotoniczność** – jeśli  $t_1 < t_2$  to  $U(t_0, t_1) > U(t_0, t_2)$ .

$U(t_0, t)$  jest malejącą funkcją drugiego argumentu. Dla ustalonego nominalnie kapitału oznacza to, że czym bardziej jest on czasowo odległy, tym mniejsza jest jego obecna użyteczność. Użyteczność pieniądza przewyższa jego wartość osiąganą z tezauryzacji.

**Istnienie kresu górnego** –  $U(t_0, t_0) = 1$ .

Użyteczność teraźniejszego kapitału jest równa jego wartości.

**Istnienie kresu dolnego** –  $\lim_{t \rightarrow \infty} U(t_0, t) = 0$ .

Teraźniejsza użyteczność dowolnie odległego kapitału jest znikomo mała.

Dwie ostatnie własności oznaczają, że dla  $t \geq t_0$  wartości funkcji użyteczności należą do odcinka jednostkowego,  $U(t_0, t) \in (0, 1]$ .

**Racjonalność oczekiwań** – dla każdej chwili pośredniej  $\tau \in [t_0, t]$  zachodzi własność:

$$(8.2) \quad \text{użyteczność}(t_0, \$t) = \text{użyteczność}(t_0, \text{użyteczność}(\tau, \$t)).$$

Oczekiwana użyteczność pieniądza  $\$t$  powinna być równa oczekiwanej użyteczności kwoty, równej użyteczności pieniądza  $\$t$  dla dowolnej chwili  $\tau$ ,  $t_0 \leq \tau \leq t$ . Czyli użyteczność ma strukturę półgrupy.

**Istnienie elementu odwrotnego** – w zagadnieniach o charakterze deterministycznym (tylko takie występują w prezentowanym tekście), dla czasów  $t$  wcześniejszych od  $t_0$  ( $t < t_0$ ), postulujemy funkcję użyteczności określoną następującą formułą:

$$U(t_0, t) := (U(t, t_0))^{-1}.$$

Tym samym przyjmujemy, że użyteczność posiada strukturę grupy.

Poszerzmy dziedzinę funkcji użyteczności na dowolne wielkości kwot pieniężnych oraz załóżmy dalej, że kredytodawcę cechuje liniowa w drugim argumencie funkcja użyteczności pieniądza, to znaczy że dla każdej arbitralnie określonej kwoty pieniężnej  $\lambda \$t$ , gdzie  $\lambda \in \mathbb{R}^+$ , zachodzi równość

$$\text{użyteczność}(t_0, \lambda \$t) = \lambda \text{użyteczność}(t_0, \$t),$$

czyli, uwzględniając notację (8.1), mamy

$$(8.3) \quad \text{użyteczność}(t_0, \lambda \$t) = \lambda U(t_0, t) \$t_0.$$

Własność racjonalności oczekiwań (8.2) prowadzi w tym przypadku do prawa łączności, a liniowość (8.3) do następującego prawa składania użyteczności<sup>3</sup>:

$$U(t_0, \tau) U(\tau, t) = U(t_0, t).$$

Potwierdza to konsystencję założenia z warunkiem istnienia elementu odwrotnego.

W przypadku kredytobiorcy własność liniowości nie musi zachodzić. Często jego funkcja użyteczności pieniądza jest wypukłą funkcją  $\lambda$ , czego konsekwencją jest zgoda na spłatę kredytu w ratach. Wyznaczenie użyteczności pożyczonej kwoty, w sposób analogiczny do (8.3), wymaga istotnych modyfikacji, w zależności od skali pożyczki i możliwości kreowania kapitału. Zagadnienie to nie będzie przedmiotem rozważań tej książki.

Z wyżej przedstawionych powodów nazwiemy kredytodawcę bankiem, a kredytobiorcę klientem.

Logarytm funkcji użyteczności  $U(t_0, t)$  jest *przedziałową stopą dyskontową*<sup>4</sup>. Wielkość ta umożliwia korzystanie z własności grupowych użyteczności w postaci addytywnej.

**1.1. Przykład: funkcja użyteczności dla stałej stopy dyskontowej** W sytuacji, gdy różniczkowa stopa dyskontowa, zgodnie z którą bank użycza gotówkę, jest stała i wynosi  $r$  (czyli przedziałowa stopa wynosi  $r(t_0 - t)$ ), użyteczność pieniędzy dla banku ma następującą postać:

$$(8.4) \quad U(t_0, t) = e^{r(t_0-t)}.$$

By otrzymać warianty wszystkich poniżej prezentowanych formuł dla stałej stopy, we wszystkich wzorach należy dokonać podstawienia (8.4). Gdyby stopa była zmienna,  $U(t_0, t)$  można by wyznaczyć przy pomocy stosownej formuły, wybranej spośród wzorów zamieszczonych w [KP99], gdzie znajduje się także krótkie uzasadnienie wyrażenia (8.4).

Teoria użyteczności von Neumanna wspiera się na użytecznościach mieszanych, będących stosownymi kombinacjami wypukłymi, generowanymi przez loterie. Warto jest więc zauważyć, że jeżeli odcinek czasowy  $[t_0, t_N)$  podzielimy na  $N$  krótszych odcinków  $[t_k, t_{k+1})$  o dowolnej długości, gdzie  $t_k \in [t_0, t_N)$ , to otrzymamy ciąg

$$(8.5) \quad u(t_0, t_l) := \begin{cases} U(t_0, t_{l-1}) - U(t_0, t_l) & \text{dla } l < N, \\ U(t_0, t_{N-1}) & \text{dla } l = N, \end{cases}$$

który jest rozkładem jedynki, bo  $\sum_{l=1}^N u(t_0, t_l) = 1$ , więc sama funkcja  $U(t_0, t_l)$  posiada wszystkie własności dystrybuanty. Użyteczność  $U(t_0, t_l)$  możemy interpretować jako prawdopodobieństwo uzyskania jednostki pieniężnej  $1 \$_{t_0}$  w

<sup>3</sup>por. własność (1.2)

<sup>4</sup>zob. str. 38

chwili  $t_0$ , w zamian za gwarancję zapłaty w chwili  $t$  kwoty  $1 \$_t$  za prawo udziału w loterii prowadzonej przez bank.

## § 2. Podstawowe formy kredytowania

Najprostszy wariant umowy kredytowej można scharakteryzować w następujący sposób:

*Kredyt prosty. W chwili  $t_0$  bank przekazuje klientowi do dyspozycji kwotę  $k_0 \$_{t_0}$ , w zamian za co klient jest zobowiązany zwrócić bankowi w późniejszej chwili czasu  $t_1$  kwotę  $k_1 \$_{t_1}$ . Bankiem jest taki kredytodawca, dla którego kwota pożyczona  $k_0 \$_{t_0}$ , jak i zwracana  $k_1 \$_{t_1}$  są równie użyteczne.*

Użyteczność pieniądza dla banku spełnia (8.3), więc

$$(8.6) \quad k_0 \$_{t_0} = \text{użyteczność}(t_0, k_1 \$_{t_1}) = U(t_0, t_1) k_1 \$_{t_0}, \text{ czyli}$$

$$(8.7) \quad k_1 = U(t_1, t_0) k_0.$$

Bardziej rozbudowaną jest następująca forma kredytowania:

*Kredyt złożony. Bank zawiera z klientem umowę o  $N$  kredytach prostych, z których każdy rozpoczyna się w chwili  $t_0$ .  $m$ -ta umowa kredytu prostego, gdzie  $m = 1, \dots, N$ , kończy się w chwili  $t_m$ , dotyczy przekazanej klientowi kwoty  $k_{0,m}$ , w zamian za którą klient zobowiązuje się zwrócić kwotę  $k_m$ .*

Nie pomniejszając ogólności opisu, kolejne składowe kredyty proste ponumerujemy chronologicznie, więc  $t_0 < t_1 < \dots < t_N$ . W tym przypadku równość użyteczności dla banku kwot pożyczanej i odzyskiwanych wyraża się wzorem:

$$(8.8) \quad k_0 \$_{t_0} = \sum_{l=1}^N U(t_0, t_l) k_l \$_{t_0},$$

gdzie  $k_0 := \sum_{m=1}^N k_{0,m}$ .

Ze względu na liniowość funkcji użyteczności pieniądza dla banku wystarczy rozliczanie kredytu przedstawiać dla jednostki pieniężnej  $\$_{t_0}$ . Definiując

$$f_l := \frac{U(t_0, t_l) k_l}{k_0},$$

związek między spłatami kredytu można przedstawić następująco

$$(8.9) \quad k_l = f_l U(t_l, t_0) k_0,$$

gdzie  $\sum_{l=1}^N f_l = 1$ .

Podanie sekwencji  $\{U(t_0, t_1), \dots, U(t_0, t_N)\}$  oraz wyznaczenie ciągu  $k := \{k_1, \dots, k_N\}$  w pełni określa proces spłacania kredytu.

Ciąg  $f := \{f_1, \dots, f_N\}$  jest rozkładem jedynki. Czynniki  $f_l$  mierzą wkład  $l$ -tego kredytu prostego do całej sumy  $k_0$  udzielonego kredytu złożonego.

W rzeczywistości podmioty gospodarcze korzystają z następującej formy kredytowania.

*Akcja kredytowa. Bank zawiera z klientem umowę o  $M$  kredytach złożonych, które rozpoczynają się w chwilach  $t_{s0}$ ,  $s=1, \dots, M$ , przekazaniem klientowi kolejnej kwoty  $k_{s0}$ , traktowanej jako odpowiednik sumy  $k_0$  z konstrukcji kredytu złożonego. Spłata długu jest sumą spłat, wynikających ze sposobu spłaty każdego z  $M$  kredytów złożonych.*

### § 3. Różne spojrzenia na kredyt

Powyższy sposób spojrzenia na kredyt można scharakteryzować następująco:

*Konwencja z kapitalizacją. Jest to sposób rozliczania kredytu według standardu, w którym koszty kredytowania są uwzględnione przez stosowanie określonego czynnika  $U$  (użyteczności banku), i uiszczane w chwilach zwrotu odpowiednich rat  $k_m$ .*

Nie jest to jedyne ujęcie. Kredytowanie można rozliczać w ujęciu odmiennym, rozpowszechnionym wśród praktyków, które wyznacza taka zasada:

*Konwencja bez kapitalizacji. Kwotę zaciągniętego kredytu można spłacić w ratach, uznając że nominalna wysokość długu nie narasta z upływem czasu, zaś koszty kredytowania stanowią odrębną formę kapitału, proporcjonalną do długu i spłacaną na bieżąco w formie odsetek.*

W konwencji bez kapitalizacji nie istnieje problem kapitalizacji złożonej. Wielkości dotyczące tej konwencji w obszarze tego rozdziału będą wskazywane podkreśleniami ich oznaczeń.

Wydaje się że, abstrahując od wszelkich form gwarancji kredytowych, spotykane w praktyce typy umów kredytowych można opisać jako konkretną akcję kredytową. Aby dobrze ująć wzorami sposób jej rozliczania, warto najpierw rozważyć zagadnienia związane z podstawową formą kredytu, jaką jest kredyt złożony. Głównym problemem, któremu jest poświęcona ten rozdział, jest więc związek między dwoma odmiennymi opisami: konwencją z kapitalizacją



i konwencją bez kapitalizacji. W celu powiązania zależności ilościowych między konwencjami, trzeba najpierw wypisać wzór na  $l$ -tą ratę spłaty kredytu złożonego w konwencji bez kapitalizacji, czyli odpowiednik wzoru (8.9).

Zgodnie z definicją konwencji bez kapitalizacji określmy kwotę, jaką powinien wpłacić do banku klient w chwili  $t_l$ .

Załóżmy że umowa dotyczy spłaty kredytu  $k_0 \$_0$  w  $N$  ratach proporcjonalnych do elementów ciągu  $\underline{f} := \{f_1, \dots, f_N\}$ ,  $\sum_{l=1}^N f_l = 1$ , gdzie  $l$ -ta rata jest spłatą  $f_l$  części wartości nominalnej udzielonego kredytu, czyli kwotą  $f_l k_0 \$_{t_l}$ . Wcześniej, w chwili  $t_{l-1}$ , po uregulowaniu wszystkich zobowiązań wobec banku, część kredytu pozostająca do spłaty powinna być nominalną sumą wszystkich pozostałych rat kredytu, czyli

$$\sum_{p=l}^N f_p k_0 \$_{t_{l-1}} = \text{użyteczność}(t_{l-1}, \sum_{p=l}^N f_p k_0 \$_{t_{l-1}}).$$

Do chwili  $t_l$  użyteczność owego kapitału dla banku zmaleje do kwoty

$$\text{użyteczność}(t_l, \sum_{p=l}^N f_p k_0 \$_{t_l}) = \sum_{p=l}^N f_p k_0 \$_{t_l}.$$

Stratę wynikającą ze zmiany użyteczności pozostającego do spłacenia kredytu, czyli różnicę owych kwot oraz podstawową ratę kredytu  $f_l k_0 \$_{t_l}$  uiszczą klient w chwili  $t_l$ . Tak więc suma pieniędzy przekazanych do banku w chwili  $t_l$  jest równa

$$k_l \$_{t_l} = f_l k_0 \$_{t_l} + \sum_{p=l}^N f_p k_0 (\$_{t_{l-1}} - \$_{t_l}).$$

Równość powyższa ma jedynie sens skrótowego zapisu dotyczącego jej wyvodu, bowiem kwoty, których składniki wyrażone są w różnych jednostkach, nie wiąże jedna miara wartości — poszczególne podmioty rynkowe różnie je wyceniają. Nie można dodawać do siebie wielkości określonych przy pomocy różniących się jednostek. Porównywanie lewej strony z prawą jest poprawne dopiero w kontekście użyteczności odpowiednich kwot, określonej w dowolnej, lecz wszędzie jednakowej chwili czasu. Po wyliczeniu liniowej użyteczności składników obydwu stron ostatniej „równości”, np. dla chwili  $t_0$ , otrzymamy:

$$(8.10) \quad k_l = f_l k_0 + (U(t_l, t_{l-1}) - 1) \sum_{p=l}^N f_p k_0.$$

Czynnik  $U(t_l, t_{l-1}) - 1$  jest przedziałową stopą procentową (bądź, z punktu widzenia banku, dyskontową) z dołu<sup>5</sup>. Wzór (8.10) wyraża najczęściej stosowany sposób wyznaczania scenariusza kredytowego<sup>6</sup>.

<sup>5</sup>zob. [KP99]

<sup>6</sup>por. np. z formułami (4.17) i (4.18) w [DS96]

Prawidłowość powyższego wzoru można sprawdzić obliczając użyteczność dla banku wszystkich rat spłaty kredytu. Powinna ona być równa kwocie udzielonej pożyczki. Wygodnie jest jednak wcześniej wprowadzić następującą notację Iwersona [GKP96].

Niech symbol  $[z\text{danie}]$  będzie funkcją równą 1 w przypadku gdy  $z\text{danie}$  jest prawdziwe, a 0 gdy tak nie jest.

Otrzymamy wtedy:

$$\begin{aligned}
 (8.11) \quad \text{użyteczność}(t_0, \sum_{l=1}^N k_l \$t_l) &= \\
 &= \sum_{l=1}^N (U(t_l, t_0) \underline{f}_l + (U(t_{l-1}, t_0) - U(t_l, t_0)) \sum_{p=l}^N \underline{f}_p) k_0 \$t_0 = \\
 &= \sum_{l=1}^N \sum_{p=1}^N ([l=p] U(t_{l-1}, t_0) + [l < p] (U(t_{l-1}, t_0) - U(t_l, t_0))) \underline{f}_p k_0 \$t_0 = \\
 &= \sum_{p=1}^N U(t_0, t_0) \underline{f}_p k_0 \$t_0 = k_0 \$t_0.
 \end{aligned}$$

Czyli sposób spłaty kredytu został prawidłowo opisany.

Na powyższym przykładzie można zauważyć przydatność rachunku macierzowego dla prezentacji kredytów, dlatego dalsze analizy będą oparte na ideach algebry liniowej.

#### § 4. Zagadnienie równoważności konwencji

Nasuwa się zasadnicze pytanie: jak kredyty opisane w konwencji z kapitalizacją przedstawić w języku konwencji bez kapitalizacji. Można rozwiązać te zadanie odwracając łatwe do określenia zagadnienie odwrotne. Opisy będą równoważne wówczas, gdy poszczególne pełne kwoty spłat kredytu w obydwu przypadkach zostaną określone w identycznych kwotach. Przyrównanie formuł (8.9) i (8.10) prowadzi do następującego związku pomiędzy równoważnymi rozkładami jedynki

$$(8.12) \quad f_l = \sum_{s=1}^N A_{l,s} \underline{f}_s,$$

gdzie

$$A_{l,s} = A(U(t_0, t_{l-1}))_{l,s} = [l=s] U(t_0, t_{l-1}) + [l < s] (U(t_0, t_{l-1}) - U(t_0, t_l)).$$

Wzór (8.12) pozwala opisać kredyt o formule (8.10) w konwencji z kapitalizacją wyjaśniając, czym są odpowiednie wagi  $f_l$  rozkładu pożyczonego kapitału. Łatwo sprawdzić, że macierz  $A$  jest macierzą stochastyczną (czyli suma wyrażeń w każdej kolumnie jest 1). Własność ta jest równoważna wcześniejszemu dowodowi (8.11) poprawności wzoru (8.10).

Macierz  $A$  ma strukturę macierzy  $M$  opisanej w §5 *Uzupełnień*, zatem spełnia zamieszczone tam *twierdzenie o istnieniu izomorfizmu*, czyli

$$(8.13) \quad \left( A(U(t_0, t_{l-1})) \right)^{-1} = A(1/U(t_0, t_{l-1})) = A(U(t_{l-1}, t_0)).$$

Formuła wyrażająca wagi  $\underline{f}_l$  przez wagi  $f_l$  jest więc następująca

$$(8.14) \quad \underline{f}_l = \sum_{s=1}^N [l=s] U(t_{l-1}, t_0) + [l < s] (U(t_{l-1}, t_0) - U(t_l, t_0)) f_s.$$

Postawiony w tym rozdziale problem został rozwiązany.

Pozostały do przedstawienia konsekwencje wynikające z równoważności konwencji opisu kredytowania, mogące zainteresować amatorów rachunków. Zaczniemy od wypisania jawnej postaci stwierdzonego izomorfizmu, której odgadnięcie nie jest trudne zważywszy, że wyrazy diagonalne macierzy  $A$  są jej wartościami własnymi (cecha macierzy trójkątnych), więc wystarczy rozwiązać zagadnienie jej wektorów własnych. Rezultat takich obliczeń wykorzystuje *twierdzenie o postaci izomorfizmu*, zamieszczone w §5 *Uzupełnień*. Macierz  $([r \leq s])$  z *twierdzenia o postaci izomorfizmu* pozwala przejść do współrzędnych, opisujących zależność pomiędzy konwencjami w postaci zwartej.

Definiując  $F_{l-1} := \sum_{s=1}^N [l \leq s] f_s$ , czyli

$$(8.15) \quad F_l = \sum_{s=l+1}^N f_s = 1 - [l \neq 0] \sum_{s=1}^l f_s$$

oraz  $\underline{F}_{l-1} := \sum_{s=1}^N [l \leq s] \underline{f}_s$ , czyli

$$(8.16) \quad \underline{F}_l = \sum_{s=l+1}^N \underline{f}_s = 1 - [l \neq 0] \sum_{s=1}^l \underline{f}_s,$$

gdzie wzory odwrotne na mocy *twierdzenia o postaci izomorfizmu* są:

$$(8.17) \quad f_l = \sum_{s=1}^N ([l=s] - [l+1=s]) F_{s-1} = F_{l-1} - [l \neq N] F_l,$$

$$(8.18) \quad \underline{f}_l = \sum_{s=1}^N ([l=s] - [l+1=s]) \underline{F}_{s-1} = \underline{F}_{l-1} - [l \neq N] \underline{F}_l,$$

otrzymujemy prosty odpowiednik równań (8.14), bądź (8.12), w postaci



$$(8.19) \quad F_l = U(t_0, t_l) \underline{F}_l.$$

Indeksy elementów ciągów  $F$  i  $\underline{F}$  należą do zbioru  $\{0, \dots, N-1\}$ , by wskazywać chwile, w których pozostała do spłacenia odpowiednia część udzielonego kredytu. Zależności (8.17) i (8.18) pomiędzy  $f$ ,  $\underline{f}$  i  $F$ ,  $\underline{F}$  są wtedy takie same, jak między  $u$  i  $U$  w definicji (8.5). Ciągi  $F$  i  $\underline{F}$  zbudowane z wag rozkładu kredytu przedstawionych w odpowiedniej konwencji, są, w języku rachunku prawdopodobieństwa, dystrybuantami dyskretnej zmiennej losowej, która w prezentowanym problemie przyjmuje wartości kolejnych chwil czasu spłaty kredytu, występujących w porządku malejącym (późniejsze chwile przed wcześniejszymi). Dlatego kredytowanie łatwiej zrozumieć, analizując proces spłaty wspan do jego chronologii.

Zależność (8.19) posiada naturalną interpretację. W przypadku unormowanej do jednostki pieniężnej kwoty kredytu (czyli  $k_0 = 1$ ), gdyby przerwać spłacanie rat w chwili  $t_l$  (po uregulowaniu wszystkich zobowiązań), to kapitał dłużny bankowi wynosiłby wtedy  $\underline{F}_l \$_{t_l}$  (w konwencji bez kapitalizacji) i byłby równy (w konwencji z kapitalizacją), zrewaloryzowanej przez bank do tej chwili, sumie rat pozostałych do spłacenia (czyli  $U(t_l, t_0)F_l \$_{t_l}$ ).

Wzór (8.19) jest więc identyczny z formułą (8.7), obowiązującą dla kredytu prostego?!

Podobnie można interpretować, odnośnie chwili  $t_0$ , zależność (8.19) w jednostkach  $\$_{t_0}$ . Tą, dwoistą (patrz niżej) względem przedstawionej, interpretację autor pozostawia do sformułowania czytelnikowi.

Zwarty związek w postaci (8.19) wydaje się bardziej przejrzysty, niż równoważne jemu standardowe formułowanie etapów spłaty kredytu w konwencji bez kapitalizacji, za pomocą wzoru (8.10). Zdaniem autora, równanie (8.19) powinno być punktem startowym każdej teorii kredytów, gdyż, zaopatrzone jedynie w stosowne dodatkowe definicje, pozwala wywieść szczegółowe formuły kredytowania z założeń, których czytelność i prostota są ewidentne.

### § 5. Dwoiste typy kredytów

Istnieje wiele konkretnych sposobów wykorzystania formuły (8.19). Część z nich to zagadnienia dotyczące wyboru scenariusza, określającego kolejne raty spłaty zadłużenia, optymalnego dla kredytobiorcy. Rozważenie takich przypadków wymaga starannego przeanalizowania funkcji użyteczności klienta, dlatego przedstawione zostanie w odrębnym artykule.

Poczynione ogólne spostrzeżenia i wyprowadzone w poprzednich rozdziałach formuły pozwalają przejść do przedstawienia przykładów ich zastosowań, dotyczących podstawowych przypadków pożyczek.

Zdefiniowane niżej typy kredytowania w parach:  $(F, \underline{F})$ ,  $(f, \underline{f})$ ,  $(F^\infty, \underline{F}^\infty)$  i  $(k, \underline{k})$  są do siebie dwoiste, ze względu na analogiczne definicje w odmiennych konwencjach. Jest to skutkiem zachodzącej symetrii pomiędzy wyrażeniami na  $F$  i  $\underline{F}$ .

Aby symetria poniższych typów była pełna, należy wprowadzić do rozważań jeszcze jeden nowy obiekt charakteryzujący kredyt, który byłby obiektem dwoistym do  $k$ , czyli do wartości realnych (skapitalizowanych) rat kredytu, zwracanych kolejno, a określonych równaniem (8.9). Okazuje się, że są nim realne wartości dla banku w chwili  $t_0$  podstawowych rat kredytu, zwracanych zgodnie z konwencją bez kapitalizacji. Oznaczmy te raty przez  $\underline{k} := \{\underline{k}_1, \dots, \underline{k}_N\}$ .

Użyteczność rat podstawowych, w odniesieniu do momentu udzielenia kredytu, jest następująca

$$(8.20) \quad \underline{k}_l := \underline{f}_l U(t_0, t_l) k_0.$$

Zależność  $f$  od  $k$  dla konwencji z kapitalizacją, patrz (8.9), ma swój odpowiednik w konwencji bez kapitalizacji, w postaci wzoru (8.20).

Warto także wprowadzić definicję dwoistą do (8.5), czyli następujący rozkład jedynki

$$\underline{u}(t_l, t_0) := U(t_{l-1}, t_0) - [l \neq N] U(t_l, t_0).$$

Oto 9 podstawowych typów kredytów (oznaczenia literowe typu kredytu wskazują na stały w trakcie spłat parametr, czyli niezmiennik kredytu):

**5.1.  $\underline{F}$ -kredyt:** Emitent obligacji z formalnego punktu widzenia jest klientem, choć sam jednocześnie aktywnie decyduje o odpowiadającej mu postaci  $U(t_0, t)$ . Odsetki płacone są w kolejnych  $N$  terminach.

Pozostałe parametry obydwu konwencji dotyczące obligacji wyliczamy na podstawie wzorów, których numery zostały uwidocznione nad strzałkami mającymi wskazywać implikacje.

$$\underline{k}_l = [l=N] U(t_0, t_N) k_0 \xleftarrow{(8.20)} \underline{f}_l = [l=N] \xleftarrow{(8.16)} \underline{F}_l = 1 \xrightarrow{(8.19)}$$

$$\xrightarrow{(8.19)} F_l = U(t_0, t_l) \xrightarrow{(8.17)} f_l = u(t_0, t_l) \xrightarrow{(8.9)} k_l = u(t_0, t_l) U(t_l, t_0) k_0.$$

Dla obligacji o stałym oprocentowaniu mamy  $U(t_l, t_{l-1}) = \text{constans}$ .

W granicy  $N \rightarrow \infty$  otrzymujemy następny typ kredytowania.

**5.2.  $\underline{F}^\infty$ -kredyt:** Ten typ kredytu moglibyśmy także nazwać rentą wieczystą, albo wieczystą dzierżawą. Powyższe wzory przybierają postać:

$$\underline{k}_l = \underline{f}_l = 0, \quad \underline{F}_l = 1, \quad F_l = U(t_0, t_l),$$

$$f_l = u(t_0, t_l), \quad k_l = (U(t_l, t_{l-1}) - 1) k_0.$$

Parametr  $\underline{f}$  wykazuje ułomność, bowiem w granicy traci własność rozkładu jedynki.

**5.3.  $F$ -kredyt:** Typ ten wyjaśnia, w konwencji bez kapitalizacji, najprostszą formę kredytu, jaką jest wcześniej zdefiniowany kredyt prosty. Ułatwia to zrozumienie występującej w teorii procentu zależności między procentem składanym (konwencja z kapitalizacją), a procentem prostym (konwencja bez kapitalizacji). Interesujące jest tu także pojawienie się ujemnych wag rozkładu  $\underline{f}$ , które interpretujemy jako pobranie od banku dodatkowego kapitału w okresie spłaty (jest on równy odpowiednim odsetkom, więc operacja ta w rzeczywistości nie zachodzi).

Analogiczny jak w poprzednich typach ciąg zależności między parametrami prowadzi do wzorów:

$$k_l = [l=N] U(t_N, t_0) k_0, \quad f_l = [l=N], \quad F_l = 1,$$

$$\underline{F}_l = U(t_l, t_0), \quad \underline{f}_l = \underline{u}(t_l, t_0), \quad \underline{k}_l = U(t_0, t_l) \underline{u}(t_l, t_0) k_0.$$

Można byłoby wypisać, tak jak w omówieniu  $\underline{F}$ -kredytu, strzałki implikacji opatrzone stosownymi numerami formuł, lecz jest to już zbędne, bowiem zależności powyższe wynikają z tamtych rachunków na mocy *twierdzenia o istnieniu izomorfizmu*<sup>7</sup>. Dlatego wzory opisujące  $F$ -kredyt są w pełni symetryczne do zależności występujących dla  $\underline{F}$ -kredytu. Zastosowanie w nich podstawienia  $k_0 = U(t_0, t_N) k_\dagger$ , gdzie  $k_\dagger$  jest nominałem obligacji, pozwala otrzymać parametry obligacji zerokuponowych, które oferowane są z wynikającym z podstawienia dyskontem.



<sup>7</sup>patrz własność (8.13)

**5.4.  $F^\infty$ -kredyt:** Do tego typu kredytowania prowadzi przejście w kredycie niespłacany dług **Niespłacany dług** cie prostym do granicy  $N \rightarrow \infty$ . Wtedy poprzednie wzory redukują się do postaci:

$$k_l = f_l = 0, \quad F_l = 1, \quad \underline{F}_l = U(t_l, t_0),$$

$$\underline{f}_l = \underline{u}(t_0, t_l), \quad \underline{k}_l = (U(t_{l-1}, t_l) - 1)k_0.$$

Parametr  $f$  wykazuje ułomność, bowiem w granicy traci własność rozkładu jedyński.

Kredyt ten wykazuje dwoistość względem  $F^\infty$ -kredytu.

**5.5.  $f$ -kredyt: Kredyt o nominalnie stałych ratach kapitałowych** Stosując wzory w tej samej kolejności, jak w omówieniu pierwszego typu kredytowania, otrzymujemy następującą postać wszystkich charakterystyk kredytu

$$\begin{aligned} \underline{k}_l &= \frac{1}{N} U(t_0, t_l) k_0 \quad \leftarrow \quad \underline{f}_l = \frac{1}{N} \quad \rightarrow \\ \rightarrow \quad \underline{F}_l &= 1 - \frac{l}{N} \quad \rightarrow \quad F_l = \left(1 - \frac{l}{N}\right) U(t_0, t_l) \quad \rightarrow \\ \rightarrow \quad f_l &= \left(1 - \frac{l}{N}\right) u(t_0, t_l) + \frac{1}{N} U(t_0, t_{l-1}) \quad \rightarrow \\ \rightarrow \quad k_l &= \left(1 - \frac{l}{N}\right) (U(t_l, t_{l-1}) - 1) k_0 + \frac{1}{N} U(t_l, t_{l-1}) k_0. \end{aligned}$$

Ta forma kredytu bankowego należy do najpopularniejszych.

W przypadku  $N \rightarrow \infty$  otrzymamy już opisany  $\underline{F}^\infty$ -kredyt.

**5.6.  $f$ -kredyt: Kredyt o realnie stałych ratach spłaty** Jako model dwoisty do  $\underline{f}$ -kredytu, spełnia on następujące wzory

$$k_l = \frac{1}{N} U(t_l, t_0) k_0, \quad f_l = \frac{1}{N},$$

$$F_l = 1 - \frac{l}{N}, \quad \underline{F}_l = \left(1 - \frac{l}{N}\right) U(t_l, t_0),$$

$$\underline{f}_l = \left(1 - \frac{l}{N}\right) \underline{u}(t_l, t_0) + \frac{1}{N} U(t_{l-1}, t_0),$$

$$\underline{k}_l = \left(1 - \frac{l}{N}\right) (U(t_{l-1}, t_l) - 1) k_0 + \frac{1}{N} U(t_{l-1}, t_l) k_0.$$

Przy użyteczności klienta upodabniającej się, w trakcie spłaty kredytu, do użyteczności banku, obciążenie klienta zmierza do równomiernego rozłożenia w czasie.

Dla  $N \rightarrow \infty$  otrzymamy opisany  $F^\infty$ -kredyt.

**5.7.  $\underline{k}$ -kredyt: Kredyt o realnie stałych ratach kapitałowych** Stała  $\underline{k}_l$  została tak dobrana, by suma ciągu  $\underline{f}$  była 1. Wzory są, podobnie jak dla  $\underline{F}$ -kredytu, następujące:

$$\begin{aligned}\underline{k}_l &= \left( \sum_{s=1}^N U(t_s, t_0) \right)^{-1} k_0, \quad \underline{f}_l = \left( \sum_{s=1}^N U(t_s, t_0) \right)^{-1} U(t_l, t_0), \\ \underline{F}_l &= \left( \sum_{s=1}^N U(t_s, t_0) \right)^{-1} \sum_{r=l+1}^N U(t_r, t_0), \quad F_l = \left( \sum_{s=1}^N U(t_s, t_0) \right)^{-1} \sum_{r=l+1}^N U(t_r, t_l), \\ f_l &= \left( \sum_{s=1}^N U(t_s, t_0) \right)^{-1} \left( 1 + (U(t_l, t_{l-1}) - 1) \sum_{r=l}^N U(t_r, t_l) \right), \\ k_l &= \left( \sum_{s=1}^N U(t_s, t_0) \right)^{-1} \left( 1 + (U(t_l, t_{l-1}) - 1) \sum_{r=l}^N U(t_r, t_0) \right) k_0.\end{aligned}$$

Typ graniczny jest  $\underline{F}^\infty$ -kredytem.

**5.8.  $k$ -kredyt: Kredyt o nominalnie stałych ratach spłaty** Na podstawie dwoistości do poprzedniego modelu otrzymamy poniższe formuły.

$$\begin{aligned}k_l &= \left( \sum_{s=1}^N U(t_0, t_s) \right)^{-1} k_0, \quad f_l = \left( \sum_{s=1}^N U(t_0, t_s) \right)^{-1} U(t_0, t_l), \\ F_l &= \left( \sum_{s=1}^N U(t_0, t_s) \right)^{-1} \sum_{r=l+1}^N U(t_0, t_r), \quad \underline{F}_l = \left( \sum_{s=1}^N U(t_0, t_s) \right)^{-1} \sum_{r=l+1}^N U(t_l, t_r), \\ \underline{f}_l &= \left( \sum_{s=1}^N U(t_0, t_s) \right)^{-1} \left( 1 + (U(t_{l-1}, t_l) - 1) \sum_{r=l}^N U(t_l, t_r) \right), \\ \underline{k}_l &= \left( \sum_{s=1}^N U(t_0, t_s) \right)^{-1} \left( 1 + (U(t_{l-1}, t_l) - 1) \sum_{r=l}^N U(t_0, t_r) \right) k_0.\end{aligned}$$

Podstawienie  $k_0 = \sum_{s=1}^N U(t_0, t_s) k_o$ , gdzie  $k_o$  jest nominałem pojedynczego kuponu, prowadzi do formuł opisujących wartość kompletu kuponów odłączonych od obligacji (czy bankowych lokat terminowych). łącznie z parametrami dla „ogółoconej” obligacji, wyznaczonymi w sposób wspomniany przy prezentacji  $F$ -kredytu, otrzymujemy pełny opis ewolucji czasowej wartości tego typu papierów z kuponami.

Oznaczmy

$$s_l := \sum_{s=l+1}^{\infty} U(t_0, t_s).$$

W granicy  $N \rightarrow \infty$  uzyskamy nowy typ kredytu.



**5.9.  $k^\infty$ -kredyt:** W przypadku poprzedniego typu kredytu odpowiednio **Nominalnie stała renta** i **wiednie graniczne** wzory są następujące:  
**wieczysta**

$$k_l = \varsigma_0^{-1} k_0, \quad f_l = \varsigma_0^{-1} U(t_0, t_l), \quad F_l = \varsigma_0^{-1} \varsigma_l,$$

$$\underline{F}_l = \varsigma_0^{-1} \varsigma_l U(t_l, t_0), \quad \underline{f}_l = \varsigma_0^{-1} (1 + \varsigma_{l-1} \underline{u}(t_l, t_0)),$$

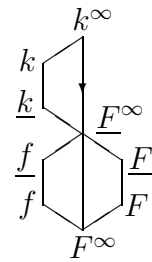
$$\underline{k}_l = \varsigma_0^{-1} (1 + \varsigma_{l-1} (U(t_{l-1}, t_l) - 1)) k_0.$$

Dla typowych funkcji użyteczności, zmieniających się wykładniczo w czasie, wyrażenia graniczne  $\varsigma_l$  istnieją, więc przedstawione wzory są poprawne.

Na tym zostały wyczerpane wszystkie typy kredytów, których niezmiennik jest jednym z podstawowych i omówionych tu ciągów parametrów pożyczki ( $f$ ,  $F$ ,  $k$ , lub  $\underline{f}$ ,  $\underline{F}$ ,  $\underline{k}$ ).

Pomimo równoważności różnych konwencji postrzegania kredytów, mniej popularna konwencja z kapitalizacją posiada nieznaczną przewagę w postaci prostszego ujmowania większej liczby typów kredytowania (pięć spośród dziewięciu).

Algebraiczne powiązania podstawowych 9-ciu typów kredytów można przedstawić przy pomocy poniższego grafu w kształcie przekreślonej litery  $\delta$ . Wierzchołki grafu symbolizują różne typy kredytów. Pionowe połączenia wskazują dwoistość typów, a ukośne — przejścia graniczne. Jednak strzałka nie wskazuje powiązania typów dwoistych, lecz jedynie możliwość dokonania przejścia do formuł modelu wskazanego strzałką, przy pomocy poniżej sformułowanej zasady dwoistości. Cztery centralnie położone w grafie typy dotyczą konwencji bez kapitalizacji, pozostałe — konwencji z kapitalizacją. W osi środkowej sytuują się przypadki graniczne.



W podobny sposób można opisać wszystkie stosowane w praktyce kredyty czy renty. Przydatne byłoby połączenie praktykowanych modeli w dwoiste pary. Może okazałoby się, że brakuje na rynku kredytowym ofert, których dwoiste odpowiedniki z powodzeniem są stosowane. Taki dwoisty „nieznajomy” mógłby okazać się atrakcyjnym narzędziem finansowym. Przedstawiony schemat można także stosować jako technikę generowania nowego typu kredytowania. W tym celu wystarczy określić interesującą postać niezmiennika, a rachunki, analogiczne do zaprezentowanych w bieżącym rozdziale, pozwolą otrzymać, wykorzystując dwoistość i przejścia graniczne, co najwyżej cztery nowe typy kredytów.

Zreasumujmy opisaną wyżej własność sposobów kredytowania przy pomocy poniższej zasady.

*Zasada dwoistości kredytów. Dla określonej funkcji  $U(t_0, t)$  każdy kredyt złożony można opisać rozkładem wag  $f$  (bądź równoważnymi jemu ciągami parametrów  $F$ ,  $k$ ,  $\underline{f}$ ,  $\underline{F}$ , czy  $\underline{k}$ ). Istnieje sposób kredytowania  $f^*$*

dwoisty do niego, w którym konwencje z kapitalizacją i bez kapitalizacji zamieniają się interpretacją spłat, czyli parametry pożyczki dwoistej mają następującą postać:

$$\begin{array}{lll} \text{rozkłady,} & \text{dystrybuanty,} & \text{raty,} \\ f^*(U) = \underline{f}(U^{-1}), & F^*(U) = \underline{F}(U^{-1}), & k^*(U) = \underline{k}(U^{-1}). \end{array}$$

Lewe strony powyższych równości, związanych z różnymi gustami definiowania kredytu (przy pomocy wag, dystrybuant, bądź rat), dotyczą konwencji z kapitalizacją, zaś prawe — konwencji bez kapitalizacji.



Na ograniczonych przedziałach czasowych, gdzie zawsze istnieje  $U^{-1}$ , oczywistą własnością dwoistości jest jej inwolucywność, to znaczy  $(k^*)^* = k$ . Analogiczna powyższej druga trójka równości, z przestawionymi na lewe strony gwiazdkami, nie wnosi więc nic nowego ponad znane już tożsamości. Taka sama uwaga dotyczy przekładania indeksu „ $-1$ ” na lewą stronę każdej z trzech powyższych równości.

Przedstawione własności kredytów obrazują fakt, że znajomość *twierdzenia o istnieniu izomorfizmu* wystarcza do zrozumienia wszystkich, później wypisanych symetrii, a kończąca rozważania zasada jest praktyczną konsekwencją owego twierdzenia. Pamiętać jednak należy, że zasada dwoistości nie musi obowiązywać dla przypadków granicznych, gdyż istnieją takie ciągi rat kredytu  $k$ , że

$$(k^*)^\infty \neq (k^\infty)^*.$$

## § 6. Komentarze

- Uwzględnienie w rachunkach innych czynników zmian użyteczności pieniądza, na przykład inflacji, nie przedstawia żadnych trudności. Wystarczy w odpowiednich wzorach dokonać transformacji  $\$l \rightarrow U(t_l, t_0) \$l$ , gdzie  $U(t_l, t_0) = e^{\int_{t_0}^{t_l} r(t) dt}$ , a  $r(t)$  jest odpowiednią różniczkową stopą procentową np. inflacji.
- W ramach użytego w rozdziale formalizmu wszystkie spostrzeżenia pozostają prawdziwe dla dowolnych proporcji między kolejnymi długościami odcinków czasu, dzielących chwile spłaty kredytu. Spłaty mogą więc zachodzić nierytmicznie.
- Różne jakościowo techniki rozliczania kredytu mogą prowadzić, w przypadkach granicznych, do jednakowego kredytu wieczystego.
- Stosując przedziałową stopę procentową unikniemy problemów wynikających z niezgodności terminów rat kredytu z okresami odsetkowymi dla stopy procentowej.
- Wszystkie przedstawione w rozdziale wzory pozostają prawdziwe dla zobowiązań finansowych sprzedawanych z dyskontem. Kwotę  $k_0$  należy wtedy właściwie interpretować, np. stosując wspomniane przy opisie  $F$ -kredytu podstawienie  $k_0 = U(t_0, t_N)k_{\dagger}$ .
- Prezentowany tu opis pożyczek daje się zrandomizować, co rozszerza dziedzinę zastosowań algebry kredytów na ubezpieczenia, loterie i zakłady bukmacherskie [Pio97].
- Istnieje *continuum* możliwych konwencji opisywania kredytów, które definiuje dystrybuanta  $F(\alpha)$  o postaci

$$F(\alpha) := \alpha F + (1 - \alpha) \underline{F},$$

gdzie  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Analogiczne wzory dotyczą definicji ciągów  $f(\alpha)$  i  $k(\alpha)$ .

- Powyższe rozważania można powtórzyć w języku rzeczywistych przestrzeni rzutowych, których punktami są różne kredyty. Podejście takie uwalnia sformułowania od wyróżnienia *a priori* niektórych momentów czasu (np. początku, czy końca procesu). Spełnienie współzmienniczości względem odwzorowań rzutowych pozwala uniknąć kłopotliwych paradoksów [Pio97].

## Reprezentacja Bernoulliego

W czterech kolejnych rozdziałach zbadamy podstawową dla matematyki finansowej strukturę algebraiczną, której wyrażenia symboliczne obejmują wszelkie operacje kapitałowe. Jej trzy znane od stuleci reprezentacje zawierają popularne zależności pomiędzy różnymi typami stóp procentowych. Poznamy ściśle formuły dla wyznaczania multiplikatywnych czynników dyskontowych. Proponowane ciągi stóp procentowych kolejnych rzędów umożliwiają dowolnie dokładnie modelowanie przebiegów procesów kapitałowych, pozwalając jednocześnie w różnych konwencjach, czyli różnych reprezentacjach algebry stopy, przeliczać operacje kapitałowe.

---

### § 1. Operatorowa stopa zwrotu

Dla potrzeb rachunku finansowego własności postępu geometrycznego wykorzystywano już w czasach poprzedzających doniosłe osiągnięcia matematyków antycznej Grecji. Na ile formuły te stanowią sedno idei kredytu? Czy istnieje oparty na nich jednolity formalizm ujmujący całość konwencji procentowych? Takie pytania kuszą, bo wiążą się z nadzieją uproszczenia teorii, uproszczenia będącego mechanizmem stymulującym rozwój badań, narzucającym ekonomię myślenia w opisach modeli racjonalnych, więc ekonomicznych zachowań i działań.

W dobie ekspansji technologii informatycznych coraz większe znaczenie uzyskują metody automatyzacji procedur rachunkowych, które stwarzają zapotrzebowanie na konstruowanie sztucznych języków programowania komputerów. Języki te służą do formułowania algorytmów dotychczas wykonywanych wyłącznie przez świadome jednostki, potrafiące skutecznie komunikować się jedynie za pomocą logicznie nieprecyzyjnych i bogatych w kulturowe konteksty opisów przeprowadzanych czynności. Poniżej omówiona algebra, oparta tylko na dwóch generatorach, może opisywać w różnych swych reprezentacjach niezwykle bogatą w możliwości aplikacyjne rodzinę operacji formalnych,

która prócz znanych, tradycyjnych technik finansowych, zawiera nowe propozycje ilościowego spojrzenia na ideę kredytu. Rozwijane w minionej dekadzie komputerowe rachunki symboliczne, znane powszechnie choćby ze stosowania narzędzi programistycznych w rodzaju pakietów *Maple*, czy *Mathematica*, pozwalają na indywidualne wdrożenia obliczeń o charakterze operacyjnym, powiązanych z końcowym wykorzystaniem numerycznym algebraicznie przekształconych i uproszczonych, symbolicznie zapisanych procedur. Rozdzielenie uniwersalnych własności algebraicznych rachunku symbolicznego od specyficznych własności, charakterystycznych jedynie dla określonej w modelu (np. finansowym) reprezentacji numerycznej przeprowadzanych operacji, poważnie skraca opis algorytmów i ich programowanie, czyniąc je bardziej ogólnymi i wolnymi od przypadkowych błędów, mnożących się przy braku syntetycznego oglądu całości zagadnienia.

Omawianą w tym rozdziale algebrę stopy zwrotu generuje zbiór dwóch operacji  $r$  i  $s$  których komutator  $[r, s] := r \circ s - s \circ r$  (symbol  $r \circ s$  oznacza złożenie, tzn. wykonanie operacji  $s$ , a po niej operacji  $r$ ) pozwala dyskontować kapitał do jego wartości w ustalonym terminie. W związku z tym warto zauważyć, że komutator gra kluczową rolę w całej fizyce teoretycznej<sup>1</sup>, łącząc ze sobą teorie klasyczne z kwantowymi. Algebra generowana elementami  $r$  i  $s$  o własnościach  $[r, [r, s]] = [s, [r, s]] = 0$  nosi nazwę *algebry Heisenberga-Weyla*, bądź *algebry kanonicznych relacji komutacji* [Enc97]. Zważywszy na fundamentalną rolę, jaką algebra ta odgrywa we współczesnym rozwoju teorii kwantowych, można stwierdzić głębokie związki pomiędzy omawianymi tu zagadnieniami, a tematyką zawartą w trzeciej części tej książki. Trzy klasyczne reprezentacje owej algebry są doskonale znane czytelnikom podręczników matematyki finansowej: jedna na przestrzeni funkcji gładkich zmiennej rzeczywistej (czasu), dwie na przestrzeni ciągów, elementy których numeruje dyskretna zmienna czasowa. Autor proponuje powiązanie nazw tych trzech reprezentacji z odkrywcami formuł pozwalających (dla odpowiednich przedstawień) wyznaczać jawną postać wyniku działania komutatora  $[r, s]$ , czyli najprostszej (bo polegającej na przeskalowaniu wartości liczbowej kapitału), a zarazem podstawowej operacji finansowej. Istnieje jeszcze wiele innych reprezentacji tej algebry, ciągle nieznanymi praktykom, a posiadających bardzo interesujące konteksty finansowe.

W podstawach wszystkich rachunków dla reprezentacji naszej algebry można doszukać się tzw. *formuły teleskopowej*. Idea tego wzoru, a przynajmniej konsekwencje, wydaje się znacznie starsza od wynalazku teleskopu. Poniższy tekst zasługuje na uwagę także z powodów dydaktycznych — przedstawia on wyjątkowo krótki wariant kompletnego elementarnego dowodu poprawności

---

<sup>1</sup>zob. np. [BBB74]

rozwińnięcia funkcji w szereg Taylora z dokładnie określoną resztą, wraz z dwoma jego dyskretnymi analogonami, a przecież rozwinięcie Taylora stanowi podstawę zastosowań analizy matematycznej i omawiane jest na wszelkiego rodzaju wykładach z tzw. matematyki stosowanej.

Dyskretne formuły Newtona służą od wieków w rozwiązywaniu problemów praktycznych związanych z zagadnieniem interpolacji. Tożsamości kombinatoryczne pojawiające się we wszystkich poniżej omawianych reprezentacjach algebry stopy należą do znanych od dawna formuł, rzadko razem zestawianych we współczesnych opracowaniach. Większą ich część (dla wariantu  $a=0$ ) znajdziemy w artykule O.V. Viskova [Vis86]. Podstawowe spośród niżej przedstawionych własności algebraicznych różnych rodzajów stóp rozważaliśmy w rozdziale 7.

## § 2. Algebra stopy

Przejdźmy do ilościowych definicji wyżej wspomnianej pary operacji finansowych. Przypomnijmy, że różniczkową stopę zwrotu  $r_t$  definiuje następujący jej związek z funkcyjną zależnością wartości kapitału  $k(t)$  od czasu  $t$ :

$$(9.1) \quad k(t_2) = e^{\int_{t_1}^{t_2} r(\tau) d\tau} k(t_1),$$

która po zróżniczkowaniu obydwu jej stron po czasie  $t_2$  prowadzi do poniższej formuły dla stopy zwrotu  $r(t)$ :

$$r(t) k(t) = \frac{d}{dt} k(t).$$

Z tej przyczyny, w różniczkowej konwencji opisu ewolucji wielkości kapitałowych, jest naturalnym uznanie operatora różniczkowania

$$(9.2) \quad \mathbf{r} := \frac{d}{dt}$$

za operator stopy zwrotu, bowiem w działaniu na funkcję kapitału daje w wyniku chwilowy przyrost kapitału wyrażający się wielkością  $r(t) k(t)$ . Definicja (9.2) oznacza, że działając operatorem stopy na dowolną funkcję kapitału należącą do klasy funkcji różniczkowalnych  $\{f(t)\}$ , dostaniemy w efekcie szybkość jej zmiany<sup>2</sup>, czyli jej pochodną:

$$\mathbf{r} f(t) := \frac{df(t)}{dt}.$$

<sup>2</sup>często zwaną *strumieniem*

Wygodnym okaże się rozważenie, łącznie z operacją różniczkowania, odwrotnego do niej operatora całkowania:

$$\mathbf{s} := \int_a^t d\tau,$$

czyli

$$\mathbf{s} f(t) := \int_a^t d\tau f(\tau),$$

gdzie  $a$  oznacza dowolną ustaloną chwilę czasu. Chcąc zachować przejrzystość notacji operatorowej autor posłużył się konwencją wypisywania zmiennej całkowania bezpośrednio po znaku całki. Interpretacja finansowa operacji  $\mathbf{s}$  jest oczywista — wartością tego operatora na dowolnej chwilowej prędkości zmiany kapitału jest całkowity przyrost tego kapitału liczony od chwili  $a$ :

$$\mathbf{s} \frac{dk}{dt} = \int_a^t d\tau \frac{dk}{d\tau} = k(t) - k(a).$$

Wraz z operatorem tożsamościowym (tradycyjnie oznaczamy go symbolem  $\mathbf{1}$ ) trójka  $\{\mathbf{1}, \mathbf{r}, \mathbf{s}\}$  generuje na klasie funkcji  $C^\infty(\mathbb{R})$  łączną, choć nieprzemianną algebrę z naturalnymi działaniami składania operacji, ich dodawania oraz mnożenia operacji przez liczby. Strukturę tą ze względów interpretacyjnych nazwiemy *algebrą stopy*. Posiada ona proste i przydatne własności, a jej realizacjom na przestrzeniach innych niż  $C^\infty(\mathbb{R})$ , jednak mających interesujący kontekst finansowy, będą poświęcone dalsze paragrafy tego artykułu. Opisaną realizację różniczkową, z przyczyn wyjaśnionych niżej, nazwiemy *reprezentacją Bernoulliego* algebry stopy.

### § 3. Formuła Cauchy'ego

Najprostszą do określenia klasą operatorów algebry stopy są jednorodnie jednomiany różniczkowań  $\mathbf{r}^m$ . Posiadamy efektywną recepturę prowadzącą do wyznaczenia ich działania, choćby w postaci wyznaczania granic kolejnych ilorazów różniczkowych. Przez analogię do operatora stopy zwrotu  $\mathbf{r}$  operator  $\mathbf{r}^m$  nazwiemy operatorem stopy  $m$ -tego rzędu, a odpowiednią funkcję  $r_m(t)$  zdefiniowaną równością

$$(9.3) \quad \mathbf{r}^m f(t) = r_m(t) f(t)$$

różniczkową stopą  $m$ -tego rzędu. W poprzednim paragrafie mieliśmy do czynienia ze stopą pierwszego rzędu  $r(t) = r_1(t)$ . Choć trudniejszy w bezpośrednich rachunkach, operator  $s$  posiada pewną ciekawą własność, która pozwala wyznaczyć wynik działania wielokrotnego jego złożenia  $s^m := \overbrace{s \circ s \circ \dots \circ s}^{m \text{ razy}}$  przez jednokrotne zastosowanie operacji  $s$  na nieco odmiennym elemencie jego dziedziny. Znamy bowiem formułę wielokrotnego całkowania pochodzącą od Cauchy'ego

$$(9.4) \quad \begin{aligned} s^m f(t) &= \\ &= \int_a^t d\tau_1 \int_a^{\tau_1} d\tau_2 \dots \int_a^{\tau_{m-1}} d\tau_m f(\tau_m) = \int_a^t d\tau \frac{(t-\tau)^{m-1}}{(m-1)!} f(\tau) = \\ &= s \frac{(\tau-t)^{m-1}}{(m-1)!} f(t) \Big|_{\tau=t}, \end{aligned}$$

której dowód indukcyjny jest elementarny.

Dowód. Dla  $m=1$  obie strony formuły (9.4) są taką samą całką  $\int_a^t d\tau f(\tau)$ . Dla  $(m+1)$ -krotnej całki mamy

$$\begin{aligned} s^{m+1} f(t) &= s \int_a^t d\tau \frac{(t-\tau)^{m-1}}{(m-1)!} f(\tau) = \\ &= \int_a^t d\tau \int_a^{\tau} d\tau_1 \frac{(\tau-\tau_1)^{m-1}}{(m-1)!} f(\tau_1) = \int_a^t d\tau \int_a^{\tau} d\tau_1 f(\tau_1) \frac{d}{d\tau} \frac{(\tau-\tau_1)^m}{m!} = \\ &= \int_a^t d\tau_1 \int_{\tau_1}^t d\tau f(\tau_1) \frac{d}{d\tau} \frac{(\tau-\tau_1)^m}{m!} = \int_a^t d\tau_1 \frac{(t-\tau_1)^m}{m!} f(\tau_1), \end{aligned}$$

gdzie pierwsza z równości wynika z założenia indukcyjnego, a czwarta z zamiany kolejności całkowania. Przedstawienie działania operatora  $s^{m+1}$  za pomocą ostatniej całki jest końcowym krokiem dowodu przez indukcję formuły Cauchy'ego.  $\square$

#### § 4. Złożenia operacji podstawowych

Określmy w reprezentacji Bernoulliego działanie operacji złożonej polegającej na kolejnym wykonaniu dwóch operacji elementarnych  $r$  i  $s$ . Można ją,



wybierając różne kolejności składania, przeprowadzić na dwa sposoby:

$$\mathbf{s} \circ \mathbf{r} f(t) = \int_a^t d\tau \frac{df(\tau)}{d\tau} = f(t) - f(a),$$

bądź

$$\mathbf{r} \circ \mathbf{s} f(t) = \frac{d}{dt} \int_a^t d\tau f(\tau) = f(t) = \mathbf{I} f(t), \quad \text{tzn.}$$

$$(9.5) \quad \mathbf{r} \circ \mathbf{s} = \mathbf{I},$$

czyli operatory  $\mathbf{r}$  i  $\mathbf{s}$  są nieprzemienne. Z uwagi na ostatni rezultat wyrażenia  $\mathbf{r} \circ \mathbf{s}$  występujące w złożeniach z innymi elementami algebry można pominąć we wszelkich rachunkach w reprezentacji Bernoulliego.

Jak już wspominaliśmy na wstępie, komutatorem  $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$  dwóch operatorów  $\mathbf{u}$  i  $\mathbf{v}$  nazywamy różnicę ich złożenia w różnych kolejnościach, czyli wielkość  $[\mathbf{u}, \mathbf{v}] := \mathbf{u} \circ \mathbf{v} - \mathbf{v} \circ \mathbf{u}$ . Dla jedynej nieprzemiennej pary generatorów algebry stopy w reprezentacji Bernoulliego otrzymamy

$$[\mathbf{r}, \mathbf{s}] f(t) = \mathbf{r} \circ \mathbf{s} f(t) - \mathbf{s} \circ \mathbf{r} f(t) = f(a) = e^{\int_a^t d\tau r(\tau)} f(t),$$

gdzie ostatnia równość wynika z definicji stopy (9.1). Wielkość  $[\mathbf{r}, \mathbf{s}]$  posiada więc fundamentalną interpretację finansową — jest operatorem dyskontującym kapitał  $f(t)$  do jego wartości na ustaloną chwilę  $a$ , czyli do  $f(a)$ . Operator taki w teorii równań różniczkowych nosi nazwę operatora rezolwenty. Komutator  $[\mathbf{r}, \mathbf{s}]$  — okazujący się operatorem mnożenia przez funkcję liczbową, więc komutujący (przemienny) z operatorami  $\mathbf{r}$  i  $\mathbf{s}$  — pozwala porównywać wartości kapitału w różnych chwilach czasowych przez odniesienie ich do jednakowej miary kapitałowej — dowolnej wielkości nominującej kapitał w ustalonej chwili  $a$ . Warto zwrócić uwagę, że operacja dyskontowania  $[\mathbf{r}, \mathbf{s}]$ , chociaż rachunkowo prostsza od  $\mathbf{r}$  i  $\mathbf{s}$  (bo polegająca jedynie na przemnożeniu elementów  $f(t)$  dziedziny reprezentacji przez liczbę), jest w kontekście algebraicznym operacją w stosunku do tamtych złożoną (bo skonstruowaną z generatorów  $\mathbf{r}$  i  $\mathbf{s}$  algebry stopy).

## § 5. Suma teleskopowa

Wszelkie obliczenia finansowe w kontekście algebry stopy można wyrazić jako sumę operacji w postaci  $\mathbf{s}^{k_1} \circ \mathbf{r}^{k_2} \circ \mathbf{s}^{k_3} \circ \mathbf{r}^{k_4} \circ \dots$ , gdzie ilości złożenia  $k_i$  operacji jednego typu ( $i = 1, \dots$ ) są dowolnymi nieujemnymi liczbami całkowitymi. Znajomość komutatora  $[\mathbf{r}, \mathbf{s}]$  pozwala wszystkie operatory  $\mathbf{s}$  „przepchać” na lewą

stronę (czyli do końcowego etapu obliczeń) takich operacji złożonych (wielokrotnie wykorzystując tożsamość  $\mathbf{r} \circ \mathbf{s} = \mathbf{s} \circ \mathbf{r} + [\mathbf{r}, \mathbf{s}]$ ). Dzięki temu zabiegowi jedynymi nieznanymi jeszcze typami złożzeń generatorów algebry stopy są wyrażenia postaci  $\mathbf{w}_m := \mathbf{s}^m \circ \mathbf{r}^m$ . Jest tak gdyż dla  $k > l$  wyrażenie  $\mathbf{s}^k \circ \mathbf{r}^l = \mathbf{s}^{(k-l)} \circ \mathbf{s}^l \circ \mathbf{r}^l$  to złożenie operacji typu  $\mathbf{s}^m \circ \mathbf{r}^m$  i  $\mathbf{s}^n$ . Analogicznie możemy przedstawić wyrażenie  $\mathbf{s}^l \circ \mathbf{r}^k$ . Aby operatory  $\mathbf{w}_m$  zastąpić wyrażeniami niższych rzędów i w ten sposób, stosując rekurencję, wyznaczyć efektywnie działanie dowolnego operatora należącego do algebry stopy, zastosujemy znany choćby z wyznaczania sumy szeregu geometrycznego sposób przedstawiania  $(n+1)$ -szego wyrazu ciągu za pomocą sumy wyrazów niższych rzędów. Trik ów polega na odjęciu dwóch przesuniętych względem siebie szeregów utworzonych na bazie tego samego ciągu wyrazów

$$(9.6) \quad \sum_{k=0}^m (\mathbf{w}_k - \mathbf{w}_{k+1}) = \mathbf{w}_0 - \mathbf{w}_{m+1}.$$

Po uwzględnieniu interesującej nas postaci operatora  $\mathbf{w}_m$  otrzymamy następującą tożsamość operatorową

$$(9.7) \quad \sum_{k=0}^m \mathbf{s}^k \circ (\mathbf{I} - \mathbf{s} \circ \mathbf{r}) \circ \mathbf{r}^k = \mathbf{I} - \mathbf{s}^{m+1} \circ \mathbf{r}^{m+1}$$

Sumy postaci (9.6) są nazywane *sumami teleskopowymi* [GKP96] bowiem m.in. opisują sposób wyznaczania długości złożonego teleskopu, doskonale obrazującego własność wzajemnego redukowania się zachodzących na siebie segmentów o jednakowej długości. Dlatego odwołując się do tożsamości (9.7) będziemy nazywać ją formułą teleskopową. Wyrażenie w nawiasach jest komutatorem  $[\mathbf{r}, \mathbf{s}]$ , więc możemy zastąpić je czynnikiem dyskontującym prawą stronę do chwili  $a$ . Z prawej strony operatora  $\mathbf{s}^k$  będzie znajdować się wielkość stała (niezależna od  $t$ ), a  $\mathbf{s}^k$  w działaniu na stałą mnoży ją przez czynnik  $\frac{(t-a)^k}{k!}$  (wynik  $k$ -krotnego wycałkowania funkcji stałej). W ten sposób powyższa tożsamość operatorowa zastosowana dla dowolnej funkcji  $f(t)$  z klasy  $C^{k+1}$  da następującą równość

$$(9.8) \quad \sum_{k=0}^m \mathbf{s}^k \circ (\mathbf{I} - \mathbf{s} \circ \mathbf{r}) \circ \mathbf{r}^k f(t) = \sum_{k=0}^m \frac{(t-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) = f(t) - \mathbf{s}^{m+1} f^{(m+1)}(t),$$

gdzie  $f^{(k)}(a)$  oznacza  $k$ -tą pochodną funkcji  $f(t)$  w punkcie  $t = a$ .



### § 6. Komutator — operacja dyskontowania

Stosując formułę Cauchy'ego otrzymaliśmy równość, która przedstawia funkcję  $f(t)$  poprzez znany z podręczników analizy matematycznej szereg Taylora (!) z precyzyjnie wyznaczoną resztą w postaci całkowej [Enc97] rzędu  $m + 1$

$$f(t) = [\mathbf{r}, \mathbf{s}]^{-1} f(a) = \sum_{k=0}^m \frac{(t-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^t d\tau \frac{(t-\tau)^m}{m!} f^{(m+1)}(\tau),$$

gdzie  $[\mathbf{r}, \mathbf{s}]^{-1}$  jest operatorem dyskontującym kapitał z chwili  $a$  do chwili  $t$ , czyli operatorem odwrotnym do  $[\mathbf{r}, \mathbf{s}]$ , więc  $[\mathbf{r}, \mathbf{s}]^{-1} \circ [\mathbf{r}, \mathbf{s}] = [\mathbf{r}, \mathbf{s}] \circ [\mathbf{r}, \mathbf{s}]^{-1} = \mathbf{I}$ . W dobrze znany z analizy matematycznej sposób możemy stan kapitału na chwilę  $t$ , określony stosownie gładką funkcją  $f(t)$  aproksymować coraz to dokładniej za pomocą ciągu stóp różniczkowych kolejnych rzędów

$$f(t) \simeq \sum_{k=0}^m \frac{(t-a)^k}{k!} r_k(a) f(a),$$

czyli

$$(9.9) \quad [\mathbf{r}, \mathbf{s}]^{-1} = e^{\int_a^t d\tau r(\tau)} = e^{(t-a) \frac{d}{d\tau} \Big|_{\tau=a}} \simeq \sum_{k=0}^m \frac{(t-a)^k}{k!} r_k(a).$$

Druga z powyższych równości jest konsekwencją zastosowania powszechnie przyjętej definicji funkcji wykładniczej, tzn.  $e^x := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ . W ten sposób wszystkie możliwe operacje finansowe algebry stopy, łącznie z najpopularniejszymi operacjami określania procentu  $r$ , wyznaczania przyrostu kapitału  $s$  i operacją ustalania dyskonta (komutator  $[\mathbf{r}, \mathbf{s}]$ ), przeprowadzanymi w dowolnych chwilach trwania procesu kapitałowego, sprowadziliśmy do znajomości ciągu  $1, r_1, r_2, r_3, \dots$  stóp różniczkowych kolejnych rzędów dla ustalonej chwili czasowej  $a$ . Formę rozwinięcia w szereg zgodną ze wzorem (9.9) odkrył już w 1693 roku Johann Bernoulli, patrz np. [Jus76], dlatego autor nazwał omawianą reprezentację algebry stopy mianem *reprezentacji Bernoulliego*.

## § 7. Przekształcenia kanoniczne

Dla wygenerowania algebry stopy zamiast operatorów  $r$  i  $s$  można wybrać inną parę generatorów  $v$  i  $w$ . Odwzorowania generatorów  $(r, s) \rightarrow (v, w)$  zachowujące komutator (czyli takie, dla których  $[v, w] = [r, s]$ ) noszą nazwę *przekształceń kanonicznych* [BBB74]. Grupa transformacji kanonicznych stanowi od ponad stu lat obiekt intensywnych badań fizyków. Podstawową korzyścią zajmowania się transformacjami kanonicznymi jest opis modelu o określonym sposobie dyskontowania w języku odpowiednich „współrzędnych”, czyli takich operacji algebraicznych  $v$  i  $w$ , na bazie których potrzebne w trakcie analizy ilościowej rachunki stają się szczególnie proste, więc też przejrzyste i szybkie w wykonaniu. Transformacje kanoniczne są zdefiniowane na poziomie algebry stopy, dlatego dotyczą wszystkich jej reprezentacji. Spośród nich można wyróżnić liniowe transformacje kanoniczne<sup>3</sup>, czyli takie, że  $v = \lambda_{11}r + \lambda_{12}s$ ,  $w = \lambda_{21}r + \lambda_{22}s$ . Z warunku niezmienniczości komutatora

$$[v, w] = (\lambda_{11}\lambda_{22} - \lambda_{12}\lambda_{21})[r, s] = [r, s]$$

wynika, że macierz takiego odwzorowania  $U = (\lambda_{ij})$  ma jednostkowy wyznacznik  $\det(U) = 1$ <sup>4</sup>. Na przykład do najprostszych odwzorowań unimodularnych należą te, które zachowują zbiór generatorów (z dokładnością do znaków). Reprezentują je macierze  $U$  postaci

$$(9.10) \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Łatwo zauważyć, że w reprezentacji Bernoulliego wymienione odwzorowania kanoniczne są trzema różnymi rodzajami zmiany czasowego kontekstu modelu. Pierwsza z transformacji (9.10) prowadzi do zmiany znaku zmiennej czasowej  $-t \rightarrow t$ , druga wprowadza konwencję obliczania przyrostów kapitału w kierunku przeciwnym do przyrostu czasu, a trzecia zmienia porządek czasowy na przeciwny (i nie jest tożsama z pierwszą).

Jeżeli dla czytelnika wypowiedzi podobne do poprzedniego zdania są w jakiegokolwiek mierze niejasne, może odwołać się do wzorów transformacyjnych (9.10), które najprecyzyjniej ujmują intencje autora. Zaprezentowana metoda ingerencji w sposoby interpretacji zmiennej czasowej w reprezentacji algebry okazała się możliwa, gdyż sama algebra Heisenberga–Weyla nie zawiera odniesień do czasu, ujmując proces kapitałowy w konwencji archimedesowej [Pri98]. Z

<sup>3</sup>takie przekształcenia będą miały sens w przestrzeniach rozpiętych przez wielomiany ortogonalne, gdzie dziedziny operatorów  $r$  i  $s$  pokrywają się

<sup>4</sup>macierz o tej własności nazywamy *macierzą unimodularną* [Enc97]

uwagi na rozległość zasygnalizowanego zagadnienia, i różnorodne korzyści płynące z badania finansowych aspektów transformacji kanonicznych, temat ten wymaga odrębnego opracowania.

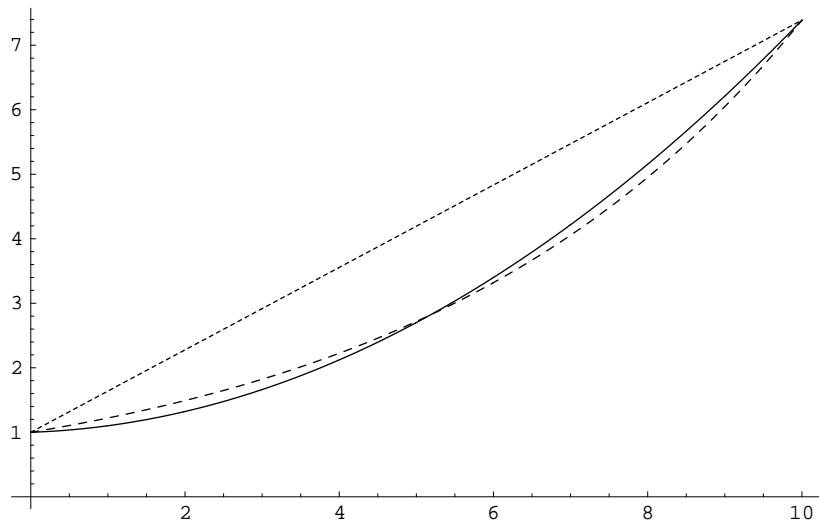
### § 8. Skale czasowe

Zmieniając jednostkę czasową używaną do opisu procesu kapitałowego powinniśmy także tak przeskalować stopy wszystkich rzędów aby zależności czasowe wielkości kapitału, a więc wynik działania operacji dyskontowania, nie uległy zmianie. Modyfikacja jednostki czasu prowadzi do podstawienia  $(t-a) \rightarrow \frac{(t-a)}{\lambda}$ , czyli np. wybierając jednostkę miesięczną wszystkie formuły wyrażone w jednostkach rocznych winny być w stosownych miejscach skorygowane o czynnik  $\lambda = 12$ . Niezmienniczość skalowania operacji dyskonta  $[r, s]$  oznacza, że dla zachowania formuły (9.9) powinniśmy dokonać następującego podstawienia  $r_k(a) \rightarrow \lambda^k r_k(a)$  odnośnie stopy  $k$ -tego rzędu, dla wszystkich rzędów ( $k = 1, 2, \dots$ ). Dla przykładu, zmiana jednostki czasowej z rocznej na miesięczną powoduje pojawienie się we wzorach w miejscu rocznej stopy drugiego rzędu wyrażenia  $12^2 r_2(a)$  i by liczbowo było ono równe poprzedniej rocznej stopie drugiego rzędu musimy wybrać miesięczną stopę drugiego rzędu 144 razy mniejszą od jej rocznego odpowiednika. Jest zrozumiałe, że takie manipulacje, będąc niezmienniczymi dla czynnika dyskonta, nie mogą powodować zmiany jakości przybliżenia, polegającego na pominięciu reszty odpowiedniego rzędu w szeregu Taylora. Przy ustalonym ciągu stóp kolejnych rzędów o jakości tego przybliżenia decyduje stosunkowo krótki okres związany z całym przebiegiem procesu kapitałowego (słowo krótki nabiera ilościowego znaczenia jedynie w kontekście ciągu stóp). W okresach inflacji, czy niezwykle zyskowych przedsięwzięć kapitałowych czas „upływa” znacznie szybciej.

### § 9. Przykłady

Zadanie dyskonta za pomocą ciągu stóp  $r_1(a) = r = \text{constans}$ ,  $r_2(a) = 0$ ,  $r_3(a) = 0, \dots$  określa formułę oprocentowania zwaną procentem prostym

$$[\mathbf{r}, \mathbf{s}]^{-1} = 1 + (t - a)r,$$



Rysunek 9.1. Proces kapitałowy wyznaczony wielomianem drugiego stopnia, najlepiej dopasowany do wzorcowego wzrostu wykładniczego.

zaś ciąg  $r_1(a) = r = \text{constans}$ ,  $r_2(a) = r^2$ ,  $r_3(a) = r^3$ , ... to stały procent w konwencji kapitalizacji ciągłej

$$[\mathbf{r}, \mathbf{s}] = e^{-(t-a)r}.$$

Dla przykładu rozważymy dziesięcioletni proces kapitałowy taki, że na początku tego okresu czasu kapitał wynosił  $f(0) = 1$ . Niech za wzorec wzrostu tego kapitału posłuży jego powiększanie się o stały roczny procent  $r = 0.2$  w konwencji kapitalizacyjnej ciągłej, czyli  $f(t) = e^{0.2t}$ . Na rysunku 9.1 krzywa przerywana obrazuje ten wykładniczy proces wzorcowy. Na tle tak określonych zmian wzorcowych rozważmy klasę procesów, dla których kapitał zmienia się w sposób ciągły w czasie, osiągając w chwilach początkowej ( $t = 0$ ) i końcowej ( $t = 10$ ) takie same wartości jak w procesie wzorcowym. Za miarę niedopasowania danego procesu do procesu wzorcowego wybierzmy średnie odchylenie kwadratowe danego kapitału od wysokości kapitału dla procesu wzorcowego. Rozważmy teraz dwuparametrową podklasę procesów, opisaną ciągiem stóp  $r_1(0), r_2(0), 0, 0, \dots$ , czyli procesów opisywanych krzywymi (wielomianami) drugiego stopnia. Wśród nich najbardziej dopasowany okazuje się proces określony następującymi parametrami (stopami pierwszego i drugiego rzędu):  $r_1 = 0.04164$ ,  $r_2 = 0.1195$ , przedstawiony na rysunku krzywą ciągłą. Niespodziewanym efektem jest prawie czterokrotna różnica pomiędzy stopami pierwszego rzędu dla procesu o wykładniczym wzroście i najlepiej do niego dopasowanym procesie opisywanym wielomianem kwadratowym. Obrazuje ona iluzję jakie może stwarzać powszechne kierowanie się jedynie wielkością stopy procentowej pierwszego rzędu. Decydującym o efekcie dobrego dopasowania

do wzorca parametrem jest tu stopa drugiego rzędu, prawie trzykrotnie wyższa niż dla procesu wykładniczego. Algorytm wyznaczający owe stopy zwrotu i generujący rysunek 9.1 zamieszczony jest w paragrafie 3 *Uzupełnień*. Analizując wykres procesu dostrzegamy jak stosunkowo wiernie ciągła krzywa odtwarza proces wzorcowy. Należący do klasy proces określony w konwencji procentu prostego (na rysunku linia prosta) jest na tyle rozbieżny w partii środkowej wykresu, w stosunku do procesu wzorcowego, że w trakcie jego trwania byłby przerwany w celu dokonania arbitrażu polegającego na przejściu do procesu wzorcowego. Takie niepożądane zjawisko niwelowane jest najczęściej poprzez ograniczenie płynności kapitału. Wydaje się niewłaściwą praktyką polegającą na stronienu od bardziej subtelnych technik rachunkowych kosztem zwiększania ryzyka spowodowanego częściową utratą płynności.

Reprezentacja Bernoulliego jest jedną z wielu różnych możliwych realizacji podstawowego twierdzenia analizy matematycznej o aproksymacji funkcji gładkich wielomianami. Ta idea Weierstrassa pozwala spojrzeć na zagadnienia stopy procentowej w pełni uniwersalnie, wiążąc pojęcie stopy zwrotu ze stosownie do sytuacji wybranym typem wielomianów stanowiących bazę metody aproksymacyjnej. Niczym rozważymy taką odmienną od reprezentacji Bernoulliego realizację algebry, przyjrzymy się dyskretnemu analogonowi opisu różniczkowego stopy.

## Reprezentacja dolna Newtona

### § 1. Reprezentacja generatorów algebry stopy

Zamiast infinitezimalnych zmian czasowych rozważymy dyskretną dziedzinę czasową, w której zmienna czasowa  $t$  jest elementem dziedziny będącej zbiorem liczb naturalnych (bądź całkowitych). Czas upływający pomiędzy kolejnymi całkowitymi wartościami zmiennej  $t$  nie musi koniecznie odpowiadać jednakowym odstępom czasowym określonym w mierze fizycznej (astronomicznej). Nieciągłość dziedziny czasowej wymaga zastąpienia rachunku różniczkowego rachunkiem różnicowym. Operator stopy  $\mathbf{r}$  będzie więc reprezentowany operatorem różnicowym

$$\mathbf{r} f(t) = \underline{\Delta} f(t) := f(t+1) - f(t).$$

Symbol  $\underline{\Delta}$  oznaczający operator różnicowy występuje z dolnym podkreśleniem bowiem operator skończonej różnicy można zdefiniować na dwa odmienne sposoby. Ten drugi zostanie opisany w następnym paragrafie, gdyż dotyczy reprezentacji algebry stopy dualnej do tu omawianej. Dla dbałości o poprawność przedstawionych niżej wzorów przyjmujemy od tego miejsca, że  $t$  i  $a$  oznaczają współrzędne dwóch chwil czasowych, uporządkowane tak, by zachodziła nierówność  $t \geq a$ . Nie oznacza to jednak, że chwila  $a$  jest wcześniejsza od chwili  $t$ . Także poprawnym jest opis procesów, w którym wcześniejsze chwile czasu są parametryzowane większymi liczbami — dla Archimedesesa znającego nasz kalendarz mierzony latami termin zwrotu długu byłby oznaczony liczbą mniejszą niż data jego zaciągnięcia (przyjmujemy, że lata p.n.e. numerują liczby dodatnie). Operator przyrostu kapitałowego  $\mathbf{s}$ , z uwagi na analogie występujące w reprezentacji Bernoulliego, będzie miał postać

$$\mathbf{s} := \sum_{\tau=a}^{t-1},$$



czyli

$$\mathbf{s} f(t) := \sum_{\tau=a}^{t-1} f(\tau).$$

Wyjaśnienie korespondencji pomiędzy operacjami  $\int_a^b d\tau$ , a  $\sum_{\tau=a}^{b-1}$  znajdziemy w książce [GKP96]. Dla prawidłowego stosowania rachunku operatorowego warto rozważyć tu pewną sytuację. Rozpatrzmy funkcję  $g(t) := f(t+c)$ . Wtedy

$$\mathbf{s} f(t+c) = \mathbf{s} g(t) = \sum_{\tau=a}^{t-1} g(\tau) = \sum_{\tau=a}^{t-1} f(\tau+c),$$

więc przesuując argument funkcji, na którą działa operator  $\mathbf{s}$ , należy zadbać o niezmienniczość górnej granicy sumowania. Komutator generatorów algebry stopy będzie działał następująco

$$\begin{aligned} [\mathbf{r}, \mathbf{s}] f(t) &= \left( \mathbf{r} \sum_{\tau=a}^{t-1} f(\tau) \right) - \mathbf{s} f(t+1) + \mathbf{s} f(t) = \\ &= f(t) - \sum_{\tau=a}^{t-1} f(\tau+1) + \sum_{\tau=a}^{t-1} f(\tau) = f(t) - f(t) + f(a) = f(a), \end{aligned}$$

czyli pozostanie w dalszym ciągu operatorem dyskontującym kapitał do chwili  $a$ .

## § 2. Formuła Cauchy'ego

Przed rozpatrzeniem sumy teleskopowej dla bieżącej reprezentacji algebry stopy pozostaje wykazać prawdziwość dyskretnego odpowiednika formuły wielokrotnego całkowania Cauchy'ego. Oto on

$$\begin{aligned} \mathbf{s}^m f(t) &= \\ (10.1) \quad &= \sum_{\tau_1=a}^{t-1} \sum_{\tau_2=a}^{\tau_1-1} \cdots \sum_{\tau_m=a}^{\tau_{m-1}-1} f(\tau_m) = \sum_{\tau=a}^{t-1} \frac{(t-\tau-1)^{m-1}}{(m-1)!} f(\tau) = \\ &= \mathbf{s} \frac{(\tau-t-1)^{m-1}}{(m-1)!} f(t) \Big|_{\tau=t}, \end{aligned}$$

gdzie

$$m^k := \overbrace{m(m-1)\dots(m-k+1)}^{k \text{ czynników}}$$

dla  $k > 0$  ( $m^0 = 1$ ) jest popularnym w kombinatoryce symbolem Pochhammera ubywającej potęgi liczby  $m$  [GKP96]. Wyraża się on liczbą wszystkich iniekcji (odwzorowań różnowartościowych) zbioru  $k$ -elementowego w zbiór  $m$ -elementowy. Sprawdźmy poprawność formuły (10.1).

Dowód. Dla  $m = 1$  poprawność wzoru jest oczywista. Dla  $(m + 1)$ -krotnej sumy mamy

$$\begin{aligned} \mathbf{s}^{m+1} f(t) &= \mathbf{s} \sum_{\tau=a}^{t-1} \frac{(t - \tau - 1)^{m-1}}{(m-1)!} f(\tau) = \\ &= \sum_{\tau=a}^{t-1} \sum_{\tau_1=a}^{\tau-1} \frac{(\tau - \tau_1 - 1)^{m-1}}{(m-1)!} f(\tau_1) = \sum_{\tau=a}^{t-1} \sum_{\tau_1=a}^{\tau-1} f(\tau_1) \underline{\Delta}_{\tau} \frac{(\tau - \tau_1 - 1)^m}{m!} = \\ &= \sum_{\tau_1=a}^{t-1} \sum_{\tau=\tau_1+1}^{t-1} f(\tau_1) \underline{\Delta}_{\tau} \frac{(\tau - \tau_1 - 1)^m}{m!} = \sum_{\tau=a}^{t-1} f(\tau) \frac{(t - \tau - 1)^m}{m!}, \end{aligned}$$

gdzie indeks  $\tau$  stojący przy operatorze  $\underline{\Delta}_{\tau}$  jest koniecznym dla wskazania zmiennej, której dotyczy operacja różnicy. Pierwsza z równości wynika z założenia indukcyjnego, a czwarta z zamiany kolejności sumowania. W trzeciej wykorzystana została różnicowa własność ubywającej potęgi  $\underline{\Delta} t^m = m t^{m-1}$ , gdyż

$$\underline{\Delta} t^m = \frac{(t+1)!}{(t+1-m)!} - \frac{t!}{(t-m)!} = m \frac{t!}{(t-(m-1))!} = m t^{m-1}.$$

Przedstawienie działania operatora  $\mathbf{s}^{m+1}$  za pomocą ostatniej sumy jest końcowym krokiem dowodu przez indukcję dyskretnego odpowiednika formuły Cauchy'ego.  $\square$

### § 3. Suma teleskopowa

Wstawiając dyskretną reprezentację operatorów  $\mathbf{r}$  i  $\mathbf{s}$  do sumy teleskopowej w postaci (9.7) otrzymamy następujący jej wariant

$$(10.2) \quad \sum_{k=0}^m \mathbf{s}^k \circ (\mathbf{1} - \mathbf{s} \circ \mathbf{r}) \circ \mathbf{r}^k f(t) = \sum_{k=0}^m \frac{(t-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) = f(t) - \mathbf{s}^{m+1} f^{(m+1)}(t),$$

gdzie  $f^{(k)}(a)$  oznacza wynik  $k$ -krotnego działania operatora różnicowego  $\underline{\Delta}$  na ciąg  $f(t)$ , wynik wyznaczony dla chwili  $t = a$ . Znowu wyrażenie  $(\mathbf{1} - \mathbf{s} \circ \mathbf{r})$ , będące czynnikiem dyskontującym kapitał do chwili  $a$ , pozwoliło odnieść operatory różnicowe do jednej ustalonej chwili  $a$ . W rachunku wykorzystano własność

$$\mathbf{s}^k \mathbf{1} = \frac{(t-a)^k}{k!},$$

która wynika z działania operatora  $\mathbf{r}$  na szczególną postać wyżej udowodnionej formuły wielokrotnego sumowania (10.1), otrzymaną po podstawieniu  $f(t) \rightarrow 1$ . Można ją także wyznaczyć odpowiednio rozwiązując łatwą do zauważenia tożsamość

$$\mathbf{r}^k \circ \mathbf{s}^k = \mathbf{1},$$

prawdziwą dla wszystkich przedstawionych reprezentacji algebry stopy. Zestawienie powyższych dwóch uwag jest prawdopodobnym wyjaśnieniem metody „odgadnięcia” formuły wielokrotnego całkowania (sumowania) zastosowanej przez Cauchy’ego.

#### § 4. Operacja dyskutowania

Wstawiając dyskretną formułę Cauchy’ego do równości (9.1) otrzymamy przedstawienie ciągu  $f(t)$  w postaci szeregu Newtona [Gel59], który jest różnicowym odpowiednikiem szeregu Taylora, tak jak tamten posiadającym precyzyjnie wyznaczoną resztę rzędu  $m + 1$

$$f(t) = \sum_{k=0}^m \frac{(t-a)^{\underline{k}}}{k!} f^{(k)}(a) + \sum_{\tau=a}^{t-1} \frac{(t-\tau-1)^{\underline{m}}}{m!} f^{(m+1)}(\tau).$$

Ubywająca potęga  $m^{\underline{k}}$  znika dla argumentów  $k > m$ , więc reszta szeregu rzędu  $m+1$  dla  $m \geq t-a$  jest zerowa, co implikuje poprawność następującego ciągu równości

$$(10.3) \quad f(t) = \sum_{k=0}^{t-a} \frac{(t-a)^{\underline{k}}}{k!} f^{(k)}(a) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t-a)^{\underline{k}}}{k!} f^{(k)}(a) = e^{(t-a)^{\perp} \underline{\Delta}} f(a).$$

Obiekt  $(t-a)^{\perp}$  jest operatorem i przyjmuje wartości liczbowe po rozpisaniu szeregu potęgowego (jakim jest eksponent) przybierając postać kolejnych ubywających potęg liczby  $(t-a)$ . Ponieważ

$$(10.4) \quad \sum_{k=0}^{t-a} \frac{(t-a)^{\underline{k}}}{k!} f^{(k)}(a) = \sum_{k=0}^{t-a} \frac{(t-a)!}{k!(t-a-k)!} f^{(k)}(a) = (1 + \underline{\Delta})^{t-a} f(a),$$

więc dla komutatora  $[\mathbf{r}, \mathbf{s}]$  wyznaczającego dyskonto w reprezentacji dolnej Newtona mamy

$$[\mathbf{r}, \mathbf{s}] = e^{-(t-a)^{\perp} \underline{\Delta}} = (1 + \underline{\Delta})^{a-t},$$

gdzie  $(1 + \underline{\Delta})^n$  dla  $n < 0$  należy traktować jako  $-n$ -krotny iloczyn nieskończonego postępu geometrycznego  $1 - \underline{\Delta} + \underline{\Delta}^2 - \underline{\Delta}^3 + \dots$

## § 5. Przykłady

Dzięki formule (10.3) możemy określony ciągiem  $f(t)$  stan kapitału na chwilę  $t$  aproksymować coraz dokładniej za pomocą ciągu dolnych stóp różnicowych  $\underline{r}_1(a), \underline{r}_2(a), \dots, \underline{r}(a)_{t-a}$  kolejnych rzędów, stóp zdefiniowanych następująco

$$\underline{\Delta}^k f(a) = \underline{r}_k(a) f(a).$$

Pierwsza z nich  $\underline{r}_1(a)$  jest popularną w świecie finansów przedziałową dolną stopą procentową. W rozdziale 7 poznaliśmy jej uogólnioną definicję. Kapitał o zerowych stopach wyższych rzędów ma liniowe w czasie przyrosty (czynnik dyskontowy  $[\mathbf{r}, \mathbf{s}]^{-1} = 1 + (t-a) \underline{r}_1(a)$  opisuje tzw. procent prosty o stopie określonej w chwili  $a$ ). Ciąg  $\underline{r}_1(a) = \underline{r} = \text{constans}$ ,  $\underline{r}_2(a) = \underline{r}^2$ ,  $\underline{r}_3(a) = \underline{r}^3$ ,  $\dots$  to stały procent w konwencji z kapitalizacją odsetek. Wtedy  $[\mathbf{r}, \mathbf{s}] = e^{-\underline{r}(t-a)^+}$  bowiem

$$(10.5) \quad f(t) = [\mathbf{r}, \mathbf{s}]^{-1} f(a) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t-a)^k}{k!} \underline{r}^k f(a) = \sum_{k=0}^{t-a} \frac{(t-a)!}{k!(t-a-k)!} \underline{r}^k f(a) = \\ = (1 + \underline{r})^{t-a} f(a),$$

czyli operator dyskonta w tym przypadku prowadzi do sytuacji, gdy możemy taką operację zastąpić  $(t-a)$ -krotnym zastosowaniem procentu prostego z jednakową stopą pierwszego rzędu (pamiętając o kapitalizacji kwoty po każdej operacji).

Formułę (10.5) możemy uogólnić poprzez naturalne rozszerzenie argumentu  $t$  do całej dziedziny czasowej liczb rzeczywistych. Wtedy, powracając do przykładu zilustrowanego wcześniej rysunkiem, ten sam najlepiej dopasowany wielomian kwadratowy (modelujący równie dobrze proces ilustrowany krzywą ciągłą) otrzymamy dla pary stóp o nieco innych wartościach liczbowych. Z porównania szeregu Taylora z jego odpowiednikiem w reprezentacji dolnej Newtona otrzymamy, że  $r_1(0) = \underline{r}_1(0) - \frac{1}{2}\underline{r}_2(0)$  oraz  $r_2(0) = \underline{r}_2(0)$ , więc jedyne niezerowe składniki stopy procentowej w naszym najlepiej dopasowanym wielomianie wynoszą teraz  $\underline{r}_1 = 0.1014$  i  $\underline{r}_2 = 0.1195$ . Podkreślić należy, że nowa para liczb parametryzuje tą samą krzywą, co para z przykładu w reprezentacji Bernoulliego.

Zanurzenie dyskretnych współrzędnych czasowych w dziedzinę ciągłą prowadzi do standardowego wykorzystania formuły Newtona w zadaniach interpolacji — ciągi  $\{f(t)\}$  są teraz reprezentantami całych klas funkcji analitycznych, posiadających w całkowitoliczbowych elementach dziedziny (zwanymi *węzłami interpolacyjnymi* [Gel59]) wartości pokrywające się z wartościami odpowiednich elementów ciągów  $f(t)$ . Działanie na klasach staje się konieczne, bowiem operacja dyskontowania, bazując jedynie na stopach różnicowych, jest w stanie odtworzyć dokładne wartości funkcji z klasy tylko na podzbiore

liczb całkowitych. Stosowanie metod interpolacyjnych w finansach tam, gdzie o kształcie funkcji kapitałowych wnioskujemy na podstawie skończonego zbioru ich wartości, wydaje się w pełni zasadne. W takich sytuacjach przydałoby się, by analityk finansowy posiadał pełną świadomość faktu badania całych klas funkcji i stosowania *de facto* metod interpolacyjnych przy pracy nad jednym z reprezentantów klasy.

## Reprezentacja górna Newtona

### § 1. Reprezentacja generatorów algebry stopy

Operator stopy zwrotu  $r$  w realizacji różnicowej może być przedstawiony w jeszcze jeden sposób. Oto on

$$r f(t) = \bar{\Delta} f(t) := f(t) - f(t-1).$$

Operator przyrostu kapitału określamy teraz następująco

$$s := \sum_{\tau=a+1}^t,$$

czyli

$$s f(t) := \sum_{\tau=a+1}^t f(\tau).$$

Sposób określenia operatora przyrostu kapitałowego  $s$  został podyktowany zamiarem zachowania przez ten obiekt stosownej symetrii względem jego odpowiednika z reprezentacji dolnej Newtona, symetrii narzuconej przez parę operatorów różnicowych  $\underline{\Delta}$  i  $\bar{\Delta}$ . Komutator nieprzemiennej pary generatorów algebry stopy jest następującą operacją

(11.1)

$$\begin{aligned} [r, s] f(t) &= \left( r \sum_{\tau=a+1}^t f(\tau) \right) - s f(t) + s f(t-1) = \\ &= f(t) - \sum_{\tau=a+1}^t f(\tau) + \sum_{\tau=a+1}^t f(\tau-1) = f(t) - f(t) + f(a) = f(a), \end{aligned}$$

także dyskontującą kapitał do ustalonej chwili  $a$ . Tak więc znana np. z codziennej praktyki finansowej operacja dyskontowania ciągów kapitałowych  $\{f(t)\}$ , choć jednakowo wyliczana, może być interpretowana w dwóch istotnie różnych reprezentacjach algebry stopy.

## § 2. Formuła Cauchy'ego

Formuła wielokrotnego sumowania ma obecnie poniższą postać

$$(11.2) \quad \begin{aligned} \mathbf{s}^m f(t) &= \sum_{\tau_1=a+1}^t \sum_{\tau_2=a+1}^{\tau_1} \cdots \sum_{\tau_m=a+1}^{\tau_{m-1}} f(\tau_m) = \\ &= \sum_{\tau=a+1}^{t-1} \frac{(t-\tau)^{\overline{m-1}}}{(m-1)!} f(\tau) = \mathbf{s} \left. \frac{(\tau-t)^{\overline{m-1}}}{(m-1)!} f(t) \right|_{\tau=t}, \end{aligned}$$

gdzie

$$m^{\overline{k}} := \overbrace{m(m+1)\dots(m+k-1)}^{k \text{ czynników}}$$

oraz  $m^{\overline{0}} = 1$ . Jak można się domyśleć wielkość  $m^{\overline{k}}$  jest nazywana symbolem Pochhammera przyrastającej potęgi liczby  $m$ .

Dowód. Przy  $m=1$  lewa i prawa strona wzoru (11.2) ma postać  $\mathbf{s} f(t)$ . Dla podstawienia  $m+1 \rightarrow m$  otrzymamy

$$\begin{aligned} \mathbf{s}^{m+1} f(t) &= \mathbf{s} \sum_{\tau=a+1}^{t-1} \frac{(t-\tau)^{\overline{m-1}}}{(m-1)!} f(\tau) = \\ &= \sum_{\tau=a+1}^t \sum_{\tau_1=a+1}^{\tau-1} \frac{(\tau-\tau_1)^{\overline{m-1}}}{(m-1)!} f(\tau_1) = \sum_{\tau=a+1}^t \sum_{\tau_1=a+1}^{\tau-1} f(\tau_1) \overline{\Delta}_\tau \frac{(\tau-\tau_1)^{\overline{m}}}{m!} = \\ &= \sum_{\tau_1=a+1}^{t-1} \sum_{\tau=\tau_1+1}^t f(\tau_1) \overline{\Delta}_\tau \frac{(\tau-\tau_1)^{\overline{m}}}{m!} = \sum_{\tau=a+1}^{t-1} f(\tau) \frac{(t-\tau)^{\overline{m}}}{m!}. \end{aligned}$$

Pierwsza z równości wynika z założenia indukcyjnego, a czwarta, tak jak w przypadku poprzedniej reprezentacji, ze zamiany kolejności sumowania. W rachunku skorzystano także z różnicowej własności przyrastającej potęgi  $\overline{\Delta} t^{\overline{m}} = m t^{\overline{m-1}}$ , bowiem

$$\overline{\Delta} t^{\overline{m}} = \frac{(t+m-1)!}{(t-1)!} - \frac{(t+m-2)!}{(t-2)!} = m \frac{(t+m-2)!}{(t-1)!} = m t^{\overline{m-1}}.$$

□

### § 3. Suma teleskopowa

Suma teleskopowa (9.7) w reprezentacji górnej Newtona przybiera następującą postać

$$(11.3) \quad \sum_{k=0}^m \mathbf{s}^k \circ (\mathbf{1} - \mathbf{s} \circ \mathbf{r}) \circ \mathbf{r}^k f(t) = \sum_{k=0}^m \frac{(t-a)^{\bar{k}}}{k!} f^{(\bar{k})}(a) = f(t) - \mathbf{s}^{m+1} f^{(\overline{m+1})}(t),$$

gdzie symbol  $f^{(\bar{k})}(a)$  oznacza wynik  $k$ -krotnego działania operatora różnicowego  $\bar{\Delta}$  na ciąg  $f(t)$ , ustalony w chwili  $t = a$ . Wykorzystaną w powyższym rachunku własność

$$\mathbf{s}^k \mathbf{1} = \frac{(t-a)^{\bar{k}}}{k!}$$

można wykazać w analogiczny jak dla reprezentacji dolnej Newtona sposób.

### § 4. Operacja dyskontowania

I tym razem komutator  $[\mathbf{r}, \mathbf{s}] = (\mathbf{1} - \mathbf{s} \circ \mathbf{r})$  dyskontujący kapitał do chwili  $a$  umożliwia przesunięcie do tej chwili operatorów różnicowych. Przekształcając formułę teleskopową (11.3) otrzymujemy wariant wzoru Newtona z jawnie opisaną resztą rzędu  $m+1$ .

$$(11.4) \quad f(t) = \sum_{k=0}^m \frac{(t-a)^{\bar{k}}}{k!} f^{(\bar{k})}(a) + \sum_{\tau=a+1}^{t-1} \frac{(t-\tau)^{\bar{m}}}{m!} f^{(\overline{m+1})}(\tau).$$

Rozważając graniczny przypadek powyższego wzoru dla  $m \rightarrow \infty$  i korzystając z tożsamości

$$\frac{\mathbf{1}}{(\mathbf{1} - \mathbf{x})^{n+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} \mathbf{x}^k,$$

dla  $n \geq 0$  będącej „ukrytym wariantem wzoru dwumianowego” [GKP96], otrzymamy następujący ciąg tożsamości

$$\begin{aligned} f(t) &= [\mathbf{r}, \mathbf{s}]^{-1} f(a) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t-a)^{\bar{k}}}{k!} f^{(\bar{k})}(a) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{t-a+k-1}{k} \bar{\Delta}^k f(a) = \frac{\mathbf{1}}{(\mathbf{1} - \bar{\Delta})^{t-a}} f(a). \end{aligned}$$



Czyli dla komutatora  $[r, s]$  wyznaczającego dyskonto w reprezentacji górnej Newtona mamy

$$[r, s] = (1 - \bar{\Delta})^{t-a}.$$

---

### § 5. Przykłady

W reprezentacji górnej Newtona wzór (11.4) pozwala kapitał  $f(t)$  przybliżyć dowolnie dokładnie za pomocą ciągu górnych stóp różnicowych  $\bar{r}_1(a)$ ,  $\bar{r}_2(a)$ , ... kolejnych rzędów. Ciąg ten definiujemy następująco

$$\bar{\Delta}^k f(a) = \bar{r}_k(a) f(b).$$

Pierwszy element ciągu, czyli  $\bar{r}_1(a)$  jest rozważaną już w rozdziale 7 przedziałową górną stopą procentową. Czynniki dyskontowy  $[r, s]^{-1} = 1 + (t - a)\bar{r}_1(a)$  o liniowych w czasie przyrostach wyznacza zerowe stopy rzędów wyższych niż pierwszy. Jest to, identycznie jak w analogicznym przypadku dla reprezentacji dolnej Newtona, procent prosty o stopie określonej w chwili  $a$ . Będący innym spośród scharakteryzowanych jednym parametrem przypadków ciąg  $\bar{r}_1(a) = \bar{r} = \text{constans}$ ,  $\bar{r}_2(a) = \bar{r}^2$ ,  $\bar{r}_3(a) = \bar{r}^3$ , ... to znowu stały procent w konwencji z kapitalizacją odsetek, gdy kapitał w chwili  $t$  zadany jest funkcją

$$(11.5) \quad f(t) = \frac{1}{(1 - \bar{r})^{t-a}} f(a).$$

Porównanie przykładów opisanych formułami (10.5) i (11.5) prowadzi do popularnej zależności pomiędzy stopą procentową  $\underline{r}$  i dyskontową  $\bar{r} = \frac{\underline{r}}{1+\underline{r}}$ . Rozszerzając dziedzinę czasową na zbiór ciągły także i tym razem możemy określić<sup>1</sup> krzywą najlepiej dopasowaną do analizowanego już kapitałowego procesu wykładniczego. Porównanie procesów drugiego rzędu w reprezentacjach Bernoulliego i górnej Newtona prowadzi do równań określających związki pomiędzy stopami (poprawne jedynie przy aproksymacji ograniczonej do wielomianów kwadratowych)  $r_1(0) = \bar{r}_1(0) + \frac{1}{2}\bar{r}_2(0)$  oraz  $r_2(0) = \bar{r}_2(0)$ , co w wyniku daje następującą parę parametrów opisu procesu kapitałowego w reprezentacji górnej Newtona:  $\bar{r}_1 = -0.0181$  i  $\bar{r}_2 = 0.1195$ . Stopa procentowa pierwszego rzędu z góry, najlepiej przybliżająca wzrost o dwudziestoprocentowej stopie rocznej w konwencji kapitalizacji ciągłej, okazuje się ujemna!

---

<sup>1</sup>ograniczając się do wielomianów drugiego rzędu

### § 6. Wspólne cechy reprezentacji algebry stopy

Przeglądając kolejne wzory występujące w ostatnich trzech rozdziałach możemy wypisać związki występujące pomiędzy różnymi klasycznymi realizacjami algebry stopy. Dla tego celu oznaczmy przedstawienia dowolnego operatora  $x$  w reprezentacjach Bernoulliego, dolnej Newtona i górnej Newtona odpowiednio przez  $x_d$ ,  $\underline{x}$  i  $\bar{x}$ .

Dla operatora dyskontującego kapitał do wartości w chwili  $a$  mamy

$$[\mathbf{r}, \mathbf{s}]_d = \underline{[\mathbf{r}, \mathbf{s}]} = \overline{[\mathbf{r}, \mathbf{s}]},$$

gdzie pierwsza z równości dotyczy jedynie punktów, które odpowiadają dyskretnej dziedzinie czasowej reprezentacji Newtona. Powyższe równości możemy wyrazić operatorem stopy  $\mathbf{r}$  przedstawionym w odpowiednich reprezentacjach. Na podstawie wzorów (9.9), (10.4) i (9.1) otrzymamy, że

$$e^{(t-a)\mathbf{r}_d} = (\mathbf{I} + \underline{\mathbf{r}})^{t-a} = \frac{\mathbf{I}}{(\mathbf{I} - \bar{\mathbf{r}})^{t-a}}$$

dla dowolnych chwil  $t$  i  $a$ , czyli dowolnych potęg operatorów dyskontowania w jednostce czasowej:  $e^{r_d}$ ,  $(\mathbf{I} + \underline{\mathbf{r}})$  i  $(\mathbf{I} - \bar{\mathbf{r}})^{-1}$ . Gdy rozważymy infinytymalne zmiany położenia punktu opisywanego zmienną całkowitoliczbową  $t$  występującą w reprezentacjach Newtona, wtedy zróżniczkowanie po czasie  $t$  powyższej formuły prowadzi do zależności pomiędzy stopą różniczkową z reprezentacji Bernoulliego, a komutatorem  $[\mathbf{r}, \mathbf{s}]$  w reprezentacjach Newtona, które przedstawiają tożsamości (7.2).

Wyjaśnienia dotyczące różnych skal czasowych, poczynione przy opisie reprezentacji Bernoulliego, przenoszą się bez zmian na reprezentacje dolną i górną Newtona.

Na uwagę zasługuje fakt, że wszystkie trzy klasyczne reprezentacje algebry stopy prowadzą do aproksymacji procesów kapitałowych odmiennymi rodzinami wielomianów zmiennej  $t$ . We wszystkich reprezentacjach zachodzi izomorfizm pomiędzy ciągiem stóp kolejnych rzędów  $r = (r_1, r_2, \dots)$  w dowolnej z chwil  $a$  dziedziny czasowej a kształtem zmian kapitałowych na całej dziedzinie, określonych operatorem dyskontującym  $[\mathbf{r}, \mathbf{s}]$ , izomorfizm zadany odwzorowaniem

$$(11.6) \quad [\mathbf{r}, \mathbf{s}]^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k r_k =: \varphi r,$$

gdzie współczynniki ciągu  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots)$  są niezależnymi od kształtu ewolucji czasowej kapitału liczbami, zależnymi jedynie od wyboru reprezentacji, w powyższej sumie przyjmujemy z definicji  $\varphi_0 r_0 = 1$ , więc  $[\mathbf{r}, \mathbf{s}]^{-1}$  możemy formalnie

traktować jako iloczyn skalarny  $\varphi r$  w nieskończone wymiarowych przestrzeniach wektorowych. Z własności (11.6) wynika, że jeśli kapitał  $f(a)$  podzielimy na dowolne dwie części (związane z odmienną kapitalizacją, a więc różnymi stopami zwrotu)  $f(a) = f_1(a) + f_2(a) = \gamma_1 f(a) + \gamma_2 f(a)$ , gdzie wagi podziału  $\gamma_1 + \gamma_2 = 1$  mogą być liczbami ujemnymi, to czynnik dyskontowy łącznego kapitału, będący sumą ważoną czynników dyskontowych każdej z części kapitałowych, jest izomorficzny stopie będącej sumą ważoną stóp każdej z części

$$\begin{aligned} f(t) &= [\mathbf{r}, \mathbf{s}]^{-1} f(a) = \varphi r f(a) = f_1(t) + f_2(t) = \\ &= [\mathbf{r}, \mathbf{s}]_1^{-1} \gamma_1 f(a) + [\mathbf{r}, \mathbf{s}]_2^{-1} \gamma_2 f(a) = \varphi (\gamma_1 r_1 + \gamma_2 r_2) f(a), \end{aligned}$$

czyli

$$r_{\gamma_1 + \gamma_2} = \gamma_1 r_1 + \gamma_2 r_2.$$

Stopy (wektory) w dowolnej reprezentacji zachowują się w sposób addytywny (wypadkową stopą  $k$ -tego rzędu jest suma ważona stóp tego samego rzędu), co stanowi niezwykle porządną własność, skracającą obliczenia finansowe do tego stopnia, że wykorzystuje się ją na codzień nie zważając, że stosowane powszechnie definicje stóp procentowych własności tej nie posiadają<sup>2</sup>.

Przy zmierzających do zera odległościach pomiędzy kolejnymi chwilami czasowymi granicą obydwu reprezentacji Newtona jest reprezentacja Bernoulliego.

Zastosowania formalizmu algebry stopy są wyjątkowo rozległe. Można dla przykładu rozważyć wszystkie rodzaje kredytów jako funkcjonały określone na algebrze stopy, zaś o wartościach w dziedzinie liczbowej. Takie spojrzenie na kredyt daje dwojakie korzyści. Prowadzi do algebraicznej klasyfikacji kredytów, pozwalającej na „odkrywanie” nowych, niepraktykowanych, a prawdopodobnie atrakcyjnych technik finansowych. Wiąże także różne, tradycyjnie odległe techniki kredytowania w dwoiste pary (np. nominalnie stała renta wieczysta *vs* obligacje nie datowane), którym towarzyszą *de facto* jednakowe wzory ich rachunkowego opisu, sformułowane w wariantach odpowiednich dla wybranej reprezentacji algebry stopy.

*dla każdej reprezentacji możemy skonstruować odpowiednik klasyfikacji z rozdziału 8*

---

## § 7. Reprezentacje efektywne

We wszystkich trzech reprezentacjach klasycznych generator  $s$  jest w algebrze stopy elementem prawym odwrotnym do operatora  $r$ , co zapisujemy symbolicznie w postaci równości (9.5). Dzięki postulowaniu tej tożsamości dla określenia konkretnej klasycznej (niestochastycznej) reprezentacji algebry stopy wystarcza podanie jedynie realizacji generatora  $r$ <sup>3</sup>. Postać operatora  $s$  można znaleźć rozwiązując warunek (9.5), co czyni nazwę algebra stopy adekwatną

<sup>2</sup>zob. [KP99]

dla tej sytuacji. Metoda taka jest receptą na znalezienie innych reprezentacji algebry świata finansów. Tak więc *algebrę stopy* możemy zdefiniować jako algebrę Heisenberga–Weyla, spełniającą dodatkowo postulat (9.5). Gdy potrafimy efektywnie realizować dowolną ilość złożonych operacji  $r$  wyznaczania stopy zwrotu, jednokrotną operację  $s$  określania przyrostu kapitału i znamy odpowiednik reguły Cauchy’ego, to taką reprezentację algebry stopy możemy nazywać *reprezentacją efektywną*. Nazwę tą usprawiedliwia spostrzeżenie iż, niezależnie od tego jak egzotycznymi w stosunku do ich klasycznych odpowiedników okazują się realizacje operacji  $r$  i  $s$ , możemy obliczyć wyniki dowolnych procedur rachunkowych, prowadzonych w reprezentacji spełniającej powyższe warunki. Abstrahując od kontekstów historycznych, dotyczących odkrycia przytoczonych w tym rozdziale wzorów, *reprezentacjami klasycznymi* nazwiemy reprezentacje efektywne, których komutator (operacja dyskontowania) polega na mnożeniu funkcji kapitału przez tzw. czynnik dyskontowy  $U(a, t)$ , posiadający własność składania rezolwenty równania różniczkowego liniowego, czyli  $U(a, t)U(t, t') = U(a, t')$ <sup>4</sup>. W reprezentacji Bernoulliego operacja komutatora polega na mnożeniu przez czynnik  $U(a, t) = e^{\int_t^a d\tau r_1(\tau)}$ . W reprezentacjach dolnej i górnej Newtona mamy odpowiednio  $U(a, t) = \prod_{\tau=a}^{t-1} (1 + \underline{r}_1(\tau))^{-1}$  oraz  $U(a, t) = \prod_{\tau=a}^{t-1} (1 - \bar{r}_1(\tau))$ . Wszystkie wymienione tu przedstawienia spełniają własność rezolwenty.

---

<sup>3</sup>następny rozdział poświęcony jest reprezentacji stochastycznej algebry stopy, w której operator  $r$  ma postać taką jak w reprezentacji Bernoulliego, lecz  $s$  jest zdefiniowany odmiennie

<sup>4</sup>zob. rozdz. 7

## Stochastyczna reprezentacja algebry stopy

W rozdziale tym zajmiemy się realizacją algebry stopy zwrotu dla modeli dyskontujących kapitał do chwili opisywanej zmienną losową o rozkładzie normalnym. W takich przypadkach rachunek stóp sprowadza się do operowania funkcjami należącymi do przestrzeni Hilberta rozpiętej na bazie wielomianów Hermita. Określimy metodę aproksymacji funkcji opartą na stochastycznym analogonie szeregu Taylora. Przyjrzymy się przykładom rachunków dotyczących zmian kapitałowych w tej nieklasycznej reprezentacji algebry stopy. Poznamy sposób statystycznego pomiaru pochodnych funkcji wyznaczanych empirycznie.

Stochastyczne ujęcie zagadnienia stanowi kontynuację poprzedniego rozdziału omawiającego algebrę stopy, czyli posiadającą fundamentalne znaczenie strukturę formalną. Jej klasyczne realizacje (zwane przez matematyków reprezentacjami) obejmują pełny zakres praktycznie używanych zastosowań finansowych stopy procentowej. Jednocześnie realizacje te stanowią pokaźny zestaw narzędzi badawczych służących w zastosowaniach analizy matematycznej. Przypomnijmy, że obejmującą wszelkie operacje obliczeń finansowych algebrę stopy tworzy zbiór generowany przez dwie operacje  $r$  i  $s$  takie, że  $[r, [r, s]] = [s, [r, s]] = 0$  (własności algebry Heisenberga-Weyla). Operator  $r$  służy do wyznaczenia bieżącej stopy wzrostu kapitału, a operacja  $s$  pozwala, w oparciu o znajomość stopy, określić całkowity przyrost kapitału w dłuższych okresach czasu. Komutator  $[r, s] := r \circ s - s \circ r$  jest operacją polegającą na odjęciu wyniku otrzymanego przez przeprowadzenie operacji  $r$ , a potem  $s$ , od wyniku z wykonanych kolejno operacji  $s$ , a po niej  $r$ . Element algebry stopy  $[r, s]$  ma podstawowe znaczenie w finansach, gdyż w dotychczas omawianych reprezentacjach okazywał się być operatorem mnożenia wartości kapitału przez czynnik dyskontujący tą kwotę do ustalonej chwili czasowej. Proponowana niżej reprezentacja algebry stopy, mimo zastosowania w jej opisie klasycznego układu wielomianów ortogonalnych, nie jest jeszcze wykorzystywana. Jednak jej izomorfizm (na poziomie operacji algebraicznych) z popularnymi reprezentacjami klasycznymi powinien być dostatecznym powodem zwrócenia na ten rachunek szczególnej uwagi. Posiadamy formalnie poprawną i interpretacyjnie spójną stochastyczną reprezentację struktury, której algebrą posługujemy się,

mniej czy bardziej świadomie, od stuleci. Poznajmy tę realizację, by móc adoptować deterministyczne modele matematyki finansowej na dziedzinę problemów ryzykownych i niepewnych.

### § 1. Reprezentacja Gaussa

Mamy zająć się formalizmem badania procesów kapitałowych, dla których istotny w przebiegu procesu moment  $v$  jest określony nieprecyzyjnie. Owa chwila może być opisywana zmienną losową o rozkładzie prawdopodobieństwa posiadającego obiektywny, lub subiektywny charakter. Przykładowo z taką sytuacją spotykamy się podczas realizacji płatności, gdy moment wykonania płatności  $v$ , w zależności od warunków określonych czynnikami losowymi, fluktuuje wokół pewnej oczekiwanej chwili  $a$ , zaś wielkość samych fluktuacji  $\sigma$  zależy od czynników specyficznych dla transakcji. Moment rozpoczęcia typowej inwestycji ma także podobną własność — stopień wdrożenia inwestycji w funkcji czasu  $t$  można, po wyborze odpowiedniej skali czasowej, opisać dystrybucją standaryzowanego rozkładu normalnego, noszącą nazwę *funkcji Laplace'a*  $L(v)$  [Ste71]. Zaproponowane niżej narzędzie rachunkowe może stanowić punkt wyjścia dla opracowania metod porównywania wartości instrumentów finansowych o niezdeterminowanych okresach realizacji. Z sytuacją, gdy nie znamy ostatecznego terminu naszej rezygnacji z dostatecznie płynnej formy kapitałowej (gdyż zawsze możemy dostrzec coś bardziej atrakcyjnego), będziemy się coraz częściej spotykać dzięki coraz sprawniejszym technologiom gromadzenia, przekazywania i analizy informacji.

Przyjmijmy naturalny model matematyczny pozwalający mierzyć konsekwencje założenia o czasowej przypadkowości procesu. W tym popularnym modelu czasowa zmienna losowa  $v$  ma rozkład normalny, tzn. model uwzględnia różne wartości  $v$  jakie może przybierać  $v$  z wagą (miarą)

$$dM_{a,\sigma}(v) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(v-a)^2}{2\sigma^2}} dv$$

określoną na dziedzinie rzeczywistej ( $v \in \mathbb{R}$ ). Jak zwykle wartości oczekiwane dowolnych funkcji  $f(v)$  będziemy oznaczać symbolem  $E(f(v))$ , czyli

$$E(f(v)) := \int_{-\infty}^{\infty} dM_{a,\sigma}(v) f(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} dv f(v) e^{-\frac{(v-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Dla wygody stosowanej w dalszym tekście notacji operatorowej przyjęliśmy konwencję wypisywania różniczki  $dv$  bezpośrednio po znaku dotyczącej jej całki. Ustalenie miary będącej rozkładem normalnym wyróżnia miejsce na dziedzinie zmiennej losowej  $v$  (równe wartości pierwszego momentu rozkładu, czyli  $a$ ) oraz

jednostkę czasową  $\sigma$ . Dokonajmy translacji i przeskalowania dziedziny czasowej uwzględniających ten naturalny układ odniesienia. Po transformacji  $t \rightarrow a + \sigma t$  zmienna losowa  $v$  będzie opisywana standaryzowanym rozkładem normalnym  $dL(v) := dM_{0,1}(v)$ . Przekształcając końcowe wyniki za pomocą podstawienia odwrotnego  $t \rightarrow \frac{t-a}{\sigma}$  otrzymamy interesujące nas wzory, obowiązujące w sytuacji dowolnego sposobu opisu współrzędnej czasowej.

Ze względu na potrzebę zachowania korespondencji pomiędzy tu konstruowaną reprezentacją a reprezentacją Bernoulliego założymy, że operacja stopy kształtującej obraz zmian kapitałowych jest realizowana przez pochodną kapitału, czyli

$$r f(t) := \frac{df(t)}{dt}.$$

Taki wybór przedstawienia operatora  $r$  algebry stopy niesie najbardziej precyzyjną informację o chwilowych przyrostach kapitałowych, co ze względu na potrzebę precyzyjnego badania omawianych tu procesów wydaje się wysoce pożądane. Operator przyrostu kapitałowego wzorowany na reprezentacji Bernoulliego  $s = \int_v^t d\tau$  nie dostarcza obecnie pełnej informacji o wartości kapitału, bowiem chwila  $v$ , do której zamierzamy dyskontować kapitał, jest teraz zmienną losową. Gdy, dla przykładu, rozważymy umowę transakcji zachodzącej w momencie  $v$ , która określa kwotę transakcji nominalnie, to wtedy, z powodu uwzględnienia charakteryzujących kapitał stóp procentowych, oczekiwana wartość realna transakcji nie pokrywa się z jej kwotą nominalną. Dlatego stosowną będzie modyfikacja operatora przyrostu kapitałowego w postaci

$$s f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dL(v) \int_v^t d\tau f(\tau) = E \left( \int_v^t d\tau f(\tau) \right) = E \left( \int_0^{t-v} d\tau f(\tau + v) \right),$$

co w notacji operatorowej zapiszemy następująco

$$s = E \int_v^t d\tau.$$

Zbiór tak zdefiniowanych operacji  $r$  i  $s$ , z działaniami polegającymi na składaniu tych operatorów (dalej oznaczanym symbolem  $\circ$ ), dodawaniu, czy mnożeniu przez liczby, będziemy dalej nazywać *reprezentacją Gaussa* algebry stopy.

## § 2. Złożenia operacji $r$ i $s$

W opisanych w poprzednich rozdziałach klasycznych reprezentacjach algebry stopy operator  $s$  był zawsze operatorem prawym odwrotnym do  $r$ , czyli  $(r \circ s)f(t) = f(t)$  dla dowolnej funkcji gładkiej  $f(t)$ . Obecnie własność ta jest

także spełniona, bowiem

$$(\mathbf{r} \circ \mathbf{s})f(t) = \frac{d}{dt} E \int_{\mathbf{v}}^t d\tau f(\tau) = E(f(t)) = f(t).$$

Wyznaczając wynik działania komutatora  $\mathbf{r}$  i  $\mathbf{s}$ , czyli wielkości  $[\mathbf{r}, \mathbf{s}] = \mathbf{r} \circ \mathbf{s} - \mathbf{s} \circ \mathbf{r}$ , na funkcję kapitałową, otrzymamy

$$[\mathbf{r}, \mathbf{s}]f(t) = f(t) - E \int_{\mathbf{v}}^t d\tau \frac{df(\tau)}{d\tau} = E(f(\mathbf{v})) = E\left(e^{\int_{\mathbf{v}}^t d\tau r_1(\tau)}\right) f(t),$$

gdzie ostatnia równość wynika z definicji (9.3) dla stopy różniczkowej pierwszego rzędu  $r_1(t)$ . Komutator pozostaje więc nadal, tak jak w przypadku reprezentacji klasycznych, operacją dyskontowania do chwili 0 (przypadek standaryzowanego rozkładu normalnego), a po przywróceniu pierwotnych współrzędnych czasowych do chwili  $a$  (dowolny przypadek z rozkładem normalnym o środku w  $a$ ). Jednak nie polega już ona na pomnożeniu funkcji  $f(t)$  przez czynnik dyskontowy  $e^{\int_{\mathbf{v}}^t d\tau r_1(\tau)}$ . Wynik należy jeszcze uśrednić po zmiennej losowej  $\mathbf{v}$ . Uśredniony czynnik dyskontowy nie spełnia prawa składania charakterystycznego dla rezolwent równań różniczkowych zwyczajnych (jednak prawdziwego w granicy  $\sigma \rightarrow 0$ , gdyż wtedy rozkład normalny zmierza do dystrybucji  $\delta$  Diraca<sup>1</sup>, czyli

$$\int_{-\infty}^{\infty} dM_{t_1, \sigma}(v) e^{\int_{t_3}^v d\tau r_1(\tau)} \neq \int_{-\infty}^{\infty} dM_{t_2, \sigma}(\xi) e^{\int_{t_3}^{\xi} d\tau_1 r_1(\tau_1)} \int_{-\infty}^{\infty} dM_{t_1, \sigma}(\zeta) e^{\int_{t_2}^{\zeta} d\tau_2 r_1(\tau_2)}.$$

Dlatego reprezentacja Gaussa należy do nieklasycznych reprezentacji stopy zwrotu.

### § 3. Wielomiany Hermita $n! \mathbf{s}^n \mathbf{1}$

Konstrukcja odpowiednika formuły Cauchy'ego dla reprezentacji Gaussa, tak jak dla reprezentacji klasycznych opiera się na własnościach  $n$ -krotnego wykonania operacji  $\mathbf{s}$  na funkcji stałej (np. równej 1)

$$(12.1) \quad \mathbf{s}^n \mathbf{1} = E \int_{\mathbf{v}_1}^t d\tau_1 \int_{\mathbf{v}_2}^{\tau_1} d\tau_2 \dots \int_{\mathbf{v}_n}^{\tau_{n-1}} d\tau_n.$$

Dla prostoty notacji przyjęto konwencję w której operator  $E$  uśrednia po wszystkich zmiennych losowych  $\mathbf{v}_k$  o standaryzowanych rozkładach normalnych. Przyjmujemy także, że  $\mathbf{s}^0 \mathbf{1} = 1$ . W paragrafie 4 *Uzupełnienie* zostało wykazane, że rodzina funkcji  $\{n! \mathbf{s}^n \mathbf{1}\}$  jest dobrze znanym matematykom zbiorem *wielomianów Hermita* o wielu zbadanych i interesujących własnościach, patrz

<sup>1</sup>zob. np. [Ste71]



np.[**Enc97**]. Kilka użytecznych tożsamości wykorzystywanych w dalszych częściach artykułu zostanie przedstawionych w bieżącym paragrafie. Dla omawianych zastosowań wygodnie jest przyjąć następującą definicję wielomianu Hermita  $n$ -tego stopnia

$$(12.2) \quad H_n(t) := E((t + i\mathfrak{v})^n),$$

gdzie  $i = \sqrt{-1}$ . Przedstwienie takie można znaleźć np. w tablicach funkcji [**Ant69**]. Nieparzyste momenty standaryzowanego rozkładu normalnego są zerowe, więc wartości liczbowe wielomianów na dowolnej liczbie rzeczywistej  $t$  są także rzeczywiste. Całkując strony definicji (12.1) otrzymamy jej rekurencyjny odpowiednik

$$(12.3) \quad H_n(t) = n \mathfrak{s} H_{n-1}(t) = n E \int_{\mathfrak{v}}^t d\tau H_{n-1}(\tau)$$

z warunkiem początkowym  $H_0(t) = 1$ . Także bezpośrednio z definicji łatwo zauważyć, że funkcje  $H_n(t)$  są wielomianami  $n$ -tego stopnia zmiennej  $t$  o współczynniku przy najwyższej potędze  $t$  równym 1 (takie wielomiany noszą nazwę *wielomianów monicznych* [**Enc97**]). Różniczkowy wariant wzoru (12.3) jest następujący

$$(12.4) \quad \mathfrak{r} H_n(t) = \frac{dH_n(t)}{dt} = n H_{n-1}(t).$$

Formuły (12.3) i (12.4) posiadają taką samą postać jak wzory na całkowanie i różniczkowanie jednomianów  $(n! s^n 1)_{Bernoulli} = t^n$ , czyli funkcji  $n! s^n 1$  w reprezentacji Bernoulliego, czy analogiczne wzory na odpowiednie sumy i różnice w reprezentacjach Newtona. Wykorzystując dwumian Newtona i wzór na wartość parzystego momentu rozkładu normalnego, zamieszczony w *Uzupelnieniach* §4, możemy wypisać jawną postać współczynników wielomianu Hermita, mamy bowiem

$$\begin{aligned} H_n(t) &= E[(t + i\mathfrak{v})^n] = E \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} (-\mathfrak{v}^2)^k t^{n-2k} = \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} \frac{(2k)!}{(-2)^k k!} t^{n-2k}. \end{aligned}$$

Symbol  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  oznacza największą liczbę naturalną nie większą od  $\frac{n}{2}$ . Łatwo teraz zauważyć, że wielomiany o parzystych indeksach  $H_{2n}(t)$  są funkcjami parzystymi, a o indeksach nieparzystych  $H_{2n+1}(t)$  — funkcjami nieparzystymi. Współczynniki przy kolejnych nieznikających potęgach zmiennej  $t$  mają przeciwne znaki. Powyższą formułę możemy odczytać jako wzór wiążący reprezentację

Gaussa algebry stopy z jej reprezentacją Bernoulliego

$$(12.5) \quad (s^n 1)_{Gauss} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{1}{(-2)^k k!} (s^{n-2k} 1)_{Bernoulli}.$$

#### § 4. Funkcja tworząca

Dla dowolnej zmiennej urojonej  $x$  zachodzi następujący ciąg równości

$$(12.6) \quad \begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} H_n(t) &= E \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (x(t + i\mathfrak{v}))^n = E e^{t x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2} + i\mathfrak{v} x} = \\ &= e^{t x - \frac{x^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dv e^{-\frac{1}{2}(v-ix)^2} = e^{t x - \frac{x^2}{2}} = \Psi(x, t), \end{aligned}$$

więc wygodnie jest znajdować wielomiany Hermita za pomocą rozwinięcia funkcji tworzącej  $\Psi(x, t)$  w szereg Taylora. Korzystamy wówczas ze wzoru

$$H_n(t) = \left. \frac{d^n \Psi(x, t)}{dx^n} \right|_{x=0}.$$

Powyższą formułę możemy wypisać w nieco odmiennej postaci

$$(12.7) \quad \begin{aligned} H_n(t) &= \left. \frac{d^n \Psi(x, t)}{dx^n} \right|_{x=0} = e^{\frac{t^2}{2}} \left. \frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{(x-t)^2}{2}} \right|_{x=0} = e^{\frac{t^2}{2}} \left. \frac{d^n}{dz^n} e^{-\frac{z^2}{2}} \right|_{z=-t} = \\ &= (-1)^n (L(t))^{-1} \frac{d^n}{dt^n} L(t) \end{aligned}$$

zwanej *wzorem Rodriguesa* dla wielomianów Hermita [Enc97].

Wykorzystamy funkcję  $\Psi(x, t)$  dla wykazania zależności pomiędzy wielomianami Hermita. Różniczkując ją po parametrze  $x$  otrzymamy następujące równanie

$$(12.8) \quad \frac{\partial}{\partial x} \Psi(x, t) = (t - x) \Psi(x, t).$$

Zastępując w równaniu (12.8)  $\Psi(x, t)$  odpowiednim szeregiem Taylora względem zmiennej  $x$  i porównując wyrażenia stojące przy jednakowych potęgach tej zmiennej otrzymamy następujący ciąg równości

$$H_{n+1}(t) = t H_n(t) - n H_{n-1}(t),$$

dla którego warunki początkowe znamy, gdyż wiedza o stopniu wielomianu i współczynniku przy wiodącej potędze zmiennej  $t$  jest wystarczająca, aby wypisać dwa wielomiany Hermita najniższych stopni  $H_0(t)=1$  oraz  $H_1(t)=t$ . Wzór ten może posłużyć do generowania kolejnych wielomianów Hermita. Wielomiany kilku następnych stopni wypisane są poniżej.

$$\begin{aligned} H_2(t) &= t^2 - 1, \\ H_3(t) &= t^3 - 3t, \\ H_4(t) &= t^4 - 6t^2 + 3, \\ H_5(t) &= t^5 - 10t^3 + 15t, \\ H_6(t) &= t^6 - 15t^4 + 45t^2 - 15, \\ H_7(t) &= t^7 - 21t^5 + 105t^3 - 105t, \\ H_8(t) &= t^8 - 28t^6 + 210t^4 - 420t^2 + 105, \\ H_9(t) &= t^9 - 36t^7 + 378t^5 - 1260t^3 + 945t. \end{aligned}$$

Porównanie szeregów Taylora funkcji tworzącej  $\Psi(x, t)$  występującej w równaniu różniczkowym

$$\frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t) = x \Psi(x, t)$$

proceedzi do równości (12.4).

## § 5. Przestrzeń Hilberta

Obliczając wartość oczekiwaną iloczynu funkcji tworzących wziętych dla dowolnych dwóch wartości parametru formalnego  $x$  otrzymamy

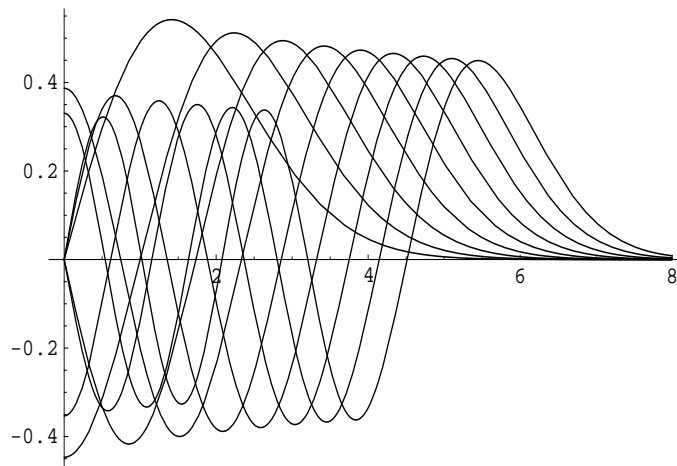
$$\begin{aligned} E(\Psi(x, \mathbf{v}) \Psi(y, \mathbf{v})) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dv e^{-\frac{v^2}{2} - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + vx + vy - xy + xy} = \\ &= \frac{e^{xy}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dv e^{-\frac{(v-x-y)^2}{2}} = e^{xy}. \end{aligned}$$

Znowu możemy porównać stosowne szeregi Taylora, tym razem dla pierwszego i ostatniego wyrażenia w powyższym ciągu równości

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{1}{m!n!} E(H_m(\mathbf{v}) H_n(\mathbf{v})) x^m y^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n y^n.$$

Równość wielomianów implikuje równość określających je współczynników, więc prawdziwymi muszą być następujące tożsamości

$$(12.9) \quad E\left(\frac{H_m(\mathbf{v})}{\sqrt{m!}} \frac{H_n(\mathbf{v})}{\sqrt{n!}}\right) = 0$$



Rysunek 12.1. Wykresy funkcji  $\sqrt{\frac{dL(t)}{dt}} \frac{H_n(t)}{\sqrt{n!}}$  dla  $n=1, \dots, 9$ .

dla wszystkich par  $m \neq n$  oraz

$$(12.10) \quad E \left( \frac{H_n(\mathbf{v})}{\sqrt{n!}} \frac{H_n(\mathbf{v})}{\sqrt{n!}} \right) = 1$$

dla wszystkich  $n$ . W ten sposób dochodzimy do wniosku o charakterze geometrycznym, że wielomiany postaci  $\frac{H_n(t)}{\sqrt{n!}}$  rozważane z wagą standaryzowanego rozkładu normalnego tworzą system funkcji *ortonormalnych* (tzn. prostopadłych w znaczeniu własności (12.9) i unormowanych do jedności w znaczeniu własności (12.10)). System ten jest bazą przestrzeni Hilberta  $\mathcal{H}_E$  [Enc97]. Przestrzeń  $\mathcal{H}_E$  jest wyposażonym w operację iloczynu skalarnego  $E(f_1(\mathbf{v}) f_2(\mathbf{v}))$  zbiorem funkcji mierzalnych  $f(t)$ , czyli takich, dla których  $E(|f(\mathbf{v})|^2) < \infty$ . Formalizm przestrzeni Hilberta stanowi podstawę teorii kwantowej, której poświęcona jest trzecia część książki. W rozdziale 15 odnajdziemy pełną definicję tej przestrzeni. Zagadnienie momentów rozkładu normalnego jest dobrze określone<sup>2</sup>, więc z twierdzenia Riesz [Enc97] wynika, że układ  $\{s^n 1\}$  jest zupełny, to znaczy każda funkcja  $f(t)$  należąca do  $\mathcal{H}_E$  musi zniknąć na całej dziedzinie, gdy znika jej iloczyn skalarny z dowolnym elementem  $s^n 1$  układu (czyli  $E(f(\mathbf{v}) s^k 1) = 0$ ).

Wykresy *funkcji Hermita*  $\sqrt{\frac{dL}{dt}} \frac{H_n}{\sqrt{n!}}$  dla dziewięciu początkowych wielomianów Hermita obrazują skorygowany miarą rozkładu normalnego obszar zmienności tych wielomianów. Autor nie przedstawił wykresu funkcji Hermita dla wielomianu o numerze  $n=0$ . Został on dostatecznie spopularyzowany, gdyż widniał na wycofanym ostatnio z obiegu banknocie dziesięciomarkowym. Z uwagi na wspomniane wyżej symetrie wielomianów zobrazowana została jedynie dodatnia część argumentów funkcji Hermita. Numer wybranego wielomianu

<sup>2</sup>patrz §4 *Uzupełnień*

łatwo odczytać z wykresu wiedząc, że wielomiany Hermita mają wszystkie zera rzeczywiste i jednokrotne. Spośród własności wielomianów Hermita warto jeszcze wymienić znikanie dla wszystkich indeksów naturalnych średniej wartości wielomianów  $E(H_n(\mathbf{v}))$ , wykazane przy okazji dowodu zamieszczonego w *Uzupełnieniach* §4. Oczywiście zachodzi równość  $E(H_0(\mathbf{v})) = 1$ .

### § 6. Własność splotu wielomianów Hermita

Rozważmy odwzorowanie  $\bullet : \mathcal{H}_E \times \mathcal{H}_E \rightarrow \mathcal{H}_E$  postaci

$$f(t) \bullet g(t) := E \mathbf{s} f(t) g(u - t + \mathbf{v})|_{u=t} = E \int_{\mathbf{v}}^t d\tau f(\tau) g(t - \tau + \mathbf{v}).$$

W przypadku klasycznych reprezentacji algebry stopy ( $\mathbf{v} \equiv 0$ ) powyższe wyrażenie należy zastąpić splotem funkcji (reprezentacja Bernoulliego), bądź splotem ciągów (reprezentacja Newtona) na odcinku  $[0, t]$ . W omawianej tu reprezentacji Gaussa wartość całki-splotu jest dodatkowo uśredniona w jej dolnej granicy. Rozpisanie stosownych wyrażeń pozwala wykazać przemienność ( $f(t) \bullet g(t) = g(t) \bullet f(t)$ ) oraz rozdzielność dodawania ( $(f(t) + g(t)) \bullet h(t) = f(t) \bullet h(t) + g(t) \bullet h(t)$ ) dla uśrednionego splotu  $\bullet$ . Wyliczymy wartość splotu dwóch wielomianów Hermita. W tym celu, podobnie jak wyżej, znajdziemy splot funkcji tworzących wielomianów Hermita, by potem odszukać współczynniki przy odpowiedniej potęgach parametrów formalnych funkcji tworzącej. Mamy

$$\begin{aligned} \Psi(x, t) \bullet \Psi(y, t) &= E \int_{\mathbf{v}}^t d\tau e^{\tau x - \frac{\tau^2}{2} + (t - \tau + \mathbf{v})y - \frac{y^2}{2}} = \\ &= \frac{1}{x - y} e^{-\frac{x^2 + y^2}{2}} (e^{tx} E(e^{\mathbf{v}y}) - e^{ty} E(e^{\mathbf{v}x})). \end{aligned}$$

Korzystając z zamieszczonej w *Uzupełnieniach* §4 postaci funkcji tworzącej momentów rozkładu normalnego otrzymamy

$$(12.11) \quad \Psi(x, t) \bullet \Psi(y, t) = \frac{e^{tx - \frac{x^2}{2}} - e^{ty - \frac{y^2}{2}}}{x - y} = \frac{\Psi(x, t) - \Psi(y, t)}{x - y}.$$

Z definicji funkcji tworzącej wielomianów Hermita wynika, że

$$\frac{\Psi(x, t) - \Psi(y, t)}{x - y} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1} - y^{k+1}}{x - y} \mathbf{s}^{k+1} \mathbf{1} = \sum_{k=0}^{\infty} (\mathbf{s}^{k+1} \mathbf{1}) \sum_{m=0}^k x^m y^{k-m},$$

więc porównując wyrażenia przy  $x^m y^n$  po obydwu stronach równości (12.11) otrzymujemy, że

$$(12.12) \quad \frac{H_m(t)}{m!} \bullet \frac{H_n(t)}{n!} = \frac{H_{m+n+1}(t)}{(m+n+1)!}.$$

Jeżeli zastąpimy wielomiany Hermita  $H_k(t)$  jednomianami  $t^k$  (reprezentacja Bernoulliego) bądź symbolami Pochhammera przyrastającej potęgi  $t^{\bar{k}}$ , czy ubywającej  $t^{\underline{k}}$  (reprezentacje Newtona) i odpowiednio skorygujemy operację splotu, to własność (12.12) pozostanie spełniona. Tak więc dla wszystkich rozważanych dotychczas reprezentacji algebry stopy zachodzi tożsamość

$$(12.13) \quad (s^m 1)(t) \bullet (s^n 1)(t) = (s^{m+n+1} 1)(t).$$

Zapiszmy formułę (12.13) tak, by uwypuklić jej istotną cechę

$$(12.14) \quad \frac{H_k(t)}{k!} \bullet \frac{H_l(t)}{l!} = s^{k+1} \frac{H_l(t)}{l!}.$$

Korzystając z zupełności układu wielomianów Hermita możemy wielomian  $\frac{H_l}{l!}$  występujący we wzorze (12.14) zastąpić dowolną funkcją, co prowadzi do formuły wielokrotnego całkowania typu Cauchy'ego, której klasyczne analogony pojawiały się w poprzednich rozdziałach

$$s^{k+1} f(t) = E \int_{\mathbf{v}}^t d\tau \frac{H_k(t - \tau + \mathbf{v})}{k!} f(\tau).$$

Formuła Cauchy'ego okazuje się jedynie specyficznym zapisem własności (12.13) splotu wielomianów  $s^k 1$ . Reprezentacje algebry stopy, w których operator przyrostu kapitałowego  $s$  jest tak określony, że spełnia własność (12.13) będziemy nazywać *reprezentacjami Mikusińskiego*. Przyczyny przyjęcia tej nazwy podane zostaną w paragrafie 12.

## § 7. Operacja dyskutowania $[\mathbf{r}, \mathbf{s}]^{-1}$

Jeszcze raz przypomnijmy znaną z metody sumowania postępu geometrycznego tożsamość teleskopową,

$$\sum_{k=0}^m s^k \circ [\mathbf{r}, \mathbf{s}] \circ \mathbf{r}^k = \sum_{k=0}^m s^k \circ (\mathbf{1} - \mathbf{s} \circ \mathbf{r}) \circ \mathbf{r}^k = \mathbf{1} - \mathbf{s}^{m+1} \circ \mathbf{r}^{m+1}.$$

Po podstawieniu w powyższym równaniu definicji operatorów  $\mathbf{r}$  i  $\mathbf{s}$  specyficznych dla reprezentacji Gaussa i zapisaniu wyników działania obydwóch stron

równania na dowolną funkcję  $f(t)$  (odpowiednią ilość razy różniczkowalną) otrzymamy

$$(12.15) \quad \sum_{k=0}^m s^k E(f^{(k)}(\mathbf{v})) = \sum_{k=0}^m \frac{H_k(t)}{k!} E(f^{(k)}(\mathbf{v})) = f(t) - s^{m+1} f^{(m+1)}(t),$$

gdzie  $f^{(k)}(\mathbf{v})$  standardowo oznacza  $k$ -tą pochodną funkcji  $f(t)$  w punkcie  $t = \mathbf{v}$ . Operator  $[\mathbf{r}, \mathbf{s}]^{-1}$  jest (z definicji) odwrotnością operatora  $[\mathbf{r}, \mathbf{s}]$

$$[\mathbf{r}, \mathbf{s}] \circ [\mathbf{r}, \mathbf{s}]^{-1} = [\mathbf{r}, \mathbf{s}]^{-1} \circ [\mathbf{r}, \mathbf{s}] = \mathbf{I},$$

czyli  $f(t) = [\mathbf{r}, \mathbf{s}]^{-1} E(f(\mathbf{v}))$ , więc  $[\mathbf{r}, \mathbf{s}]^{-1}$  pozwala odtworzyć, na podstawie pełnej informacji o uśrednionej funkcji kapitału (zawierającej jej uśrednione kolejne pochodne), wartość kapitału  $f(t)$  w dowolnej chwili  $t$ . Równanie (12.15) ma następującą postać

$$f(t) = [\mathbf{r}, \mathbf{s}]^{-1} E(f(\mathbf{v})) = \sum_{k=0}^m \frac{H_k(t)}{k!} E(f^{(k)}(\mathbf{v})) + s^{m+1} f^{(m+1)}(t),$$

wiec dla klasy funkcji należących do przestrzeni  $\mathcal{H}_E$ , gdy obowiązuje odpowiednia formuła Cauchy'ego (12.13), otrzymamy analogon popularnego wzoru Taylora z resztą w postaci całkowej (9.8)

$$(12.16) \quad f(t) = [\mathbf{r}, \mathbf{s}]^{-1} E(f(\mathbf{v})) = \sum_{k=0}^m \frac{H_k(t)}{k!} E(f^{(k)}(\mathbf{v})) + \frac{H_m(t)}{m!} \bullet f^{(m+1)}(t).$$

Zbieżność szeregu  $\sum_{k=0}^m \frac{H_k(t)}{k!} E(f^{(k)}(\mathbf{v}))$ , wynikająca z należenia  $f(t)$  do  $\mathcal{H}_E$ , pozwala nam w sposób jawny, na podstawie wzoru (12.16) i zupełności ortonormalnego systemu wielomianów  $\left\{ \frac{H_n(t)}{\sqrt{n!}} \right\}$ , przedstawić funkcję  $f(t)$  następująco

$$(12.17) \quad f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{H_k(t)}{k!} E(f^{(k)}(\mathbf{v})) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{H_k(t)}{k!} E(H_k(\mathbf{v}) f(\mathbf{v})).$$

### § 8. Od reprezentacji Bernoulliego do reprezentacji Gaussa

Rozwinięcie kapitału jako funkcji czasu  $f(t)$  w szereg względem wielomianów Hermita postaci (12.17) można otrzymać bezpośrednio z rozwinięcia  $f(t)$  w szereg Taylora (czyli z przedstawienia funkcji  $f(t)$  jako algebraicznego wyrażenia wygenerowanego w ramach reprezentacji Bernoulliego). Wystarczy do tego umiejętność przedstawienia wielomianów  $\frac{t^n}{n!} = (s^n \mathbf{1})_{Bernoulli}$  występujących w szeregu Taylora jako kombinacji liniowych wielomianów Hermita

$\frac{H_n(t)}{n!} = (\mathbf{s}^n \mathbf{1})_{Gauss}$ . Jeżeli w przedstawionym w paragrafie 4 zestawieniu wielomianów Hermita, lub we wzorze (12.5), dostrzec formułę transformacji (zmiany współrzędnych) wyrażeń zapisanych w reprezentacji Gaussa w odpowiadające im wyrażenia w reprezentacji Bernoulliego

$$\{\mathbf{s}^n \mathbf{1}\}_{Gauss} \rightarrow \{\mathbf{s}^n \mathbf{1}\}_{Bernoulli},$$

to obecnie potrzebna jest nam znajomość transformacji do niej odwrotnej, czyli

$$\{\mathbf{s}^n \mathbf{1}\}_{Bernoulli} \rightarrow \{\mathbf{s}^n \mathbf{1}\}_{Gauss}.$$

W tym celu porównamy współczynniki stojące przy  $x^m$  w rozwinięciu w szereg potęgowy następującej tożsamości

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} x^m E(\mathbf{v}^n (\mathbf{s}^m \mathbf{1})(\mathbf{v})) &= E(\mathbf{v}^n \Psi(x, \mathbf{v})) = \int_{-\infty}^{\infty} dL(v) v^n e^{xv - \frac{v^2}{2}} = \\ &= E((x + \mathbf{v})^n). \end{aligned}$$

Łatwo zauważyć, że jedyne różne od zera współczynniki mają postać

$$E(\mathbf{v}^n (\mathbf{s}^{n-2k} \mathbf{1})(\mathbf{v})) = \binom{n}{2k} E(\mathbf{v}^{2k}) = \frac{n!}{2^k k! (n-2k)!}$$

dla  $k = 0, 1, \dots, \lfloor 2n \rfloor$ . Na podstawie powyższego wniosku i zupełności przestrzeni  $\mathcal{H}_E$  otrzymamy

$$\begin{aligned} t^n &= \sum_{m=0}^{\infty} E(\mathbf{v}^n (\mathbf{s}^m \mathbf{1})(\mathbf{v})) H_m(t) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} E(\mathbf{v}^n (\mathbf{s}^{n-2k} \mathbf{1})(\mathbf{v})) H_{n-2k}(t) = \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{n!}{2^k k!} (\mathbf{s}^{n-2k} \mathbf{1})(t), \end{aligned}$$

czyli

$$(12.18) \quad (\mathbf{s}^n \mathbf{1})_{Bernoulli} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{1}{2^k k!} (\mathbf{s}^{n-2k} \mathbf{1})_{Gauss}.$$

Zwraca uwagę wyjątkowa symetria transformacji (12.5) i (12.18) pomiędzy reprezentacjami Bernoulliego i Gaussa. Jej konsekwencją jest niezwykle prosty przepis na wypisanie kolejnych jednomianów  $t^n$  jako kombinacji liniowych wielomianów Hermita. W tym celu wystarczy zamienić w zestawieniu podanym w paragrafie 4 wielomiany  $\{t^n\}$  i  $\{H_n(t)\}$  rolami oraz zignorować występujące



tam znaki minusa. W efekcie uzyskamy następujące tożsamości

$$\begin{aligned} t^2 &= H_2(t) + 1, \\ t^3 &= H_3(t) + 3 H_1(t), \\ t^4 &= H_4(t) + 6 H_2(t) + 3, \\ t^5 &= H_5(t) + 10 H_3(t) + 15 H_1(t), \\ t^6 &= H_6(t) + 15 H_4(t) + 45 H_2(t) + 15, \\ t^7 &= H_7(t) + 21 H_5(t) + 105 H_3(t) + 105 H_1(t), \\ t^8 &= H_8(t) + 28 H_6(t) + 210 H_4(t) + 420 H_2(t) + 105, \\ t^9 &= H_9(t) + 36 H_7(t) + 378 H_5(t) + 1260 H_3(t) + 945 H_1(t). \end{aligned}$$

Autor nie zna bardziej efektownego przykładu na natychmiastowe odwrócenie nietrywialnej macierzy o dowolnej ilości wymiarów.

### § 9. Statystyczny pomiar pochodnych

Warto zatrzymać się w tym miejscu, by wyciągnąć wnioski z równości

$$(12.19) \quad E(f^{(m)}(\mathbf{v})) = E(H_m(\mathbf{v}) f(\mathbf{v})),$$

którą można otrzymać wyznaczając wartość oczekiwaną iloczynu wielomianu  $H_m(\mathbf{v})$  i funkcji  $f(\mathbf{v})$  zadanej wzorem (12.17). Lewa strona równania (12.19) jest uśrednioną po standaryzowanym rozkładzie normalnym  $m$ -tą pochodną funkcji  $f(t)$ . Gdy drugi moment rozkładu Gaussa zmierza do zera ( $\sigma \rightarrow 0$ ), sam rozkład zbiega do dystrybucji  $\delta$ -Diraca [Enc97], więc  $E(f^{(m)}(\mathbf{v})) \rightarrow f^{(m)}(0)$ . Wybierając różne pierwsze momenty rozkładu normalnego otrzymamy wartości  $m$ -tych pochodnych funkcji  $f^{(m)}(a)$  w dowolnych punktach  $a$ . Tożsamość (12.19) pozwala statystykowi wyznaczać pochodne funkcji odtwarzanej na podstawie danych empirycznych przez pomiar wartości średniej iloczynów funkcji z odpowiednim wielomianem Hermita. Wzór (12.19) posiada istotne znaczenie praktyczne w związku z bezpośrednimi zastosowaniami wielomianów Hermita. Przedstawione wyżej zestawienie kolejnych wielomianów może być traktowane jako tablica współczynników potrzebnych do statystycznego wyznaczania pochodnych funkcji.

Wynikająca z równości (12.19) i (12.2) formuła

$$E(f^{(n)}(\mathbf{v})) = E(f(\mathbf{v}_1) (\mathbf{v}_1 + i\mathbf{v}_2)^n)$$

przypomina nieco wzór Cauchy'ego na  $n$ -tą pochodną funkcji analitycznej [BF75]

$$(12.20) \quad f^{(n)}(x) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C dz f(z) (z-x)^{-n-1},$$

jednak wzór (12.20) jest nieprzydatny dla określenia metody pomiaru pochodnych funkcji.

### § 10. Ciąg stóp gaussowskich

Analogicznie do konstrukcji zastosowanych w przypadkach reprezentacji klasycznych algebry stopy, zdefiniujemy stopę gaussowską  $n$ -tego rzędu  $r_n$  równaniem

$$(12.21) \quad r_n E(f(\mathbf{v})) = E(f^{(n)}(\mathbf{v})).$$

Szereg (12.17) możemy zapisać następująco

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{H_k(t)}{k!} E(f^{(k)}(\mathbf{v})) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_k H_k(t)}{k!} E(f(\mathbf{v})).$$

Formuła (12.18) przejścia z reprezentacji Bernoulliego do reprezentacji Gaussa pozwala wyrazić stopę gaussowską  $n$ -tego rzędu jako kombinację liniową stóp różniczkowych  $r_{dk}$  rzędów nie niższych niż  $n$ -ty ( $k \geq n$ )

$$\begin{aligned} r_n &= \frac{E(f^{(n)}(\mathbf{v}))}{E(f(\mathbf{v}))} = \frac{E(H_n(\mathbf{v}) f(\mathbf{v}))}{E(f(\mathbf{v}))} = \\ &= \frac{1}{E(f(\mathbf{v}))} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_{dk}}{k!} E(H_n(\mathbf{v}) \mathbf{v}^k) f(0) = \\ &= \frac{f(0)}{E(f(\mathbf{v}))} \sum_{k=0}^{\infty} r_{d(n+2k)} E\left(H_n(\mathbf{v}) \frac{\mathbf{v}^{n+2k}}{(n+2k)!}\right) = \frac{f(0)}{E(f(\mathbf{v}))} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_{d(n+2k)}}{2^k k!}. \end{aligned}$$

W przypadku gdy kapitał zmienia się wykładniczo w czasie w opisie reprezentacji Bernoulliego zgodnie ze stopą różniczkową  $r$  ( $f^{(1)}(t) = r f(t)$ ) z (12.21) otrzymamy  $r_n = r^n$ , czyli

$$(12.22) \quad [\mathbf{r}, \mathbf{s}]^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^k H_k(t)}{k!} = \Psi(r, t).$$

Funkcja tworząca  $\Psi(x, t) = e^{r t - \frac{r^2}{2} t^2}$  ma prostą interpretację finansową. Jest ona czynnikiem dyskontującym kapitał na chwilę  $t$ , czyli jest wartością jednostki kapitału na tą chwilę, wyznaczoną dla wykładniczego wzrostu kapitałowego przebiegającego w tempie mierzonym stopą różniczkową  $r$ . Kapitał ten choć jednostkowy w momencie losowym  $\mathbf{v}$ , to uśredniony po standaryzowanym rozkładzie normalnym wokół chwili 0 ma względem tej chwili wartość  $e^{-\frac{r^2}{2}}$ . Dla

wykładniczego wzrostu przedziałowa stopa wzrostu zdefiniowana jako logarytm naturalny czynnika dyskontowego

$$r_{\ln}(t) := \ln([\mathbf{r}, \mathbf{s}]^{-1})$$

jest funkcją liniowo zależną od czasu

$$r_{\ln}(t) = \ln \Psi(r, t) = r t - \frac{r^2}{2}.$$

## § 11. Przykłady liczbowe

Przedstawione poniżej przykłady nawiązują do rachunków z poprzednich trzech rozdziałów.

**11.1. Wzrost wykładniczy** Rozważymy powiększanie się zainwestowanego kapitału  $k$  o stały roczny procent  $r = 0.2$  w konwencji kapitalizacyjnej ciągłej, czyli wzrostu opisanego funkcją

$$(12.23) \quad k(t) = e^{\frac{0.2}{1 \text{ rok}} t} k.$$

Okres wdrażania (rozruchu) inwestycji trwał dwa lata ( $\sigma = 2$ ), tzn. w chwili  $t$  „pracująca” część kapitału wynosiła  $\int_{-\infty}^t dM_{0,2}(\tau)$ . Szukamy wartości kapitału po 10-ciu latach ( $t_{10} = 10$ ), licząc od momentu połowicznego wdrożenia inwestycji ( $t = 0$ ). Problem ten jest równoważny zadaniu wyznaczenia wartości oczekiwanej kapitału po 10-ciu latach z inwestycji o identycznym wzroście, poczynionej w chwili  $\tau$  będącej zmienną losową o rozkładzie normalnym  $dM_{0,2}(\tau)$ . Przechodząc do naturalnej jednostki czasowej (2 lata), czyli do opisu zadania za pomocą standaryzowanego rozkładu normalnego mamy  $r = 0.4$ ,  $\sigma = 1$ ,  $t_{10} = 5$ . Zgodnie z formułami (12.22) i (12.6) wartość kapitału po 10-ciu latach wyniesie

$$(12.24) \quad k(t_{10}) = [\mathbf{r}, \mathbf{s}]^{-1} k = \Psi(r, t_{10}) k = \Psi(0.4, 20) k = e^{2-0.08} k = 6.82 k.$$

Wielkość ta jest  $0.923$  (czyli  $e^{-0.08}$ ) częścią kapitału  $k$  wzrastającego zgodnie z taką samą stopą  $r$ , lecz w całości „pracującego” od chwili  $t = 0$ , lub jest równoważna kapitałowi wdrożonemu w taką samą inwestycję w całości w momencie  $t' = 0.08/0.4 = 0.2$  następującym po upływie  $0.2 \cdot 2 = 0.4$  roku od chwili  $t = 0$  (gdyż wtedy  $k(t) = e^{r(t-t')} k$ ). Innymi słowy wdrażana inwestycja zaczyna być rentowną po chwili  $t'$  określonej warunkiem  $r_{\ln}(t') = 0.4 t' - 0.008 = 0$ , czyli po  $t' = 0.2$  2lata, to znaczy po 0.4 roku. Po dziesięciu latach otrzymamy w procesie (12.24) zysk taki, jak z inwestycji o kapitalizacji ciągłej zadanej stopą różniczkową  $r = \frac{2-0.08}{10} = 0.192 \frac{1}{\text{rok}}$ .

**11.2. Obliczanie stóp gaussowskich dwóch pierwszych rzędów** Przykład ten przedstawia zagadnienie aproksymacji procesu kapitałowego wielomianami Hermita. Jak pokazano w przykładzie na stronie 160, procesem kapitałowym, uwzględniającym zmiany do drugiego rzędu włącznie, najlepiej dopasowanym do wykładniczego wzrostu  $k(t) = e^{0.2t} k$  z poprzedniego przykładu, jest proces opisywany czynnikiem dyskontowym

$$(12.25) \quad [\mathbf{r}, \mathbf{s}]^{-1}(t) = 1 + r_{d1}t + \frac{r_{d2}}{2}t^2,$$

gdzie kolejne stopy różniczkowe są odpowiednio równe  $r_{d1} = 0.04164 \frac{1}{rok}$  oraz  $r_{d2} = 0.1195 \frac{1}{rok^2}$ . Zmieniając, podobnie jak wyżej, jednostkę czasową na dwuletnią mamy  $r_{d1} = 0.08328$  i  $r_{d2} = 0.478$ . Dla równoważnego dyskontowania w reprezentacji Gausa, gdzie  $\rho := E([\mathbf{r}, \mathbf{s}]^{-1}(\mathbf{v}))$ , mamy

$$[\mathbf{r}, \mathbf{s}]^{-1}(t) = \left(1 + r_1 H_1(t) + \frac{r_2}{2} H_2(t)\right) \rho = \left(1 + r_1 t + r_2 \frac{t^2 - 1}{2}\right) \rho$$

i przez porównanie z wyrażeniem (12.25) otrzymujemy następujący układ równań na współczynniki wielomianu w reprezentacji Gausa  $\rho r_1 = r_{d1}$ ,  $\rho r_2 = r_{d2}$ ,  $\rho(1 - \frac{r_2}{2}) = 1$ , Tego typu równania są układami liniowymi względem iloczynów  $\rho r_k$ . Stosując np. szkolną metodę eliminacji Gausa otrzymamy następujące rozwiązanie  $\rho = 1 + \frac{r_{d2}}{2} = 1.239$ ,  $r_1 = 0.8071$ ,  $r_{d1} = 0.06722$ ,  $r_2 = 0.8071$ ,  $r_{d2} = 0.3858$ . Zgodnie ze wzorem (12.21) liczby  $r_1$  i  $r_2$  są uśrednionymi prędkościami zmiany kwoty kapitału dwóch pierwszych rzędów, wyrażonymi w stosunku do przeciętnej wartości kapitału. Uzyskaliśmy parametry gaussowskiej reprezentacji stopy procesu najlepiej dopasowanego do tempa wzrostu (12.23). By otrzymać najlepszą aproksymację procesu (12.24) wystarczy, zgodnie z jednym z wniosków zamieszczonych w poprzednim przykładzie, dokonać korekty współczynnika  $\rho$  do wartości  $0.923 \rho = 1.1436$ .

## § 12. Rachunek operatorowy Mikusińskiego

Rozważmy uśredniony splot trzech dowolnych funkcji  $f(t)$ ,  $g(t)$ ,  $h(t)$  należących do przestrzeni  $\mathcal{H}_E$ , więc posiadających rozwinięcie w bazie wielomianów

## Hermita

$$\begin{aligned}
f(t) \bullet (g(t) \bullet h(t)) &= \sum_{l,m,n=0}^{\infty} f_l H_l(t) \bullet ((g_m H_m(t)) \bullet (h_n H_n(t))) = \\
&= \sum_{l,m,n=0}^{\infty} (f_l g_m h_n) (H_l(t) \bullet (H_m(t) \bullet H_n(t))) = \\
&= \sum_{l,m,n=0}^{\infty} (f_l g_m h_n) \frac{l! m! n!}{(l+m+n+2)!} H_{l+m+n+2}(t) = \\
&= \sum_{l,m,n=0}^{\infty} (f_l g_m h_n) ((H_l(t) \bullet H_m(t)) \bullet H_n(t)) = \\
&= (f(t) \bullet g(t)) \bullet h(t),
\end{aligned}$$

gdzie w trakcie przekształceń skorzystaliśmy z formuły (12.13). Uśredniony spłot  $\bullet$  posiada więc własność łączności, konieczną by móc rozważać pierścień „ułamek”  $\frac{\{f(t)\}}{\{g(t)\}}$ , gdzie symbol „ $\frac{\{f(t)\}}{\{g(t)\}}$ ” ma identyczne powiązanie z uśrednionym spłotem  $\bullet$ , jak znana wszystkim kreska ułamkowa z symbolem standardowego mnożenia liczbowego. Łączność okazała się konsekwencją formuły spłotu (12.13) więc jest własnością operacji  $\bullet$  zdefiniowanej na podstawie operatora przyrostu kapitałowego  $s$  w dowolnej reprezentacji Mikusińskiego algebry stopy. Ułamki postaci  $\frac{\{f(t)\}}{\{g(t)\}}$  związane ze zwykłym spłotem nazywane są *hiperfunkcjami* [Yos84, Ste71]. Są nimi wszystkie funkcje, a także wspomniana wcześniej dystrybucja  $\delta$ -Diraca, która nie jest funkcją. Rachunek na hiperfunkcjach nazywany jest *rachunkiem operatorowym Mikusińskiego* [Yos84]. Pozwala on uwzględniać m.in. nieciągłe zmiany kapitałowe (np. wpłata na konto) w jednolitym formalizmie rachunku stóp. Wykazana wyżej własność spłotu (12.13) umożliwia nie tylko określenie całkowitej postaci reszty w analogonii formuły Taylora, ale przede wszystkim przeniesienie formalizmu algebry stopy na jeszcze wyższy poziom abstrakcji, jakim jest rachunek Mikusińskiego. W ramach tego rachunku wszystkie własności algebraiczne stopy stają się łączne i przemienne, odtwarzając znane z czasów szkolnych operacje na zwykłych ułamkach, a konsekwencje takich rachunków dopiero w kontekście odpowiedniej reprezentacji Mikusińskiego algebry stopy przybierają postać skomplikowanych wzorów. Praktyczne walory rachunku Mikusińskiego są zademonstrowane w kolejnym rozdziale. Tu warto jedynie zauważyć, że własność spłotu (12.13), potrzebną dla spełnienia koniecznej dla rachunku na hiperfunkcjach łączności operacji  $\bullet$ , można byłoby otrzymać dla wielomianów generowanych przez dowolną funkcję postaci  $\Psi(x, t) = e^{xt} f(x)$ . Wielomiany takie w literaturze nazywane są *wielomianami Appella* [Enc97]. Należą do nich, prócz wielomianów już omówionych, m.in. *wielomiany Bernoulliego* i *wielomiany Laguerre* [Enc97]

(ortonormalne względem rozkładu gamma). Tak więc rachunek Mikusińskiego można uogólnić nie tylko na sploty dyskretne (reprezentacje Newtona algebry stopy) i sploty uśrednione po zmiennych losowych o rozkładzie normalnym, ale także na sploty uśrednione po zmiennych losowych będących sumami kwadratów tamtych zmiennych, więc opisywanych statystykami  $\chi^2$ . W następnym rozdziale zademonstrowane zostaną walory „klasycznego” wariantu rachunku Mikusińskiego.

---

### § 13. Dygresja

Układ wielomianów Hermita posiada fundamentalne znaczenie dla obowiązującego paradygmatu fizyki kwantowej, w związku z pojawieniem się tych wielomianów podczas rozwiązywania zagadnienia własnego dla hamiltonianu oscylatora harmonicznego. W rozdziale 15 dowiemy się, że wektory własne tego operatora ryzyka dla wszystkich (z wyjątkiem najmniejszej) wartości własnych prowadzą do funkcji Wignera nie spełniających wymogu dodatniej określoności, więc modelujących niemonotoniczne krzywe popytu czy podaży. Bazując na tej wiedzy, jedynie w oparciu o wielomiany Hermita można by było skonstruować fenomenologiczną teorię rynku, nie nawiązującą bezpośrednio do postulatów kwantowych i np. precyzyjnie modelującą odstępstwa od praw rynkowych. Jednak prostota i elegancja teorii holistycznej skłania raczej ku rozwiązaniom proponowanym w ostatniej części tej książki. Autorzy popularnego podręcznika metod matematycznych fizyki [BF75] snują wizję świata bardzo małych istot rozumnych. Dochodzą do wniosku, że taka cywilizacja odkryła by wielomiany Hermita całe stulecia przed funkcjami trygonometrycznymi. W kontekście rozważań tego rozdziału wydaje się, że nie trzeba mieć mikroskopijnych rozmiarów, żeby dostrzec wagę rachunków prowadzonych w przestrzeni Hilberta zbudowanej na bazie takich wielomianów. Wystarczy uwzględnić w jakichkolwiek rachunkach element niepewności, czy ryzyka, mierzony rozkładem normalnym, a wielomiany Hermita pojawią się jako naturalna konsekwencja podstawowej w analizie matematycznej potrzeby aproksymacji funkcji wielomianami. Należy wtedy pamiętać o zmodyfikowaniu stosowanego określenia stopy wzrostu odpowiednio do wybranej reprezentacji opisu procesów kapitałowych.

## Hiperstopa

W rozdziale tym poznamy konsyistentną z klasycznym pierwowzorem definicję stopy procentowej, która jako pierwsza uwzględnia wszystkie rodzaje zmian kapitałowych. Pozwala na to rachunek operujący na pierścieniu hiperfunkcji, będący oryginalnym dorobkiem polskiego matematyka. Dla wprowadzania jednolitej idei względnych zmian kapitałowych przedstawiono podstawowe konstrukcje tego rachunku, obejmujące m.in. standardowe zagadnienia analizy matematycznej, w których np. formuła Taylora okazuje się wzorem na  $n$ -tą pochodną funkcji.

Opisana w poprzednich rozdziałach algebra stopy zwrotu jest fundamentalną dla matematyki finansowej strukturą formalną, obejmującą wszystkie stosowane sposoby opisu zmian kapitału, a także ich nowe modyfikacje, z uwzględnianymi czynnikami losowe włącznie, mogące w przyszłości wzbogacić metody ilościowej charakterystyki procesów kapitałowych. Wykazuje ona cechy, zob. poprzedni rozdział, świadczące o powiązaniach z głębszą abstrakcyjnie strukturą algebraiczną, znaną od półwiecza jako *rachunek Mikusińskiego na hiperfunkcjach*<sup>1</sup>. Rachunek ten stanowi alternatywne podejście do zagadnień teorii dystrybucji [Ste71] w jej ujęciu funkcjonalowym Schwartza, czy ujęciu ciągowym, odkrytym także przez Jana G.-Mikusińskiego. W literaturze matematycznej rachunek Mikusińskiego odnajdziemy również pod jego alternatywnymi nazwami *rachunku operatorów*, czy *rachunku Heaviside'a*.

Początki teorii dystrybucji sięgają badań Paula Diraca dotyczących teorii pola (wtedy pojawiła się występująca niżej „funkcja” delta Diraca)[Enc97]. Dziś fizycy matematyczni zaliczają teorię dystrybucji do kanonicznych narzędzi badawczych. Najczęściej wiąże się ona z techniką rachunkową operującą funkcjami Greena [Enc97], pozwalającą znaleźć skomplikowane rozwiązania układów liniowych równań różniczkowych cząstkowych teorii pola na podstawie ich fundamentalnych rozwiązań opisujących punktowe źródła pól. Niestety, aplikacje te dotyczą wielowymiarowej dziedziny dystrybucji, gdzie rachunek Mikusińskiego traci swój walor prostoty. Wydaje się, że w aplikacjach finansowych, gdzie jednowymiarowy parametr jakim jest czas gra autonomiczną rolę, zaproponowane przez Mikusińskiego hiperfunkcje-ułamki powinny znaleźć swoje naturalne zastosowanie.

<sup>1</sup>patrz np. [Yos84]

Teoria hiperfunkcji Mikusińskiego łączy uogólnienie klasycznego pojęcia funkcji z łatwością manipulacji na ułamkach upowszechnianych w ramach szkolnictwa podstawowego. Chociaż istnieje możliwość rozszerzenia rachunku Mikusińskiego na wszystkie reprezentacje algebry stopy, ograniczymy się do jego opisu w ramach reprezentacji Bernoulliego, czyli opisu ewolucji kapitału w konwencji kapitalizacji ciągłej.

Niżej przedstawiony rachunek ułamków–hiperfunkcji, pomimo iż bazuje jedynie na jednej reprezentacji algebry stopy, pozwala wyjść poza ramy opisu kapitalizacji ciągłej przez uwzględnienie skokowych zmian kapitału w ramach jednolitej formuły stopy procentowej. Daje to uniwersalne narzędzie wyrażania w języku stopy zysku wszelkich zmian kapitału, które skraca w znacznym stopniu rachunki stosowane do określania ilościowych zmian kapitałowych.

### § 1. Funkcje liczbowe na $\mathbb{R}_+$

Rozważmy zbiór funkcji o wartościach liczbowych, określonych na nieujemnej (włącznie z zerem) części osi liczb rzeczywistych  $\mathbb{R}_+$ . Współrzędna  $t \in \mathbb{R}_+$ , należąca do tej dziedziny, w zastosowaniach finansowych interpretowana jest jako czas, w którym opisujemy procesy kapitałowe. Funkcje na  $\mathbb{R}_+$  będziemy ujmować w nawiasy klamrowe  $\{\dots\}$ <sup>2</sup>, aby przy pomocy tego zabiegu odróżnić funkcję, np.  $\{\sin(t)\}$ , od jej wartości liczbowej w punkcie  $t$ , czyli  $\sin(t)$ . Zabieg taki jest konieczny jeśli chcemy uniknąć istotnych dwuznaczności w dalszym tekście.

W zbiorze funkcji, prócz ich dodawania, rozważymy operację splotu  $\bullet$ , zdefiniowaną dla dowolnych dwóch funkcji  $\{f(t)\}$  i  $\{g(t)\}$  następująco

$$\{f(t)\} \bullet \{g(t)\} := \left\{ \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau \right\}.$$

Operacja splotu  $\bullet$  jest przemienna

$$\begin{aligned} \{f(t)\} \bullet \{g(t)\} &= \left\{ \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau \right\} = \\ &= \left\{ - \int_t^0 f(t - \tau') g(\tau') d\tau' \right\} = \{g(t)\} \bullet \{f(t)\}, \end{aligned}$$

a dodawanie funkcji jest względem niej rozłączne

$$(\{f(t)\} + \{g(t)\}) \bullet \{h(t)\} = \left\{ \int_0^t (f(\tau) h(t - \tau) + g(\tau) h(t - \tau)) d\tau \right\} =$$

<sup>2</sup>zgodnie z notacją w [Mik57]



$$\begin{aligned}
&= \left\{ \int_0^t f(\tau) h(t-\tau) d\tau \right\} + \left\{ \int_0^t g(\tau) h(t-\tau) d\tau \right\} = \\
&= \{f(t)\} \bullet \{h(t)\} + \{g(t)\} \bullet \{h(t)\},
\end{aligned}$$

gdzie w przypadku braku nawiasów przyjęliśmy konwencję w której wykonujemy najpierw operacje splotu  $\bullet$ , a po nich dodawania.

Jednak własnością, która pozwala nam w pełni przenieść przyzwyczajenia rachunkowe dotyczące mnożenia liczb na rachunki z operacją splotu jest łączność:

$$\begin{aligned}
&(\{f(t)\} \bullet \{g(t)\}) \bullet \{h(t)\} = \left\{ \int_0^t \left( \int_0^{\tau} f(\tau') g(\tau - \tau') d\tau' \right) h(t - \tau) d\tau \right\} = \\
&= \left\{ \int_0^t f(\tau') \left( \int_0^{t-\tau'} g(t - \tau' - \tau'') h(\tau'') d\tau'' \right) d\tau' \right\} = \{f(t)\} \bullet (\{g(t)\} \bullet \{h(t)\}).
\end{aligned}$$

W poprzednim rozdziale przedstawiona została możliwość uogólnień operacji splotu, zachowujących wszystkie powyższe własności, które pozwalają przenieść rachunek Mikusińskiego na niezwykle bogatą klasę modeli opisujących zjawiska finansowe. Ze względu na rozległość zagadnienia uogólnienia takie wymagają odrębnych opracowań.

Zgodnie z wprowadzonymi oznaczeniami funkcja tożsamościowo równa liczbie jeden ma postać  $\{1\}$ . Przyjmując konwencję Sierpińskiego<sup>3</sup> liczenia od zera, zdefiniujemy

$$(13.1) \quad \{1\}_0 := \{1\}, \text{ oraz } \{1\}_k := \{1\} \bullet \{1\}_{k-1} \text{ dla } k \in \mathbb{N}.$$

Otrzymujemy w ten sposób ciąg wielomianów  $k$ -tego stopnia

$$\{1\}_k := \{1\}^{k+1} = \overbrace{\{1\} \bullet \{1\} \cdots \bullet \{1\}}^{k+1 \text{ czynników}},$$

które w poprzednich rozdziałach oznaczaliśmy symbolami  $s^k 1$  i które np. w reprezentacji Bernoulliego są następującymi funkcjami

$$(13.2) \quad \{1\}_k = \{t^k/k!\}.$$

Ta jawna postać wielomianów  $\{1\}_k$  wynika z zasady indukcji matematycznej [CR98], gdyż na podstawie definicji (13.1) równość (13.2) jest prawdziwa dla  $k=0$ , a jeśli założymy poprawność wzoru (13.2) dla pewnego  $m \in \mathbb{N}$ , to otrzymamy wymaganą zależność dla odpowiedniego wielomianu  $(m+1)$ -go stopnia

$$\{1\}_{m+1} = \{1\} \bullet \{1\}_m = \left\{ \int_0^t (\tau^m/m!) d\tau \right\} = \{t^{m+1}/(m+1)!\}.$$

<sup>3</sup>patrz np. [CG99]

## § 2. Funkcje schodkowe na $\mathbb{R}_+$

Dziedziną funkcji omawianych w tym rozdziale jest  $\mathbb{R}_+$ , więc we wszystkich rozważanych wyrażeniach prawdziwą jest nierówność  $0 \leq t$ , czyli  $[0 \leq t] = 1$ <sup>4</sup>. Dlatego możemy zamiennie używać symboli  $\{[0 \leq t]\}_k$  oraz  $\{1\}_k$ . W celu generowania wyrażen w rachunku Mikusińskiego potrzebne będą prócz funkcji stałej jedynie funkcje zdaniowe [Mar88] postaci  $\{[\tau \leq t]\}$ . Zwykło się je nazywać funkcjami *theta Heaviside'a* bądź, ze względu na kształt ich wykresów, *funkcjami skoku* [Mik57]. Dowolną kombinację liniową funkcji skoku, czyli funkcję postaci  $\sum_k \{p_k [\tau_k \leq t]\}$ , o współczynnikach liczbowych  $p_1, p_2, \dots$ , nazywamy *funkcją schodkową*. Funkcje skoku są najprostszym rodzajem funkcji schodkowych.

Ustalmy parametr  $\Delta \in \mathbb{R}_+$ . Niech określenie *funkcja ciągła prawie wszędzie na  $\mathbb{R}_+$*  oznacza funkcję ciągłą na zbiorze  $\mathbb{R}_+$ , z wyjątkiem co najwyżej punktów, których liczba w każdym przedziale skończonym jest skończona. Dla danej funkcji  $\{f(t)\}$  ciągłej na  $\mathbb{R}_+$  prawie wszędzie, możemy skonstruować następującą funkcję schodkową

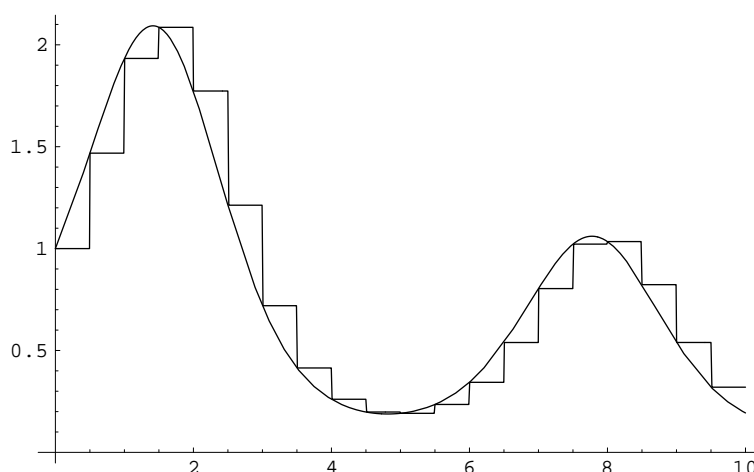
$$\{f_\Delta(t)\} := \{f(0) [0 \leq t]\} + \sum_{k=1}^{\infty} \{(f(k \Delta) - f((k-1) \Delta)) [k \Delta \leq t]\}.$$

Rysunek przedstawia wykres takiej konstrukcji otrzymanej dla pewnej funkcji gładkiej  $\{f(t)\}$  i  $\Delta = 0.5$ . Wykres funkcji aproksymującej  $\{f_\Delta(t)\}$  odpowiada poziomym częściom wspartej na krzywej  $\{f(t)\}$  linii łamanej w kształcie schodków o stopniach różnej wysokości. Różnica  $\{f(t)\} - \{f_\Delta(t)\}$  mierzy wzrost, bądź spadek funkcji  $\{f(t)\}$  względem jej wartości w najbliższym z punktów z lewej, na którym wsparta jest łamana. Obserwujemy, że dla  $\Delta \rightarrow 0$  funkcja  $\{f_\Delta(t)\}$  zbiega do  $\{f(t)\}$  w tym sensie, że dla dowolnej funkcji  $\{g(t)\}$  zachodzi

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} (\{f_\Delta(t)\} \bullet \{g(t)\}) = \{f(t)\} \bullet \{g(t)\}.$$

Zmiany kapitałowe modelowane funkcją  $\{f(t)\}$  można aproksymować przy pomocy funkcji schodkowej  $\{f_\Delta(t)\}$ , patrz rys.13.1. Stosowanie takiego zabiegu jest często wykorzystywane w życiu codziennym. W praktyce finansowej dostrzeżemy go np. w przeprowadzaniu okresowych bilansów przedsiębiorstwa, w zaokrągłaniu kwot do ustalonego miejsca po przecinku, czy w komputerowej wizualizacji wykresów funkcji zmian cenowych. Aproksymacja ta posiada jednak poważne mankamenty. Arbitralny wybór punktów  $k \Delta \in \mathbb{R}_+$  prowadzi do dużej nieefektywności — w prawie każdym z nich nie zachodzą żadne skokowe zmiany kapitałowe, a miejsca dziedziny czasowej w których takie zmiany zachodzą zwykle nie odpowiadają dokładnie owym punktom. Przy okazji tracimy także

<sup>4</sup>w wyrażeniu posłużono się wprowadzoną na str.140 notacją Iwersona



Rysunek 13.1. Aproxymacja funkcji ciągłej funkcją.

możliwość opisu wzrostu za pomocą stopy różniczkowej, gdyż powyższa aproksymacja nie odtwarza pochodnej funkcji. Sama idea funkcji schodkowych okazuje się jednak przydatna do precyzyjnego przedstawiania chwilowych zmian kapitałowych. Odpowiednio zaadoptowana umożliwi skonstruowanie hiperstopy, opisanej w paragrafie 5.

### § 3. Ułamki funkcyjne

Podobnie jak w znanej ze szkolnych podręczników algebrze, w rachunku Mikusińskiego można wprowadzić, patrz [Mik57], dla każdej uporządkowanej pary funkcji  $\{f(t)\}$  i  $\{g(t)\} \neq \{0\}$  ułamek  $\frac{\{f(t)\}}{\{g(t)\}}$  (zwany dalej także *hiperfunkcją*) o własności  $\{f(t)\} = \frac{\{f(t)\}}{\{g(t)\}} \bullet \{g(t)\}$ . W bieżącym rozdziale pogrubiona pozioma kreska ułamkowa „—” używana jest jedynie w takich specyficznych „ułamkach”, symbolizując działanie odwrotne do splotu  $\bullet$ . Z twierdzenia Titchmarsh’a [Mik57] wynika, że jeżeli  $\{f(t)\}$ ,  $\{g(t)\}$  i  $\frac{\{f(t)\}}{\{g(t)\}}$  są funkcjami ciągłymi na  $\mathbb{R}_+$ , to funkcja  $\frac{\{f(t)\}}{\{g(t)\}}$  jest unikalna (ułamek  $\frac{\{f(t)\}}{\{g(t)\}}$  ma tylko jedno przedstawienie w tej klasie funkcji). Nie zawsze funkcja  $\frac{\{f(t)\}}{\{g(t)\}}$  istnieje (stąd nazwa hiperfunkcja), w tym samym sensie jak nie istnieje liczba naturalna  $\frac{10}{11}$  (choć liczba naturalna  $\frac{4}{2}$  istnieje, tak jak np. istnieje na  $\mathbb{R}_+$  funkcja ciągła  $\frac{\{t^3-6t\}}{\{6t+6\}}$  równa  $\{t-1\}$ ). Jednak w każdym przypadku istnieje para funkcji  $\{f(t)\}$  i  $\{g(t)\}$ , tak jak istnieje para

liczb naturalnych 10 i 11. Znane nam operacje na ułamkach funkcyjnych są następujące:

- dodawanie

$$\frac{\{a(t)\}}{\{b(t)\}} + \frac{\{c(t)\}}{\{d(t)\}} := \frac{\{a(t)\} \bullet \{d(t)\} + \{b(t)\} \bullet \{c(t)\}}{\{b(t)\} \bullet \{d(t)\}},$$

- splot (mnożenie)

$$\frac{\{a(t)\}}{\{b(t)\}} \bullet \frac{\{c(t)\}}{\{d(t)\}} := \frac{\{a(t)\} \bullet \{c(t)\}}{\{b(t)\} \bullet \{d(t)\}},$$

- porównywanie

$$\frac{\{a(t)\}}{\{b(t)\}} = \frac{\{c(t)\}}{\{d(t)\}} \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \{a(t)\} \bullet \{d(t)\} = \{b(t)\} \bullet \{c(t)\}.$$

Łatwo zauważyć, że ułamki  $\frac{\{c\}}{\{1\}}$ , gdzie  $\{c\}$  jest funkcją o stałej wartości równej liczbie  $c$ , są *de facto* liczbami, gdyż

$$\frac{\{a\}}{\{1\}} + \frac{\{b\}}{\{1\}} = \frac{\{at + bt\}}{\{1\}_1} = \frac{\{1\} \bullet \{a + b\}}{\{1\} \bullet \{1\}} = \frac{\{a + b\}}{\{1\}}$$

oraz

$$(13.3) \quad \frac{\{a\}}{\{1\}} \bullet \frac{\{b\}}{\{1\}} = \frac{\left\{ \int_0^t ab \, d\tau \right\}}{\{1\}_1} = \frac{\{1\} \bullet \{ab\}}{\{1\} \bullet \{1\}} = \frac{\{ab\}}{\{1\}}.$$

Dlatego możemy napisać, że dla dowolnej liczby (rzeczywistej, czy zespolonej) zachodzi możliwość reprezentowania jej ułamkiem funkcyjnym

$$c = \frac{\{c\}}{\{1\}}.$$

Splot wykazuje własność jaką posiada mnożenie funkcji przez liczby, mamy bowiem

$$c \bullet \{f(t)\} = \frac{\{c\} \bullet \{f(t)\}}{\{1\}} = \frac{\left\{ \int_0^t c f(\tau) \, d\tau \right\}}{\{1\}} = \frac{\{1\} \bullet \{c f(t)\}}{\{1\}} = \{c f(t)\},$$

a w szczególności

$$1 \bullet \{f(t)\} = \frac{\{1\}}{\{1\}} \bullet \{f(t)\} = \frac{\{[0 \leq t]\}}{\{[0 \leq t]\}} \bullet \{f(t)\} = \{f(t)\}.$$

Liczba 1 jest więc jedynką pierścienia ułamków Mikusińskiego.

Posługując się własnością (13.3) możemy w obliczeniach zastąpić mnożenia liczb odpowiednimi splotami, co prowadzi do wniosku, że elementarnymi operacjami rachunku Mikusińskiego są splot i dodawanie, a wszystkie pozostałe konstrukcje algebraiczne mają względem nich wtórny charakter.

Splot  $\{f(t)\}$  z funkcją  $\{1\}$  pozwala wyznaczyć całkę funkcji  $\{f(t)\}$

$$\{1\} \bullet \{f(t)\} = \left\{ \int_0^t f(\tau) d\tau \right\}.$$

Rozważmy dowolną funkcję ciągłą  $\{f(t)\}$ , która posiada pochodną  $\{f^{(1)}(t)\}$  ciągłą prawie wszędzie na  $\mathbb{R}_+$  (symbolem  $\{f^{(k)}(t)\}$  będziemy oznaczać  $k$ -tą pochodną  $\{f(t)\}$ ). Wtedy splot  $\{f(t)\}$  z hiperfunkcją  $\frac{1}{\{1\}}$ , która jest odwrotnością  $\{1\}$ , prowadzi do wyznaczenia tej pochodnej, gdyż

$$\{1\} \bullet \{f^{(1)}(t)\} = \left\{ \int_0^t f'(\tau) d\tau \right\} = \{f(t)\} - \{f(0)\},$$

więc

$$\{f^{(1)}(t)\} = \frac{\{f(t)\} - \{f(0)\}}{\{1\}} = \frac{\{f(t)\}}{\{1\}} - \frac{\{f(0)\}}{\{1\}} = \frac{\{f(t)\}}{\{1\}} - f(0),$$

czyli

$$(13.4) \quad \frac{1}{\{1\}} \bullet \{f(t)\} = \{f^{(1)}(t)\} + f(0).$$

Pamiętać należy, że wyrażenie  $f(0)$  nie jest funkcją stałą o wartości równej wartości funkcji  $\{f(t)\}$  w punkcie  $t=0$ , lecz jedynie liczbą  $f(0)$ . Warto zwrócić uwagę, że ułamek  $\frac{1}{\{1\}}$ , splatanie z którym prowadzi do wyznaczenia pochodnej, występuje w mianowniku ułamka (13.9). Dokonując kolejny raz splotu funkcji  $\{f(t)\}$  z ułamkiem  $\frac{1}{\{1\}}$  otrzymamy formułę

$$(13.5) \quad \begin{aligned} \left( \frac{1}{\{1\}} \right)^2 \bullet \{f(t)\} &= \frac{1}{\{1\}} \bullet \frac{1}{\{1\}} \bullet \{f(t)\} = \\ &= \frac{1}{\{1\}} \bullet \{f^{(1)}(t)\} + f(0) \bullet \frac{1}{\{1\}} = \{f^{(2)}(t)\} + f^{(1)}(0) + f(0) \bullet \frac{1}{\{1\}}, \end{aligned}$$

która pozwala zauważyć prawidłowość prowadzącą do ogólnego wzoru na  $n$ -tą pochodną funkcji  $\{f(t)\}$

$$(13.6) \quad \left( \frac{1}{\{1\}} \right)^n \bullet \{f(t)\} = \\ = \{f^{(n)}(t)\} + f^{(n-1)}(0) + f^{(n-2)}(0) \bullet \frac{1}{\{1\}} + s + f(0) \bullet \left( \frac{1}{\{1\}} \right)^{n-1}.$$

Formuła (13.6) sprowadza zagadnienia wyznaczania rozwiązań równań różniczkowych zwyczajnych o zadanych warunkach początkowych do mechanicznych manipulacji na ułamkach, czego przykład jest przedstawiony niżej w bieżącym paragrafie. Jeżeli odwrócimy porządek składników sumy w prawej stronie tej formuły, po czym spleciemy jej strony z wielomianem  $\{1\}_{n-1} = \{1\}^n$ , to otrzymamy wzór Taylora z resztą w postaci całkowej [Enc97]

$$(13.7) \quad \{f(t)\} = \{f(0)\} + \sum_{k=1}^{n-1} f^{(k)}(0) \bullet \{1\}_k + \{1\}^n \bullet \{f^{(n)}(t)\} = \\ = \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0) \frac{t^k}{k!} \right\} + \left\{ \int_0^t f^{(n)}(\tau) \frac{\tau^{n-1}}{(n-1)!} d\tau \right\}.$$

Uniwersalne znaczenie operacji splotu dla matematyki finansowej ujawniło się w czterech poprzednich rozdziałach w trakcie badań własności reszty w skończonym szeregu Taylora. Jeżeli przypomnimy sobie formułkę szkolną głoszącą, że *równanie nie ulegnie zmianie, gdy pomnożymy jego strony przez liczbę różną od zera*, to stwierdzimy, że wzór Taylora jest tożsamy ze wzorem wielokrotnego różniczkowania funkcji!

Dowolną funkcję gładką możemy wyrazić przy pomocy sumy splotów funkcji stałych. Takie przedstawianie funkcji umożliwia granica szeregu (13.7)

$$(13.8) \quad \{f(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(0) \bullet \{1\}_k.$$

Wyznamy sploty stron formuły (13.8) dla funkcji  $\{e^{pt}\}$ , gdzie  $p$  jest dowolną liczbą, z hiperfunkcją  $(1 - p \bullet \{1\})$ . Pamiętając, że  $k$ -ta pochodna funkcji  $\{e^{pt}\}$  w zerze wynosi  $p^k$  otrzymamy

$$(1 - p \bullet \{1\}) \bullet \{e^{pt}\} = \sum_{k=0}^{\infty} p^k \bullet \{1\}_k - \sum_{k=0}^{\infty} p^{k+1} \bullet \{1\}_{k+1} = \{1\}_0 = \{1\},$$

czyli

$$(13.9) \quad \{e^{-pt}\} = \frac{\{1\}}{1 + p \bullet \{1\}} = \frac{1}{p + \frac{1}{\{1\}}}.$$

Stwierdziliśmy, że funkcja obrazująca najbardziej rozpowszechniony w zagadnieniach ekonomicznych wzrost wykładniczy ma w rachunku Mikusińskiego postać szczególnie prostego ułamka.

Przejdźmy do przedstawienia metody manipulacji uławkami funkcyjnymi na przykładzie rozwiązywania równań różniczkowych. Zajmiemy się równaniami oscylatora, których fundamentalne znaczenie dla wyjaśnienia źródeł problemów w zarządzaniu kapitałem, właściwych dla liniowych procesów kapitałowych, poznaliśmy w rozdziale 7. Mają one następującą postać

$$(13.10) \quad \begin{aligned} \{f^{(1)}(t)\} &= -b \bullet \{g(t)\}, \\ \{g^{(1)}(t)\} &= b \bullet \{f(t)\}, \end{aligned}$$

gdzie  $b$  jest liczbą rzeczywistą. Różniczkując pierwsze z równań sprowadzimy powyższy układ do jednego równoważnego mu równania drugiego rzędu

$$(13.11) \quad \{f^{(2)}(t)\} = -b^2 \bullet \{f(t)\},$$

które, zgodnie ze wzorem (13.5), ma w rachunku Mikusińskiego postać

$$(13.12) \quad \left( \left( \frac{1}{\{1\}} \right)^2 + b^2 \right) \bullet \{f(t)\} = f^{(1)}(0) + \frac{1}{\{1\}} \bullet f(0).$$

Dzieląc strony (13.12) przez wyrażenie zawarte w największych nawiasach otrzymamy ogólne rozwiązanie równania (13.11) zależne od dwóch liczb  $f(0)$  i  $f^{(1)}(0) = -b g(0)$ , stanowiących warunki początkowe tego równania

$$(13.13) \quad \{f(t)\} = f(0) \bullet \frac{\{1\}}{1 + (b \bullet \{1\})^2} - g(0) \bullet \frac{b \bullet \{1\}^2}{1 + (b \bullet \{1\})^2}.$$

Brakującą część rozwiązania układu (13.10) uzyskamy wstawiając do pierwszego z równań (13.10) rozwiązanie (13.13) dla  $\{f(t)\}$

$$(13.14) \quad \begin{aligned} g(t) &= -b^{-1} \bullet \left( \frac{\{f(t)\}}{\{1\}} - f(0) \right) = \frac{f(0)}{b} \bullet \left( 1 - \frac{1}{1 + (b \bullet \{1\})^2} \right) + \\ &+ g(0) \bullet \frac{\{1\}}{1 + (b \bullet \{1\})^2} = g(0) \bullet \frac{\{1\}}{1 + (b \bullet \{1\})^2} + f(0) \bullet \frac{b \bullet \{1\}^2}{1 + (b \bullet \{1\})^2}. \end{aligned}$$

Należy jeszcze wyjaśnić, czym są tajemnicze ułamki występujące w rozwiązaniu (13.13), (13.14) układu (13.10). Wprowadzając jednostkę urojoną  $i^2 = -1$  możemy napisać następującą tożsamość

$$\frac{1}{x^2 + y^2} = \frac{1}{(x + i \bullet y) \bullet (x - i \bullet y)} =$$

$$= \frac{1}{2 \bullet x} \bullet \left( \frac{1}{x - i \bullet y} + \frac{1}{x + i \bullet y} \right) = \frac{1}{2 \bullet i \bullet y} \bullet \left( \frac{1}{x - i \bullet y} - \frac{1}{x + i \bullet y} \right).$$

Podstawiając  $1 \rightarrow x$  oraz  $b \bullet \{1\} \rightarrow y$  otrzymamy

$$\begin{aligned} \frac{\{1\}}{1 + (b \bullet \{1\})^2} &= \frac{1}{2} \bullet \left( \frac{\{1\}}{1 - i \bullet b \bullet \{1\}} + \frac{\{1\}}{1 + i \bullet b \bullet \{1\}} \right) = \\ &= \left\{ \frac{1}{2} (e^{ibt} + e^{-ibt}) \right\} = \{\cos(bt)\}, \\ \frac{b \bullet \{1\}^2}{1 + (b \bullet \{1\})^2} &= \frac{1}{2 \bullet i} \bullet \left( \frac{\{1\}}{1 - i \bullet b \bullet \{1\}} - \frac{\{1\}}{1 + i \bullet b \bullet \{1\}} \right) = \\ &= \left\{ \frac{1}{2i} (e^{ibt} - e^{-ibt}) \right\} = \{\sin(bt)\}, \end{aligned}$$

gdzie wykorzystana została formuła (13.9) oraz wzór Eulera, który zapisany przy pomocy ułamków funkcyjnych ma banalną do wykazania jego poprawności postać

$$\frac{\{1\}}{1 - i \bullet b \bullet \{1\}} = \frac{\{1\}}{1 + (b \bullet \{1\})^2} + i \bullet \frac{b \bullet \{1\}^2}{1 + (b \bullet \{1\})^2}.$$

W rachunku Mikusińskiego funkcje trygonometryczne są prostymi ułamkami. Jeśli zamiast rzeczywistego parametru w równaniach oscylatora użyjemy czynnika urojonego, czego dokonamy podstawiając  $b \rightarrow ib$  w powyższych wzorach począwszy od (13.10), to otrzymamy ułamki, które są funkcjami hiperbolicznymi

$$\begin{aligned} \{\cosh(bt)\} &= \frac{\{1\}}{1 - (b \bullet \{1\})^2}, \\ \{\sinh(bt)\} &= \frac{b \bullet \{1\}^2}{1 - (b \bullet \{1\})^2}. \end{aligned}$$

W ten sposób każdy ułamek, który jest ilorazem wielomianów o współczynnikach zespolonych, zbudowanych na bazie funkcji  $\{1\}_k$ , daje się, przez rozkład na ułamki proste, sprowadzić do wyrażenia będącego kombinacją liniową potęg funkcji wykładniczych  $\{e^{zt}\}^m$  o zespolonych parametrach  $z$  i całkowitych  $m$ .

W przypadku funkcji  $\{f(t)\}$  nie zachowującej warunku ciągłości, który to przypadek interesuje nas z powodu rozważenia zagadnienia skokowych operacji kapitałowych, wzór (13.4) wymaga modyfikacji. Zanim ją wprowadzimy, powinniśmy uprzednio zbadać „pochodną” funkcji skoku, czyli ułamek  $\frac{1}{\{1\}} \bullet \{[\tau \leq t]\}$ .



§ 4. Ułamek przesunięcia  $\delta_\tau$ 

Przejdźmy do przykładu ułamków mniej trywialnych w swej formie od prezentowanych w poprzednim paragrafie. Dla dowolnej funkcji  $\{f(t)\}$  i  $\tau \geq 0$  definiujemy ułamek  $\delta_\tau$  nazywany *deltą Diraca* [Mik57] jako następujący iloraz dwóch funkcji zdaniowych

$$(13.15) \quad \delta_\tau := \frac{\{[\tau \leq t]\}}{\{[0 \leq t]\}}.$$

Splatając deltę Diraca z wyrażeniem  $\{1\} \bullet \{f(t)\}$ , gdzie  $\{f(t)\}$  jest dowolną funkcją na  $\mathbb{R}_+$ , otrzymamy

$$\begin{aligned} \{1\} \bullet \delta_\tau \bullet \{f(t)\} &= \{[\tau \leq t]\} \bullet \{f(t)\} = \left\{ \int_0^t [\tau \leq t - \theta] f(\theta) d\theta \right\} = \\ &= \left\{ [\tau \leq t] \int_0^t [\theta \leq t - \tau] f(\theta) d\theta \right\} = \left\{ [\tau \leq t] \int_0^{t-\tau} f(\theta) d\theta \right\} = \\ &= \left\{ \int_{-\tau}^{t-\tau} [0 \leq \theta] f(\theta) d\theta \right\} = \left\{ \int_0^t [\tau \leq \theta] f(\theta - \tau) d\theta \right\} = \{1\} \bullet \{[\tau \leq t] f(t - \tau)\}. \end{aligned}$$

Dzieląc powyższe wyrażenia przez  $\{1\}$  dochodzimy do wniosku, że dla dowolnej funkcji  $\{f(t)\}$  zachodzi równość

$$(13.16) \quad \delta_\tau \bullet \{f(t)\} = \{[\tau \leq t] f(t - \tau)\}.$$

Ta więc hiperfunkcja  $\delta_\tau$  przesuwa wykres funkcji  $\{f(t)\}$  w prawo o  $\tau$ , uzupełniając go na odcinku  $(0, \tau)$  wykresem funkcji zerowej  $\{0\}$ . Zgodnie z przyjętą w paragrafie 3 konwencją, w której w przypadku tworzenia liczb operacja dzielenia funkcji stałych przez funkcję  $\{1\}$  sprowadzała się do opuszczenia w oznaczeniu funkcji stałej nawiasów  $\{\}$ , możemy ułamek  $\delta_\tau$  występujący w definicji (13.15) zapisać zwięźle w postaci

$$\delta_\tau = [\tau \leq t].$$

Rozszerzmy definicję delty Diraca na ujemne wartości parametru  $\tau$  [Mik57] kładąc

$$\delta_{-\tau} := \frac{1}{\delta_\tau} = [\tau \leq t]^{-1} = \frac{\{[0 \leq t]\}}{\{[\tau \leq t]\}},$$

co nie wychodzi poza ramy dziedziny hiperfunkcji  $\mathbb{R}_+$ . Ujemny czas wiąże się tu z odpowiednią operacją odwrotnego przesunięcia, a nie z chwilami poprzedzającymi moment  $t = 0$ . Własność przesunięcia wykresu funkcji zawarta w

definicji ułamka  $\delta_\tau$  oznacza, że

$$(13.17) \quad \delta_a \bullet \delta_b = \delta_{a+b},$$

dla dowolnych  $a, b \in \mathbb{R}$ . Formuła (13.17) z warunkiem  $\delta_0 = 1$  nasuwa skojarzenia z funkcją wykładniczą opartą na stałej Nepera. W istocie, można wykazać, że delta Diraca ma postać<sup>5</sup>

$$\delta_a = e^{-\frac{a}{\{1\}}}.$$

Tak więc podzbiór ułamków będących deltami Diraca tworzy dobrze wszystkim znaną grupę  $(\mathbb{R}, +)$ . Każdą liczbę rzeczywistą możemy przedstawić jako różnicę liczb nieujemnych  $\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R}_+$  i to na wiele różnych sposobów, więc wzór

$$\delta_{\tau_1 - \tau_2} = \frac{\{\tau_1 \leq t\}}{\{\tau_2 \leq t\}} = \frac{[\tau_1 \leq t]}{[\tau_2 \leq t]}$$

będący konsekwencją formuły (13.17) stanowi jeszcze jeden sposób reprezentowania ułamka  $\delta_a$ .

Z deltą Diraca zetkniemy się w rozdziale przy okazji rozważań najprostszycy algorytmów kwantowych gier rynkowych. Tam dystrybucja ta będzie opisywać strategię kupca posiadającego zdeterminowaną wartość ceny rezygnacji ze sprzedaży.

## § 5. Hiperstopa procentowa

Rozważmy obecnie zmiany kapitałowe reprezentowane na  $\mathbb{R}_+$  funkcją  $\{f(t)\}$  nie zmieniającą swego znaku i zawsze różną od zera. Typową dla wielu opisów finansowych jest sytuacja, gdy kapitał prawie zawsze zmienia się zgodnie z różniczkowalnym czynnikiem dyskontowym  $\{U(t, 0)\} = \left\{e^{\int_0^t r(\tau) d\tau}\right\}$ , tak że stan kapitału w chwili  $t$  określony jest równaniem  $\{f(t)\} = \{U(t, 0) f(0)\}$ , por. rozdz. 7. Wyrażenie  $r(t)$  będące stopą różniczkową jest pochodną funkcji  $\left\{\ln \frac{f(t)}{f(0)}\right\}$  równej zero dla  $t = 0$ . Zgodnie z formułą (13.4) otrzymamy dla stopy zwrotu następujące wyrażenie

$$\{r(t)\} = \frac{\{\ln U(t, 0)\}}{\{1\}} = \frac{\{\ln f(t) - \ln f(0)\}}{\{1\}} = \frac{\{\ln f(t)\}}{\{1\}} - \ln f(0).$$

Jest ono jednak prawdziwe jedynie w przypadkach ciągłego czynnika dyskontowego  $\{U(t, 0)\}$ . Jeżeli funkcja kapitałowa  $\{f(t)\}$  będzie prawie wszędzie ciągła (z prawie wszędzie ciągłą pierwszą pochodną), posiadając skończoną ilość

<sup>5</sup>zob. [Mik57]

miejsz nieciągłości stanowiących „wpłaty” bądź „wypłaty” następujące w momentach  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ , to możemy funkcję logarytmu czynnika dyskontowego  $\{\ln \frac{f(t)}{f(0)}\}$  rozbić na sumę dwóch funkcji składowych. Pierwszą składową będzie funkcja ciągła  $\{\ln U(t, 0)\}$  o różniczkowej stopie wzrostu  $\{r(t)\}$ , a drugą funkcja schodkowa  $\sum_{k=1}^n \{p_k [\tau_k \leq t]\}$ , gdzie  $p_k$  jest liczbą równą logarytmicznej zmianie kapitału w chwili  $t = \tau_k$ , co możemy precyzyjnie wyrazić przy pomocy granic z góry i z dołu logarytmu funkcji kapitałowej  $\{\ln f(t)\}$  wyznaczonych dla chwil  $\tau_k$

$$p_k := \lim_{t \rightarrow \tau_k^+} (\ln f(t)) - \lim_{t \rightarrow \tau_k^-} (\ln f(t)).$$

Wielkości  $p_k$  nazywane są *skokami* funkcji  $\{\ln f(t)\}$  w punktach  $\tau_k$ <sup>6</sup>. Możliwość rozbitcia logarytmicznych zmian kapitału na sumujące się niezależne składowe wynika z addytywnych własności logarytmu czynnika dyskontowego, por. rozdz. 7, więc własność ta nie zachodzi np. dla górnych czy dolnych stóp procentowych. Gdy funkcja  $\{f(t)\}$  nie opisuje wartości kapitału, lecz obiekt do niego dualny, czyli cenę rynkową dobra, por. rozdz. 1, wtedy skoki odnotowują zmianę wycenianej jednostki dobra (np. w chwilach denominacji, splitu, wypłaty dywidendy). Prawie wszędzie ciągła logarytmiczna zmiana kapitału wyraża się więc następującym wzorem

$$\begin{aligned} \{\ln (f(t)/f(0))\} &= \left\{ \int_0^t r(\tau) d\tau \right\} + \sum_{k=1}^n \{p_k [\tau_k \leq t]\} = \\ (13.18) \quad &= \{1\} \bullet \{r(t)\} + \sum_{k=1}^n p_k \bullet \{[\tau_k \leq t]\}. \end{aligned}$$

Jeżeli w analogii do przypadku ciągłego zdefiniujemy stopę wzrostu kapitałowego prawie wszędzie ciągłego jako „pochodną” powyższego wyrażenia

$$(13.19) \quad r := \frac{1}{\{1\}} \bullet \left\{ \ln \frac{f(t)}{f(0)} \right\},$$

wtedy porównując (13.18) i (13.19) otrzymamy następującą, pozwalającą wyznaczyć tę stopę-hiperfunkcję, formułę

$$(13.20) \quad r = \{r(t)\} + \sum_{k=1}^n p_k \bullet [\tau_k \leq t].$$

Wynikający z definicji (13.19) wzór odwrotny, dzięki któremu na podstawie ułamka hiperstopy  $r$  otrzymamy bieżącą wartość funkcji kapitału  $\{f(t)\}$  ma postać

$$\{\ln f(t)\} = \{\ln f(0)\} + \{1\} \bullet r,$$

<sup>6</sup>zob. [SIo85]

czyli

$$\{f(t)\} = f(0) \bullet \{e^{z(t)}\},$$

gdzie  $\{z(t)\} := \{1\} \bullet r$ .

Hiperstopa nie jest funkcją w znaczeniu klasycznym, więc nie sposób obrazować ją wykresem. Są dwa sposoby informowania o niej. Pierwszy polega na podaniu odrębnie jej części ciągłej (z ewentualnym jej zobrazowaniem) oraz poinformowaniu o terminach  $\tau_k$  i skokach  $p_k$  logarytmu kapitału w tych chwilach. W drugim możemy posłużyć się jej całką  $\{1\} \bullet r$ , która, będąc funkcją prawie wszędzie ciągłą, nadaje się do zobrazowania.

### § 6. Renta wieczysta

Interesującą własność ma hiperfunkcja  $[\tau > t]^{-1}$ . Jeżeli zapiszemy ją w postaci ułamka, otrzymamy

$$[\tau > t]^{-1} = \frac{\{1\}}{\{[\tau > t]\}} = \frac{\{1\}}{\{1\} - \{[\tau \leq t]\}} = \frac{1}{1 - [\tau \leq t]} =$$

$$= 1 + [\tau \leq t] + [\tau \leq t] \bullet [\tau \leq t] + [\tau \leq t] \bullet [\tau \leq t] \bullet [\tau \leq t] + s = \sum_{k=0}^{\infty} [\tau \leq t]^k,$$

więc, zgodnie z wnioskiem paragrafu 4, splot wyrażenia  $[\tau > t]^{-1}$  z dowolną funkcją-wzorcem  $\{w(t)\}$  daje sumę funkcji o kształcie identycznym jak  $\{w(t)\}$ , przesuniętych w prawo kolejno o  $0, \tau, 2\tau, \dots$ . Wzorzec zostaje powielony na całej półosi  $\mathbb{R}_+$ . Dlatego hiperstopa postaci

$$(13.21) \quad -p \bullet \frac{[\tau \leq t]}{[\tau > t]}$$

określa trwające w nieskończoność wypłaty stałego procentu w wysokości  $1 - e^{-p}$  części bieżącej wartości kapitału. Ułamkiem (13.21) można opisywać renty wieczyste, czy inne podobne formy przynoszącego dywidendy kapitału.

Periodyczne procesy kapitałowe o skończonej liczbie  $n$  cykli posiadają część hiperstopy w postaci splotu wzorcowego skoku  $-p \bullet [\tau \leq t]$  (periodyczne skoki), czy odpowiedniej funkcji-wzorca  $\{w(t)\}$  (periodyczne zmiany ciągłe), z następującą hiperfunkcją

$$\left( \frac{[\tau \leq t]}{[\tau > t]} - \frac{[(n+1)\tau \leq t]}{[\tau > t]} \right) \bullet [\tau \leq t]^{-1} = \frac{[\tau \leq t] - [(n+1)\tau \leq t]}{[\tau > t] \bullet [\tau \leq t]}.$$

## § 7. Przykład wyznaczania hiperstopy

Załóżmy, że 1-go stycznia 1996 roku wpłaciłem na konto oprocentowane liniowo stopą 30% rocznie, z kapitalizacją odsetek na koniec roku, 1000 zł. 1-go stycznia 1997 pomniejszyłem stan konta o połowę jego pełnej (wraz z odsetkami) aktualnej wysokości, w połowie roku 1997 podwoiłem, zaś 1-go stycznia 1998 potroiłem jego stan. Interesuje mnie kształtowanie się hiperstopy w okresie do końca roku 1998. Dla wygody oznaczeń wprowadźmy funkcję *podłoga*  $\{[t]\}$  [GKP96], równą niewiększej od wartości argumentu  $t$  największej liczbie całkowitej. Podłoga jest funkcją schodkową, dlatego potrafimy wyrazić ją przy pomocy funkcji skoku

$$\{[t]\} = \sum_{k=1}^{\infty} \{[k \leq t]\} = \frac{\{1\}}{1 - [1 \leq t]} - \{1\} = \frac{\{[1 \leq t]\}}{[1 > t]} = \{1\} \bullet \frac{[1 \leq t]}{1 - [1 \leq t]}.$$

Ostatnie wyrażenie można interpretować jako całość ułamka  $\frac{[1 \leq t]}{[1 > t]}$ , lub jako sumę funkcji skoku otrzymanych z poprzysuwanej do kolejnych liczb naturalnych funkcji stałej  $\{1\}$ .

Przyjmując datę 1996-01-01 za chwilę zerową i mierząc czas w jednostkach rocznych mogę odnotować następujące dane o historii stanu konta:

- niekorygowany skokowymi ingerencjami liniowy wzrost odsetek daje stan konta (z odsetkami) w dowolnej chwili  $t$  w ciągu roku większy, w stosunku do jego stanu na początku roku, o czynnik dyskontowy  $\{1 + 0.3 t\}$ ,
- logarytm ciągłej części przyrostu kapitałowego odnotowywany w trakcie roku wynosi  $\{\ln(1 + 0.3 t)\}$ ,
- pochodna tej funkcji, stanowiąca różniczkową stopę wzrostu w przeciągu roku, jest następującą funkcją  $\{\frac{0.3}{1+0.3 t}\}$ .
- Z powyższych danych wynika, że niekorygowany wypłatami, czy wpłatami, logarytm kapitału znajdującego się na koncie w trakcie kolejnych lat opisuje funkcja

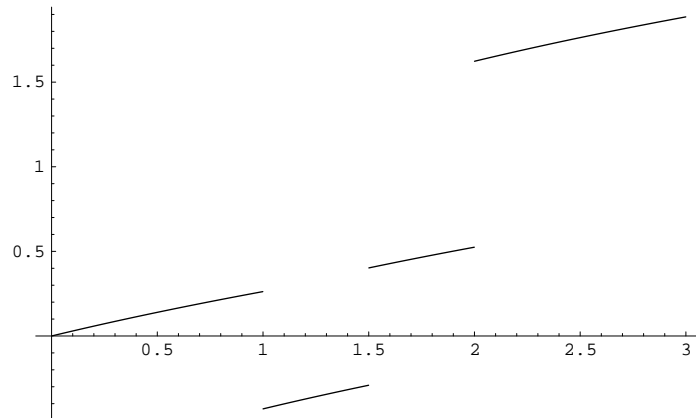
$$\{\ln f(t)\} = \{\ln f([t])\} + \{\ln(1 + 0.3(t - [t]))\},$$

- której stopa różniczkowa, czyli pochodna części ciągłej wzrostu wynosi

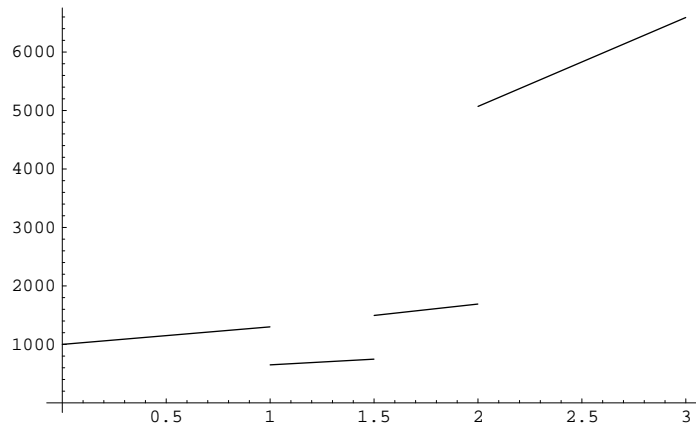
$$\{r(t)\} = \left\{ \frac{0.3}{1 + 0.3(t - [t])} \right\}.$$

- Jeżeli uwzględnimy zmiany nieciągłe kapitału, otrzymamy następujące wyrażenie na hiperstopę

$$r = \left\{ \frac{0.3}{1 + 0.3(t - [t])} \right\} - \ln 2 \bullet [1 \leq t] + \ln 2 \bullet [1.5 \leq t] + \ln 3 \bullet [2 \leq t].$$



Rysunek 13.2. Całka hiperstopy  $\{1\} \bullet r$  dla omawianego procesu kapitałowego.



Rysunek 13.3. Wykres wartości kapitału w czasie dla omawianego procesu kapitałowego.

Na zakończenie przykładu wyznaczymy na podstawie hiperstopy funkcję logarytmu przyrostu  $\{1\} \bullet r$  i zobrazujemy wartość konta w interesującym nas okresie czasowym. Całka z hiperstopy ma postać

$$\begin{aligned} \{1\} \bullet r &= \ln 1.3 \bullet \{[t]\} + \{\ln(1 + 0.3(t - [t]))\} - \ln 2 \bullet \{[1 \leq t]\} + \\ &\quad + \ln 2 \bullet \{[1.5 \leq t]\} + \ln 3 \bullet \{[2 \leq t]\} = \\ &= \ln 1.3 \bullet \{[t]\} + \{\ln(1 + 0.3(t - [t]))\} - \ln 2 \bullet \{[1 \leq t < 1.5]\} + \ln 3 \bullet \{[2 \leq t]\}, \end{aligned}$$

co przedstawia rysunek 13.2. Stan konta wyraża się funkcją o wartościach równych wartościom funkcji eksponent na argumentach będących odpowiednimi wartościami funkcji  $\{1\} \bullet r$ , pomnożonych przez kwotę 1000 zł:

$$f(t) = (1.3)^{[t]} (1 + 0.3(t - [t])) (2 - [1 > t] - [1.5 \leq t])^{-1} (3 - 2[2 > t]) 1000.$$

Przebieg takich zmian kapitałowych przedstawia rysunek 13.3.

## § 8. Popadanie w długi

W paragrafie 5 przyjęliśmy założenie, że funkcja kapitałowa  $\{f(t)\}$  nie zmienia na swej dziedzinie znaku. Oznacza to, że gdy opisywany kapitał jest zobowiązaniem (ma wartość ujemną) sposób wyznaczania hiperstopy jest taki sam, jak opisany powyżej. Zmianie ulega jedynie interpretacyjna ocena jej składowej określającej liczbowe wartości prędkości ciągłych przyrostów kapitałowych i skoków stojących przy występujących w niej deltach Diraca. W przypadku opisywania aktywów dodatni znak tych liczb oznacza pozytywną tendencję zmian dla właściciela aktywów i odwrotnie — ujemny znak dotyczy ponoszonych strat. Znaczenie znaków tych liczb występujących przy rozważaniu długu jest przeciwne. Dzięki składowej hiperstopy opisującej zmiany nieciągłe definicja hiperstopy (13.20) pozostaje poprawna także dla tych funkcji  $\{f(t)\}$  zmieniających znak, w których zmiana ta przebiega skokowo — wystarczy, że funkcja posiada wszędzie wartości różne od zera, co umożliwia stosowanie na całej jej dziedzinie idei proporcji. Zmianę znaku kapitału w momencie  $\tau$  uzyskamy wtedy, gdy pomnożymy jego wartość w tej chwili przez czynnik  $-1$ , co wystąpi, gdy do hiperstopy dodamy składnik  $\pm i \bullet \pi \bullet [\tau \leq t]$  (znak „ $\pm$ ” możemy traktować jako „ $+$ ”, bądź „ $-$ ”, co nie ma wpływu na stan kapitału). Całkując, czyli splatając hiperstopę z funkcją  $\{1\}$  otrzymamy dodatkowy czynnik postaci

$$\{1\} \bullet (\pm i \bullet \pi \bullet [\tau \leq t]) = \pm i \bullet \pi \bullet \{[\tau \leq t]\},$$

a że spełniona jest równość

$$\{e^{\pm i\pi[\tau \leq t]}\} = \{1 - 2 \bullet [\tau \leq t]\},$$

więc wykazaliśmy zachodzenie zamierzonego efektu zmiany znaku, bo funkcja  $\{1 - 2 \bullet [\tau \leq t]\}$  jest równa 1 dla  $t < \tau$  a  $-1$  dla  $t \geq \tau$ . Parzystość liczby występujących w hiperstopie składników postaci  $\pm i \bullet \pi \bullet [\tau \leq t]$  odnoszących się do minionych chwil  $\tau$  decyduje o tym, czy względem chwili początkowej  $t = 0$  kapitał zmienił znak czy nie (czy pozostał, czy nie, dobrem, czy zobowiązaniem).

Z przydatnością użycia w zagadnieniach stopy procentowej liczb zespolonych (i taką samą jak wyżej dowolnością wyboru znaku przy czynniku urojonym



i) spotkaliśmy się w rozdziale poświęconym stochastycznej reprezentacji algebry stopy. Dwuznaczność ta znika w analizie zmian kapitałowych polegającej na redukcji zagadnień modelowanych macierzową stopą wzrostu (jak w rozdz. 7) do przypadków autonomicznej ewolucji w jednowymiarowych przestrzeniach liniowych.

### § 9. Przykład hiperstopy zespolonej

Wyznamy hiperstopę, która z punktu widzenia zwierającej się osoby opisuje ilościowo następującą fabułę:

*Przez 10 lat wiodło mi się znakomicie, to co posiadałem, pomnażałem w tempie 20% rocznie. Niestety szczęście przysło i nagle znalazłem się w długach równych połowie stanu mej wczorajszej zamożności. Zobowiązania narastały dwa razy szybciej niż dawny majątek. Po pięciu latach wspaniałomyślny wierzyciel nie dość że umorzył mi cały dług, to jeszcze obdarował mnie dobrami o wartości równej 10% darowanego długu. Obecnie jestem rentierem i mimo upływu pięciu lat mój majątek nie zmienia jeszcze swej wartości.*

Analogiczne jak w paragrafie rozważania prowadzą nas do hiperstopy w postaci

$$(13.22) \quad r = \ln 1.2 \bullet \{1\} + (\ln 1.4 - \ln 1.2) \bullet \{[10 \leq t]\} - \ln 1.4 \bullet \{[15 \leq t]\} + \\ + (-\ln 2 + i \bullet \pi) \bullet [10 \leq t] + (-\ln 10 + i \bullet \pi) \bullet [15 \leq t].$$

Całka tej hiperstopy wynosi

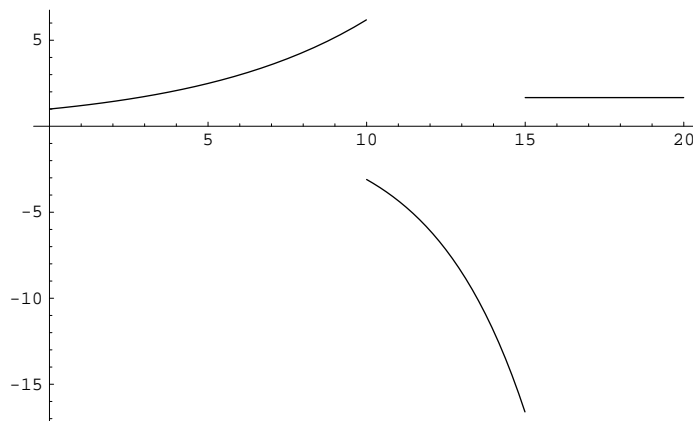
$$\{z(t)\} = \{1\} \bullet r = (\ln 1.2 + (\ln 1.4 - \ln 1.2) \bullet [10 \leq t] - \ln 1.4 \bullet [15 \leq t]) \bullet \{t\} + \\ + i \bullet \pi \bullet \{[10 \leq t < 15]\} - \ln 2 \bullet \{[10 \leq t]\} - \ln 10 \bullet \{[15 \leq t]\} = \\ = \ln 1.2 \bullet \{t [10 > t] + 10 [10 \leq t]\} + \ln 1.4 \bullet \{(t - 10) [10 \leq t < 15] + 5 [15 \leq t]\} + \\ + (-\ln 2 + i \bullet \pi) \bullet \{[10 \leq t]\} + (-\ln 10 + i \bullet \pi) \bullet \{[15 \leq t]\},$$

gdzie  $\{t\} = \{1\} \bullet \{1\} = \{1\}_1$ . Stąd wartość opisanego kapitału w funkcji czasu wynosi

$$(13.23) \quad \{f(t)\} = f(0) \bullet \{e^{z(t)}\} = \{f(0) (1.2)^{t[10 > t] + 10[10 \leq t]} (1.4)^{(t-10)[10 \leq t < 15] + 5[15 \leq t]} \\ (1 - 0.5[10 \leq t]) (1 - 0.9[15 \leq t]) (1 - 2[10 \leq t < 15])\}.$$

Warto zauważyć, że w omawianym przypadku łatwiej wypisać postać hiperstopy (13.22) niż wzór (13.23) zawierający historię zmian kapitałowych. Rysunek 13.4 przedstawia wykres funkcji  $\{\frac{f(t)}{f(0)}\}$ .





Rysunek 13.4. Wykres względnej wartości kapitału  $\left\{\frac{f(t)}{f(0)}\right\}$  w funkcji czasu.

### § 10. Uwagi

Od z górą dwóch tysięcy lat używanie języka proporcji jest podstawą ilościowego opisu zarówno cen, jak i zasobów wszelkich dóbr oraz sposobów organizacji gospodarowania [Jus75]. Ekonomiczne aspekty rzeczywistości są chętnie mierzone różnego rodzaju współczynnikami. Rozdział ten próbował przekonać czytelnika, że metody rachowania ułamekami opartymi na dodawaniu i splocie stanowią obecnie potężne narzędzie metod matematycznych, choć jego proste operacje rachunkowe wymagają często zwykłych, szkolnych umiejętności.

Jak wykazano w paragrafie 3 rachunki na ułamkach zbudowanych z funkcji stałych obejmują swoim zasięgiem standardowe zagadnienia analizy matematycznej. Dlatego np. różne reprezentacje algebry stopy zwrotu możemy wyrazić przez operacje splatania z funkcją stałą  $\{1\}$  i dzielenia przez nią. Dowody twierdzeń, takich jak np. o postaci rozkładu funkcji w szereg Taylora, polegają na pojedynczych przekształceniach wyrażeń posiadających liczbowe własności. Dodatkowe uwzględnienie w rachunku Mikusińskiego elementarnej, poza jednym punktem dziedziny wszędzie stałej, funkcji skoku pozwala konstruować modele matematyczne wykraczające znacząco poza zbiór funkcji ciągłych. Możliwe jest nawet, że opisane w rozdziale 1 geometryczne modele rynku posiadają swoje uogólnienia, które w ramach analizy funkcjonalnej bazują na proporcjach funkcji kapitałowych, analogicznie jak modele geometrii skończenie wymiarowych na proporcjach cenowych, czy portfelowych.

Klasyczne metody matematyki finansowej w definicjach stopy procentowej nie uwzględniają przepływów na koncie, dlatego, chociaż przepływy kształtują stan konta, opisywane są odrębnie. Hiperstopa wyznaczana zgodnie z formułą

(13.20) zawiera pełną historię zmian kapitałowych, którą można łatwo odczytać z jej konkretnej postaci.

**Część 3**

**Rynek kwantowy**

Jeżeli ludzkie decyzje są wynikiem mikroskopowych procesów kwantowych to należy przypuszczać, że natura wykorzystwała kwantowe obliczenia w ewolucji skomplikowanych mózgów. W tym sensie rzeczywiście można powiedzieć, że komputery kwantowe rozgrywają gry rynkowe zgodnie z kwantowymi regułami.

*Gottfried J. Mayer, [com01]*

## Taktyka racjonalnego kupca

Podstawowym celem świadomej działalności gospodarczej jest optymalizacja zysku w określonym przedziale czasowym. Najczęściej przedział ów jest tak dobierany, by obejmował sobą pewien charakterystyczny cykl gospodarowania (np. rok, czas wykonania kontraktu, okres ubezpieczenia). Prognozowanie przedsięwzięcia na szerszych odcinkach czasowych jest możliwe dzięki ekstrapolacji cyklu na całą oś czasową.

### § 1. Natężenie zysku

Załóżmy możliwie najprostszą sytuację rynkową, w której analizujemy rynek jedynie dwóch towarów, z których jeden nazwiemy dobrem (i oznaczymy symbolem  $\mathfrak{G}$ ), a drugi walutą ( $\$$ ). Modelowany cykl składa się z racjonalnego (w sensie wyjaśnionym niżej) zakupu dobra  $\mathfrak{G}$  i w pełni przypadkowej jego sprzedaży (czyli zamiany na  $\$$ ). Przyjmijmy, że wielkości  $v_{\mathfrak{G}}$  i  $v_{\$}$  oznaczają określone porcje dobra i waluty. Jeżeli na rynku w chwili  $t$  dochodzi do wymiany towarów w proporcji  $v_{\$}:v_{\mathfrak{G}}$ , to wtedy liczba

$$p_t := \ln v_{\$} - \ln v_{\mathfrak{G}},$$

będąca logarytmem ceny, obrazuje bieżącą wartość kursu towaru  $\mathfrak{G}$ <sup>1</sup>. Gdy kupiec w chwili  $t_1$  nabędzie porcję dobra  $\mathfrak{G}$  po kursie  $p_{t_1}$ , które w późniejszej chwili  $t_2$  sprzeda po kursie  $p_{t_2}$ , to jego przedziałowa stopa zysku w takim cyklu wyniesie

$$(14.1) \quad w_{t_1, t_2} = p_{t_2} - p_{t_1}.$$

W kontekście rzutowej struktury geometrii rynkowej zyski ze sprzedaży czy z kupna rozważane z osobna nie posiadają charakteru niezmienniczego (niezależnego od potrzebnego do opisu zjawiska subiektywnego wyboru układu współrzędnych). Dopiero zysk  $w_{t_1, t_2}$  z pojedynczego cyklu kupna i sprzedaży

<sup>1</sup>patrz rozdział 1

(lub sprzedaży-kupna) jest logarytmem odpowiedniego dwustosunku<sup>2</sup>. Dlatego  $w_{t_1, t_2}$  jest wielkością skonstruowaną obiektywnie (niezmiennik homografii), której wartość liczbową pozbawiona jest wszelkich artefaktów (choćby takich, jak specyficzny dla algebraicznego opisu wybór jednostek określających handlowe ilości dóbr).

Problem rachunkowego opisu staje się trudniejszy, gdy czas trwania kolejnych cykli jest zmienną losową (oznaczaną dalej przez  $s$ ). Zysk na cyklu, czyli funkcja od  $s$ , będąc zmienną losową, przestaje bezpośrednio mierzyć jakość gospodarowania. W celu badania zjawisk różniących się czasem trwania, warto zdefiniować, podobnie jak w teorii kolejek [Bil87], *natężenie zysku*, będące odpowiednią miarą tej kategorii ekonomicznej.

Niech chwila  $t$  będzie początkiem trwania cyklu o długości  $s$ . Oznaczmy wartość oczekiwaną dowolnej zmiennej losowej  $v$  w jednym cyklu przez  $E(v)$ . Gdy  $E(w_{t, t+s})$  i  $E(s)$  mają skończone wartości, definiujemy natężenie zysku  $\varrho$  na jednym cyklu jako iloraz

$$(14.2) \quad \varrho_t := \frac{E(w_{t, t+s})}{E(s)}.$$

Oczekiwany przedziałowy zysk, na dowolnym odcinku czasu (np.  $[0, T]$ ), wynosi

$$(14.3) \quad \varrho_{0, T} := \int_0^T \varrho_t dt.$$

Wcześniej zdefiniowane natężenie zysku  $\varrho_t$  jest analogonem różniczkowej stopy procentowej, występującej w zagadnieniach opisywanych deterministycznie, czyli takich, w których charakterystyczne odcinki czasu nie są zmiennymi losowymi. Warto by więc i tamtą różniczkową stopę konsekwentnie nazywać natężeniem zysku. Proponowana definicja natężenia zysku jest wygodnym punktem startowym do analizowania niżej opisanego modelu działania kupca, z którego wynikające wnioski są same w sobie intrygujące, a przy tym niepozbawione praktycznego uzasadnienia.

## § 2. Model racjonalnego kupca

W prezentowanym tu modelu *racjonalnego kupca* racjonalność zakupu polega na przyjęciu przez kupującego ustalonej *ceny rezygnacji*  $-a$ , czyli takiego logarytmicznego kursu  $-a$  na dobro  $\mathfrak{G}$ , powyżej którego kupiec zaniecha nabycia dobra  $\mathfrak{G}$ . Kursy można wyznaczyć na podstawie znajomości spektrum

<sup>2</sup>wykazaliśmy to w §5 rozdz. 1

cen na  $\mathcal{G}$ , spektrum zastanego przez kupca na klasycznie pojmowanym rynku, bądź ustalonego np. przez izbę rozrachunkową, w wyniku kolejnych licytacji angielskich, czy przetargów Vickrey'a<sup>3</sup>, jak to jest przedstawiane w kolejnych rozdziałach, odwołujących się do teorii kwantowej. Przypadkową sprzedaż można postrzegać jako transakcję zbycia dobra  $\mathcal{G}$  przez kupca, w sytuacji, gdy jego cena rezygnacji z  $\mathcal{G}$  jest równa  $-\infty$  (bo zawsze wygrywa z pozostałymi uczestnikami przetargu). Taki typ strategii handlowej nazywać będziemy strategią diracowską. Uzasadnienie powyższego określenia odnajdziemy w następnym rozdziale.

Załóżmy, że konstruowany model opisuje sytuację stacjonarną, to znaczy, że rozkład prawdopodobieństwa dla zmiennej losowej  $p_t$ , opisującej kurs dobra  $\mathcal{G}$ , nie zależy od czasu. Dla czytelności opisu przyjmujemy, że rozkład ten jest rozkładem normalnym:  $\eta(p, \sigma^2) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(p-E(p))^2}{2\sigma^2}}$ . Uzasadnienie założenia takiej symetrii rozkładu dla logarytmicznej stopy zysku można znaleźć w pracy [Pio97].

Nie tracąc nic z ogólności założeń, wystarczy wyznaczać logarytmiczny kurs wymiany z dokładnością do dowolnej stałej, gdyż znaczenie posiadają dopiero zyski, które zawsze są różnicami kursów. Sytuacja przypomina posługiwanie się potencjałem w fizyce klasycznej, gdy mierzalne są jedynie różnice potencjału. Zatem przyjmijmy, że przeciętna wartość kursu  $E(p)$  jest równa 0.

Ograniczmy dalszą analizę do operacji na takim rynku wymiany towarów  $\mathcal{G}$  i  $\mathcal{S}$ , na którym rozważany kupiec działa wśród liczby podmiotów na tyle dużej, że jego indywidualne decyzje nie wpływają na notowania kursu.

*Średni czas przypadkowej transakcji* (zakupu, bądź sprzedaży, co zależy jedynie od punktu widzenia) oznaczymy przez  $\theta$ . Wielkość ta jest w modelu stała (jako konsekwencja stacjonarności) i większa od zera ( $\theta = 0$  implikuje irracjonalne paradoksy w postaci np. nieskończonych zysków w skończonym przedziale czasowym).

Dla rachunkowej wygody oznaczymy przez  $x$  prawdopodobieństwo nie dojścia racjonalnego zakupu do skutku. Stosując wprowadzoną wcześniej konwencję Iversona (str.140) mamy

$$x := E_{\sigma}([p > -a]),$$

gdzie  $\sigma$  parametryzuje rozkład prawdopodobieństwa.



<sup>3</sup>zob. [Ago96]

Oczekiwany czas racjonalnego zakupu  $\mathfrak{G}$  będzie wtedy równy

$$\theta \left( (1-x) + 2x(1-x) + 3x^2(1-x) + 4x^3(1-x) + \dots \right),$$

więc iloraz oczekiwanego czasu pełnego cyklu kupna-sprzedaży, do średniego czasu przypadkowej transakcji, wyniesie

$$\begin{aligned} \frac{E_\sigma(\mathfrak{s})}{\theta} &= 1 + (1-x) \sum_{k=1}^{\infty} k x^{k-1} = 1 + (1-x) \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \\ &= 1 + (1-x) \frac{d}{dx} \frac{1}{1-x} = 1 + \frac{1}{1-x}. \end{aligned}$$

Dlatego czas trwania cyklu wyraża się wzorem

$$(14.4) \quad E_\sigma(\mathfrak{s}) = \left( 1 + \left( E_\sigma([\mathfrak{p} \leq -a]) \right)^{-1} \right) \theta.$$

Przedziałowa stopa zysku na całym cyklu będzie równa

$$(14.5) \quad \mathfrak{w}_{t,t+\mathfrak{s}} = -\mathfrak{p}_{\rightarrow \mathfrak{G}} + \mathfrak{p}_{\mathfrak{G} \rightarrow},$$

gdzie zmienna losowa  $\mathfrak{p}_{\rightarrow \mathfrak{G}}$ , oznaczająca kurs  $\mathfrak{G}$  w trakcie zakupu, ma rozkład normalny ucięty do dziedziny  $(-\infty, -a]$ , to znaczy posiada następującą gęstość prawdopodobieństwa

$$(14.6) \quad \frac{[p \leq -a]}{E_\sigma([\mathfrak{p} \leq -a])} \eta(p, \sigma^2),$$

a  $\mathfrak{p}_{\mathfrak{G} \rightarrow}$ , czyli kurs  $\mathfrak{G}$  obowiązujący w momencie sprzedaży, ma rozkład normalny, bo sprzedaż jest, z woli kupca, całkowicie przypadkowa.

Wstawiając (14.6) do uśrednionego (14.5), a następnie (14.4) i uśrednione (14.5) do (14.2), otrzymamy poniższe wyrażenie dla natężenia zysku na pełnym cyklu:

$$(14.7) \quad \varrho_t = \frac{-E_\sigma(\mathfrak{p}[\mathfrak{p} \leq -a])}{1 + E_\sigma([\mathfrak{p} \leq -a])} \theta^{-1}.$$

Oczekiwany zysk na charakterystycznym interwale czasowym, jakim jest przeciętny okres trwania transakcji kupna-sprzedaży, wynosi

$$(14.8) \quad \varrho(a, \sigma) := \varrho_{0, \theta} = \frac{-\int_{-\infty}^{-a} p \eta(p, \sigma^2) dp}{1 + \int_{-\infty}^{-a} \eta(p, \sigma^2) dp},$$

co wynika ze wstawienia wyrażenia (14.7) na  $\varrho_t$  do definicji (14.3). Wyprowadzona formuła (14.8) na natężenie zysku kupca spełnia własność skalowania:

$$\varrho(\sigma a, \sigma) = \sigma \varrho(a),$$

gdzie  $\varrho(a) := \varrho(a, 1)$ , więc wystarczy analizę kontynuować dla standaryzowanego rozkładu normalnego, by przez przeskalowanie otrzymać wyniki we wszystkich przypadkach z  $\sigma \neq 1$ .



Najlepszą strategię działania kupca (maksymalizującą natężenie jego zysku) otrzymamy (w przypadku standardowego rozkładu normalnego) dla  $a = 0.27603$ . Co ciekawe, największa wartość natężenia zysku wynosi także 0.27603. Okazuje się, że ta zbieżność jest nieprzypadkowa i dotyczy dowolnego typu rozkładów charakteryzujących zachowanie logarytmicznego kursu. Poniżej wykazane zostanie, dlaczego taka własność zachodzi, więc dla dalszych rozważań przyjmijmy, że  $\eta(p)$  jest jakimkolwiek rozkładem gęstości, ciągłym na całej dziedzinie.

### § 3. Unikalna własność kupieckiego zysku

Oznaczmy punkt stały odwzorowania  $f(x)$  przez  $x^*$ , czyli  $x^*$  jest takim argumentem funkcji  $f(x)$ , że zachodzi równość  $f(x^*) = x^*$ .

Uzyskane w ramach naszego modelu wyrażenie na oczekiwaną wartość zysku spełnia następującą własność:

**Twierdzenie 3.1.** *Maksimum funkcji  $\varrho(a)$  znajduje się w jej punkcie stałym*

$$\max_a \varrho(a) = a^*.$$

*Punkt stały funkcji  $\varrho(a)$  istnieje, ma wartość dodatnią i jest tylko jeden. Własności te są spełnione dla dowolnego typu rozkładu gęstości kursu.*

Dowód. Warunek na punkt stały:

$$\frac{-\int_{-\infty}^{-a} p \eta(p) dp}{1 + \int_{-\infty}^{-a} \eta(p) dp} = a$$

można przekształcić do postaci

$$(14.9) \quad a \left( 1 + \int_{-\infty}^{-a} \eta(p) dp \right) = -\int_{-\infty}^{-a} (p + a) \eta(p) dp + \int_{-\infty}^{-a} a \eta(p) dp.$$

Wartość  $a$  równa jest więc pierwszemu wyrażeniu prawej strony (14.9), czyli (po zamianie zmiennej całkowania) wynosi

$$(14.10) \quad a = -\int_{-\infty}^0 p \eta(p - a) dp.$$

Pochodna prawej strony (14.10) (czyli pierwszego wyrażenia prawej strony (14.9)) po  $a$  równa jest

$$-\int_{-\infty}^{-a} \eta(p) dp,$$

więc prawa strona (14.10) jest ciągłą, nierosnącą funkcją  $a$ , dla  $a=0$  większą od zera, w granicy  $a \rightarrow \infty$  równą zeru.

Dlatego warunek (14.10) ma jedno rozwiązanie, które jest dodatnie.

Wystarczy jeszcze zauważyć, że warunek znikania pierwszej pochodnej funkcji  $\varrho(a)$ :

$$(14.11) \quad a \eta(a) \left( 1 + \int_{-\infty}^{-a} \eta(p) dp \right) + \eta(a) \int_{-\infty}^{-a} p \eta(p) dp = 0$$

jest jednocześnie warunkiem na jej punkt stały. Ten ekstremalny punkt jest globalnym maksimum, bo spełnia równania (14.10) i (14.11). Ewentualne rozwiązania równania (14.11), w postaci  $\eta=0$  (gdzie  $a \neq a^*$ ), są lokalizacjami miejsc przegięcia funkcji  $\varrho(a)$  (bo na całej dziedzinie  $\eta \geq 0$ , więc w otoczeniu punktu, gdzie  $\eta(a) = 0$ , pochodna funkcji  $\varrho(a)$  nie zmienia znaku), czyli możemy je ignorować.

Słuszność przedstawionego dowodu nie zależy od postaci rozkładu gęstości kursu, gdyż korzysta się jedynie z nieujemności i unormowania gęstości prawdopodobieństwa. Założenie o gaussowskim kształcie rozkładu jest zbędnym ograniczeniem.  $\square$

Warto zaznaczyć, że warunek (14.10) przejrzysto obrazuje, czym jest największy możliwy zysk do osiągnięcia.

Znikanie pochodnej funkcji  $\varrho(a)$  w jej punkcie stałym jest gwarancją stabilności funkcji w otoczeniu tego punktu<sup>4</sup>. Należałoby jeszcze zbadać granice obszaru przyciągania. Okazuje się, że przy stosunkowo słabych założeniach o  $\varrho(a)$  punkt stały przyciąga na całej jej dziedzinie. Dowód tego stwierdzenia polega na wykazaniu, że funkcja  $\varrho(a)$  jest ograniczona pewnym odwzorowaniem zwężającym. Jak się jednak dalej okaże istotną rolę w omawianym modelu odgrywają jedynie rozkłady gaussowskie, dla których dowód powyższego twierdzenia jest łatwy. Jego przeprowadzenie pozostawia autor czytelnikowi.

Rozkłady prawdopodobieństw dla kursu kupna i kursu sprzedaży mogą mieć różną postać (gdzie odpowiednie transakcje odbywają się na odmiennych rynkach), konieczny jest jedynie warunek, by logarytmiczny kurs kupna dobra  $\mathcal{G}$  formalnie skorygować o stałą tak, żeby 0 kursu pokrywało się z wartością oczekiwaną logarytmicznego kursu sprzedaży  $\mathcal{G}$ .

<sup>4</sup>zob. [Sch95b]

#### § 4. Dwoisty model kontrolowanej sprzedaży

Gdyby przeanalizować model analogiczny do racjonalnego kupca, lecz taki, w którym strategia, przyjęta przez kupca w trakcie kupna, byłaby zamieniona z jego strategią sprzedaży i *vice versa*, to z „przestawionego” modelu wynikałyby wnioski symetryczne do rezultatów przedstawionych w bieżącej pracy.

Formuła (14.8), opisująca oczekiwany zysk, uległaby modyfikacji do postaci

$$(14.12) \quad \varrho(b) = \frac{\int_b^{\infty} p \eta(p) dp}{1 + \int_b^{\infty} \eta(p) dp},$$

gdzie  $b$  oznacza kurs, poniżej którego kupiec zawsze rezygnuje ze sprzedaży dobra  $\mathcal{G}$ .

Taka zmiana nie wnosi nic istotnie nowego ponad cechy symetryczne do modelu racjonalnego kupca, może z wyjątkiem „kosmetycznego” uproszczenia wzoru, podającego metodę generowania funkcji posiadających maksimum w punkcie stałym.

Zastanawiające jest, że optymalne zachowanie kupca (jego taktyka), działającego w ramach modelu, polega na wyznaczeniu ceny rezygnacji o tyle niższej od średniego kursu  $\mathcal{G}$ , by różniła się dokładnie o jego przeciętny zysk, przypadający na średni okres trwania transakcji kupna-sprzedaży. Jeśli mu się to uda, wtedy niczego nie powinien już w swojej działalności poprawiać, bowiem osiągnął stan najkorzystniejszy z możliwych, niezagrożony destabilizacją, więc wymagający jedynie drobnych korekt.

Najlepszą taktyką<sup>5</sup> okazuje się być prosta i naturalna zasada, polegająca na samouzgadniającym się korygowaniu ceny rezygnacji. Istnienie takiego rodzaju mechanizmu jest pożądanym zjawiskiem na dynamicznych rynkach, gdzie rozkłady gęstości kursów podlegają nieustannym zmianom. W modelach ze skończonymi cenami rezygnacji zarówno dla transakcji kupna jak i sprzedaży powyższa prosta taktyka przestaje być optymalną. Czy jest to wskazówką, aby unikać owych dwustronnych technik handlowania?

A może jedynym tego typu spójnym logicznie modelem jest racjonalny kupiec w wersji z przypadkowym zakupem, bowiem nasuwa się podejrzenie, że rozkład gęstości kursu można poprawnie zdefiniować tylko relatywnie, względem mającej potem nastąpić sprzedaży. Wyrażenia „sprzedaż” i „kupno” też są jedynie konwencją, gdyż sprzedając  $\mathcal{G}$  nabywamy  $\$$ . W ramach przedstawionej w

<sup>5</sup>należy rozróżnić pojęcia strategii i taktyki; strategia stanowi określony sposób działania na grze, zaś taktyka (metastrategia) jest sposobem wyboru strategii [MW00]

następnych rozdziałach teorii kwantowej całkowita nieokreśloność ceny rezygnacji przy zakupie jest konsekwencją w pełni zdeterminowanej ceny rezygnacji dla sprzedaży oraz zasady nieoznaczoności Heisenberga. Ta bezpośrednio wynikająca z formalizmu kwantowego zasada stwierdza w naszym przypadku, że iloczyn miar obydwu rozważanych nieokreśloności (dyspersji) nie może być mniejszy od pewnej uniwersalnej stałej  $\hbar_E$ , zwanej przez fizyków stałą Plancka. Czytelnik, który kwestionuje zawarty w powyższym stwierdzeniu agnostycyzm, powinien pamiętać, że w całym obszarze prowadzonych eksperymentów fizycy nie zaobserwowali żadnego wyjątku od zasady Heisenberga.

Idee poszukiwania optymalnych rozwiązań i punktów stałych, to fundamenty współczesnego paradygmatu ekonomiki matematycznej. Splatają się one w takich klasycznych wynikach, jak uogólnione twierdzenie Brouwera [Kak41], czy procedura iteracyjna Browna–Robinson [Rob51]. Przedstawiona taktyka, charakteryzująca działanie racjonalnego kupca, także łączy w sobie obydwie koncepcje.

### § 5. Krzywe podaży i popytu

W literaturze ekonomicznej, włącznie z tekstami stroniącymi od formalizmu matematycznego, zwraca uwagę wszechobecność wykresów krzywych podaży, czy popytu. I tak, np. wertując poświęcony historii myśli ekonomicznej podręcznik Blauga [Bla94], odnajdziemy ponad setkę takich ilustracji.

Podczas analizowania kontekstu ekonomicznego pojawiających się w modelu racjonalnego kupca funkcji

$$F_s(x) := E_{\eta_1}([\mathfrak{J} \leq x]) = \int_{-\infty}^x \eta_1(p) dp$$

i

$$F_d(x) := E_{\eta_2}([\mathfrak{J} \geq x]) = \int_x^{\infty} \eta_2(p) dp$$

zauważymy, że wykresy tych dystrybuant można interpretować jako kolejno *krzywe podaży* i *krzywe popytu*. W tym miejscu warto przypomnieć o istnieniu w literaturze dwóch odmiennych sposobów przedstawiania wykresów podaży, czy popytu [Lan61]. Pierwszy z nich, francuski, oparty na założeniu, że popyt jest funkcją ceny, nazwiemy od twórcy tego założenia, *konwencją Cournot*. Odmiennie, przedstawiając położenie osi współrzędnych, obrazuje się podaż i popyt w piśmiennictwie anglosaskim, bazującym na tradycji zapoczątkowanej przez Marshalla. Nie zawsze popyt (czy podaż) jest funkcją monotoniczną ceny (patrz niżej, zjawisko zwracających krzywych podaży i popytu), dlatego *konwencja Marshalla* jest mniej wygodna. Brakuje jej uniwersalnej

możliwości posługiwania się językiem funkcji. Model racjonalnego kupca, z odpowiadającym cenie parametrem  $x$ , reprezentującym dziedzinę występujących w modelu funkcji, nawiązuje do konwencji Cournota. Tak więc, dla ustalonej wartości  $x$  logarytmu ceny interesującego nas dobra, wartością funkcji podaży  $F_s(x)$  jest prawdopodobieństwo możliwości kupna jednostki tego dobra za cenę  $e^x$ . Dobra sprzedają każdy, kto gotów jest zbyć go za cenę  $e^x$  lub taniej. Analogicznie interpretujemy funkcję popytu  $F_d(x)$ . W ogólności gęstości prawdopodobieństw  $\eta_1(p)$  i  $\eta_2(p)$  nie muszą być jednakowe. Efekty istnienia monopolu, specyficzne regulacje obrotu dobrem, obowiązujące podatki, czy pozaekonomiczne kulturowe przyzwyczajenia wpływają na wzajemne zróżnicowanie tych funkcji. Jeśli będziemy abstrahować od wymienionych mechanizmów i założymy ponadto, że przy dowolnym ustalonym pułapie cenowym brak jest obojętnych (względem naszego dobra) podmiotów rynkowych — każdy jeśli nie chce kupić, to na pewno sprzedaje — to dopiero w takiej sytuacji możemy stwierdzić, że  $E_{\eta_1}([\mathfrak{z} \leq x]) + E_{\eta_2}([\mathfrak{z} > x]) \equiv 1$  i, po zróżniczkowaniu stron tej tożsamości, że  $\eta_1(p) \equiv \eta_2(p)$ . Wtedy cena  $e^y$ , dla której  $E_{\eta_1}([\mathfrak{z} \leq y]) = E_{\eta_2}([\mathfrak{z} > y]) = \frac{1}{2}$ , stanowi (w klasycznym rozumieniu) cenę równowagi rynkowej. Oznacza to jedynie, że najczęściej przy tej cenie realizowany jest rynkowy obrót danym dobrem. Przypomnijmy, że model racjonalnego kupca został tak wyskalowany, by cena ta wynosiła  $e^0 = 1$ .

W przeciwieństwie do klasycznej teorii ekonomii, wymagana w modelu racjonalnego kupca równowaga rynkowa nie skutkuje jednolitą ceną (kursem) dobra  $\mathfrak{G}$ , lecz przejawia się jedynie stacjonarnością (niezależnością od czasu) funkcji podaży  $E_{\eta_1}([\mathfrak{z} \leq x])$ , lub funkcji popytu  $E_{\eta_2}([\mathfrak{z} \geq x])$ . Dlatego założenia modelu racjonalnego kupca przestają obowiązywać na rynkach, gdzie zmiany owych prawdopodobieństw zachodzą w okresach czasowych krótszych, bądź porównywalnych ze średnim czasem transakcji  $\theta$ . W takich sytuacjach nadal pozostaje aktualna wyżej przedstawiona stochastyczna interpretacja podaży i popytu. Dodatkowo w jej ramach możemy rozważać kawałkami malejące funkcje  $F_s(x)$ , czy  $F_d(x)$ . Po takim uogólnieniu przestaną już one być dystrybuantami, gdyż ich pochodne (czyli gęstości „prawdopodobieństwa”) nie spełnią warunku dodatniej określoności. Odpowiadałoby to zjawisku *zawracających krzywych popytu* lub *podaży*, występujących w kontekście dóbr Giffena (czy w sytuacjach dotyczących podaży pracy) [Var95]. Gdy stosujemy konwencję Marshalla krzywe te zawracając tracą własności funkcji. Zaś w konwencji Cournota krzywe są wykresami funkcji niejednoznacznych. Tym sposobem ujemne prawdopodobieństwa uzyskują interesującą ekonomiczną rację bytu. W fizyce własność ujemnej gęstości prawdopodobieństwa (funkcji Wignera) charakteryzuje teorie kwantowe [Fey87]. Kolejny rozdział zawiera m.in. wyjaśnienie, w jaki sposób warunkowe gęstości prawdopodobieństw mogą, na części swej dziedziny, przyjmować wartości ujemne. Poprzez wybór zgodnego z modelem racjonalnego kupca procesu stochastycznego istnieje możliwość określenia dynamiki tego

modelu, por. [Bla80]. Dlatego wydaje się, że odstępstwa od prawa popytu czy prawa podaży możemy traktować jako pierwsze znane przykłady funkcjonowania kwantowych zasad rządzących rzeczywistością na poziomie makroskopowym. Taka hipotetyczna kwantowa ekonomia, zapoczątkowana w czterdziestych latach XIX wieku zeznaniami kapitana Roberta Giffena przed brytyjskim parlamentem [Sti47], miałyby genezę wcześniejszą niż fizyka kwantowa. W następnym rozdziale poznamy zgodną z modelem racjonalnego kupca propozycję kwantowomechanicznego opisu rynku. Narzucony wymóg zgodności, polegający na dopasowaniu modeli klasycznych do kwantowej teorii, z której, w sytuacjach zaniku efektów kwantowych, powinny one wynikać asymptotycznie, fizycy nazywają *zasadą korespondencji*.

W którym momencie ziarna zaczynają tworzyć stos?

Kiedy głowa staje się łysa?

Zauważmy, że za pomocą dystrybuanty rzeczywistej zmiennej losowej możemy poprawnie opisywać wszelkie sytuacje związane z sofizmatem Zenona z Elei o „stosie ziarna” (czy z opartą na podobnej argumentacji antynomią megarejską „łysina”) [Tat78], gdyż wprowadzenie prawdopodobieństwa usuwa pierwotnie występującą w nich nieciągłość<sup>6</sup>. Dla przykładu: w zagadnieniu „słusznej moralnie ceny” przy niskich jej wartościach (stan „0”) nikt nie chce dobra sprzedać, przy wysokich (stan „1”) — sprzedawać chce każdy. Zrezygnowanie z probabilistycznego opisu skutkuje tu zero-jedynkową nieciągłością i oddaje pole argumentom sofistów, poszukującym najniższej ceny, przy której powinniśmy jeszcze mówić o stanie „1”. A sytuacja staje się tym bardziej paradoksalna, że (przynajmniej w dylemacie „słusznej moralnie ceny”) tak naprawdę, to stany „0” i „1” nie są obserwowalne — na rynku zawsze mamy do czynienia z sytuacją, gdy przy dowolnej cenie dobra (rozliczenia transakcji) zawsze ktoś chce się dobra pozbyć, a ktoś drugi wejść w jego posiadanie. Stan pośredni jest na rynku stanem typowym, a nie odkrytym przez sofistów, kłopotliwym do wyjaśnienia stanem przejściowym. Nasuwa się więc przypuszczenie, że model racjonalnego kupca może zostać zaadoptowany do innych problemów typu „stos ziarna”, w których istnieje potrzeba maksymalizacji (czy minimalizacji) parametru analogicznego do natężenia zysku.

<sup>6</sup>patrz §49 [Bor63]

## Rynkowe gry kwantowe

Wcale nie musisz się decydować, możesz pójść obydwoma drogami naraz. Z pewnością zdążyłaś się do tego przyzwyczaić. Jeśli idzie o mnie, to często robię nawet dziewięć rzeczy jednocześnie. Koty mogą hasać wszędzie, gdzie chcą, jeśli nie są obserwowane. A propos obserwacji – powiedział pośpiesznie – wydaje mi się, że zaraz zostanę zaobser...

W tym momencie kot raptownie znikł.

„Co za dziwny kot – pomyślała Alicja – i co za osobliwy pomysł. Chyba chodziło mu o tę superpozycję stanów, o której mówił Mechanik. Myślę, że to musi być coś podobnego do mojego wyjścia z banku. Jakoś udało mi się wówczas pójść w wielu różnych kierunkach, chyba więc po prostu spróbuję to zrobić jeszcze raz”.

Powyższy fragment książki Roberta Gilmore’a [Gil00] obrazowo przedstawia zaskakujące konsekwencje obowiązywania zasad mechaniki kwantowej. W historii rozwoju racjonalnych metod opisu świata pojawienie się teorii kwantów spowodowało najgłębszą zmianę paradygmatu naukowego. Zniosła ona charakterystyczny dla kartezjańskiej nauki podział na obserwującego i obserwowane, obnażając iluzję nie wpływania obserwatora na stan obiektu wystawionego na działanie pomiaru<sup>1</sup>. Nauki społeczne często posiłkują się ową cechą mechaniki kwantowej (nie odwołując się do jej samej) w trakcie przedstawiania argumentów mających uzasadnić niematematyzowalność swych teorii. To nader paradoksalne wywody, gdyż właśnie teoria kwantowa jest dziedziną fizyki najpełniej stosującym szczególnie zaawansowane techniki rachunkowe.

Ten i następne rozdziały poświęcone są futurystycznej wizji kwantowej ekonomii, której użyteczność mogą zweryfikować jedynie dalsze badania. Obszerne studium zastosowanego tu kwantowego formalizmu przedstawia np. podręcznik autorstwa jednego z jego czołowych pomysłodawców [Dir64]. Potrzebne informacje, związane z fizyką zjawisk kwantowych, zamieszczone są np. w podręczniku [BBCK91]. Przedstawienie szerokiej gamy zastosowań idei teorii gier

<sup>1</sup>w tym kontekście zob. zamieszczone w artykule [KG01] uwagi o względności pojęć przestrzeni i czasu

w ekonomii znajdziemy w opracowaniach [LR64, MWS97], zaś rolę tej teorii w kształtowaniu podstaw matematyki i racjonalnych technik badawczych unikliwie omawia artykuł [Ste69].

Historia nauki nie zna drugiego tak bezprecedensowego sukcesu jak ten, który w penetrowaniu właściwości realnego świata odniosła teoria kwantów. Dla większości fizyków jest ona ich podstawowym narzędziem. Jednak łądzi się ten kto uważa, że można zgłębić istotę kwantowej teorii rozpoczynając od studiowania podręcznika, zawierającego zapisane w precyzyjnym języku matematyki, związane aksjomaty i twierdzenia, uzupełnione uwagami interpretacyjnymi, by potem stosować ten potężny aparat w pracy badawczej. Długo jeszcze takiego dzieła nie będzie, o czym niech świadczy następująca opinia Aleksandra Grothendiecka, jednego z najbardziej przenikliwych umysłów współczesnej nauki [Gro85]: *Matematyk powinien odczuwać zmianę mechaniki Newtona na einsteinowską przykładowo tak, jak zmianę starego, wzruszającego prowincjonalnego dialektu na ostatnio modny paryski żargon. Jednak przejść do mechaniki kwantowej to to samo, co zastąpić francuski językiem chińskim.* Uprawiając tą szczyjącą się wyjątkowymi osiągnięciami dyscyplinę bardziej niż gdziekolwiek indziej skazani jesteśmy na błędzenie po omacku i to pomimo posługiwania się wyjątkowo skutecznymi narzędziami ilościowego opisu zjawisk.

## § 1. Gry rynkowe

Dla prostoty i czytelności opisu załóżmy, że interesuje nas rynek obrotu jednym typem dobra, do którego ustalonej jednostki  $1 \mathfrak{G}$  odnosimy jego cenę  $c$ , wyrażoną w jednostkach pieniężnych (np.  $1 \text{€}$ ). Przyjmijmy, że dobro  $\mathfrak{G}$  (i pieniądz  $\text{€}$ ) są dowolnie podzielne oraz, że  $k$ -ty uczestnik rynku,  $k \in \mathbb{N}$ , zwany dalej graczem, stosujący strategię (zwaną strategią czystą)  $|\psi\rangle_k$ , deklaruje udział w obrocie rynkowym całym oferowanym przez siebie kapitałem (na który składa się określony zasób  $s_k \geq 0$  jednostek dobra  $\mathfrak{G}$  i pewna ilość  $d_k \geq 0$  jednostek pieniężnych  $\text{€}$ ), a o stopniu uczestnictwa gracza w obrocie rynkowym decyduje arbiter  $\mathcal{A}$  na podstawie danych  $\{|\psi\rangle_k, s_k, d_k\}$  pochodzących od wszystkich graczy. Obecność na rynku pod postacią kilku graczy umożliwia podmiotom rynkowym obrót częściami ich kapitału. Odwrotny mechanizm pozwala uczestnikom rynku na zawieranie koalicji. Wtedy  $\mathcal{A}$  musi rozważać i rozliczać ich jako pojedynczego gracza. Kliki rynkowe modelujemy za pomocą skorelowanych strategii różnych graczy.

Arbitrem jest działająca według zdeterminowanych zasad izba rozrachunkowa, lub określony prawem czy obyczajem niezinstytucjonalizowany sposób



przeprowadzania transakcji. Arbitra  $\mathcal{A}$  możemy utożsamić ze stosowanym przez niego algorytmem rachunkowym, stanowiącym reguły gry rynkowej. Transakcje rynkowe (wyznaczające wielkości przepływów kapitałowych) przebiegają, w oparciu o zgłoszone przez graczy strategie  $|\psi\rangle_k$ , zgodnie z procedurą  $\mathcal{A}$  i określoną przez nią, jednolitą dla przeprowadzanych w jednej turze (równoczesnych) transakcji, ceną  $c$ . Wprowadzając grę równoczesną na kilku rynkach, powiązanych zależnościami pomiędzy strategiami graczy na nich operujących, możemy modelować równoczesne transakcje przeprowadzane przy niejednolitych cenach. Graczom nie muszą być znane reguły gry rynkowej. Wiedza ta jest jednak potrzebna w sytuacjach, gdy chcą oni racjonalnymi metodami wpływać na osiągnięte przez siebie wyniki.

## § 2. Kwantowy model rynku

Niech losowa zmienna rzeczywista  $q$

$$(15.1) \quad q := \ln c_q - E(\ln c_q)$$

oznacza wartość logarytmu ceny rezygnacji  $c_q$  (patrz rozdział 14), powyżej której gracz  $|\psi\rangle_k$  zaniecha kupna  $\mathfrak{G}$  i która jest tak dobrana, by wartość oczekiwana przez  $|\psi\rangle_k$  tej zmiennej  $E(q)$  była równa zero. Zmienna  $p$

$$(15.2) \quad p := E(\ln c_p) - \ln c_p$$

dotyczy analogicznej sytuacji, ale odnoszącej się nie do popytu, lecz do podaży dobra  $\mathfrak{G}$  wyrażanej strategią gracza  $|\psi\rangle_k$ , któremu przyszło zająć na rynku pozycję sprzedawcy (a nie nabywcy). Podaż dobra  $\mathfrak{G}$  można postrzegać jako popyt na pieniądz  $\mathfrak{E}$  przy cenie  $c_q^{-1}$  wyrażonej w jednostkach 1  $\mathfrak{G}$ , więc definicje (15.2) i (15.1) są równoważne. Zauważmy, że odpowiadające danej cenie  $c$  zmienne  $q$  i  $p$  są niezależne od wyboru jednostek przyjętych do określania ilości dobra  $\mathfrak{G}$ , czy  $\mathfrak{E}$ . W celu uproszczenia zapisu przyjmijmy w dalszym tekście takie jednostki, w których  $E(\ln c) = 0$ .

Zakładamy, że strategie  $|\psi\rangle_k$  (zwane też *stanami czystymi* graczy) są elementami przestrzeni Hilberta  $\mathcal{H}_k$ . Przestrzenią Hilberta  $\mathcal{H}$  nazywamy zespoloną przestrzeń liniową, w której zadano odwzorowanie  $\langle \dots | \dots \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$  zwane *iloczynem skalarnym*, posiadające dla dowolnych  $\psi, \psi', \psi'' \in \mathcal{H}$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$  następujące własności:

- $\langle \psi | \psi \rangle \geq 0$ ,
- $\langle \psi | \psi \rangle = 0 \Leftrightarrow \psi = 0$ ,
- $\langle \psi | \psi' + \psi'' \rangle = \langle \psi | \psi' \rangle + \langle \psi | \psi'' \rangle$ ,
- $\langle \psi | \lambda \psi' \rangle = \lambda \langle \psi | \psi' \rangle$ ,
- $\langle \psi | \psi' \rangle = \overline{\langle \psi' | \psi \rangle}$

i w której każdy ciąg zbieżny<sup>2</sup>  $\{\psi_n\}$  posiada swoją granicę.

W książce przyjęto tzw. notację Diraca, zgodnie z którą wektory przestrzeni Hilberta  $\psi \in \mathcal{H}$  zapisywane są wraz z „częścią” nawiasu-symbolu iloczynu skalarnego (czyli w postaci  $|\psi\rangle$ ), a wektory będące elementami specyficznej przestrzeni Hilberta  $\mathcal{L}^2$ , jaką tworzą funkcje  $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  całkowalne z kwadratem ( $\langle \psi | \psi \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\psi(x)} \psi(x) dx < \infty$ ) oznaczane są symbolami  $\langle x | \psi \rangle$  (zamiast  $\psi(x)$ ) i nazywane *amplitudami prawdopodobieństwa*. Nazwa ta posiada uzasadnienie w probabilistycznym postulacie mechaniki kwantowej, który głosi, że kwadrat modułu tej wielkości  $|\langle x | \psi \rangle|^2 dx$  jest gęstością prawdopodobieństwa pomiaru wartości  $x$  zmiennej losowej  $x$ . Stosując notację Diraca należy pamiętać, że funkcje  $\langle x | \psi \rangle$  nie są funkcjami liniowymi (co mogą sugerować własności iloczynu skalarnego). Loterie, w których rolę urn pełnią różne, wzajemnie ortogonalne (czyli  $\langle \psi_m | \psi_n \rangle = 0$  dla  $m \neq n$ ) stany czyste gracza, nazywamy *strategiami mieszanymi* (bądź stanami mieszanymi). Dzięki iloczynowi skalarnemu potrafimy dowolny stan  $|\psi\rangle$  rzutować na jednowymiarową podprzestrzeń rozpiętą przez inny stan  $|\phi\rangle$ , którą to operację, w przypadku wybrania unormowanego<sup>3</sup> wektora  $|\phi\rangle$ , możemy zapisać następująco  $\mathcal{X}_{|\phi\rangle} |\psi\rangle := \langle \phi | \psi \rangle |\phi\rangle$ . Każdy stan mieszany  $\mathcal{M}$  możemy przedstawić jako pewną kombinację wypukłą stanów czystych  $\mathcal{M} = \sum_k w_k \mathcal{X}_{|\phi_k\rangle}$ . Entropia stanu nie będącego stanem czystym jest większa od zera. *Ewolucją kwantową* nazywamy odwzorowanie liniowe  $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  nie zmieniające entropii stanu układu.

W ostatniej części tej z konieczności bardzo skrótowej dygresji o podstawowych ideach teorii kwantów wyjaśnijmy sobie czym są znane nam z podręczników „zdroworozsądkowe”, oparte na klasycznym rachunku prawdopodobieństwa modele, których większość objęta jest przez teorię kwantową (!) jako przypadki graniczne. W ramach teorii kwantowej poznajemy ograniczenia i nieścisłości tkwiące w ułomnych (dla paradygmatu kwantowego) modelach klasycznych, a ujawniające się dopiero w kontekście kwantowym. Czym jest, wyrażony w języku przestrzeni Hilberta, *obiekt klasyczny* (zwany także, w zależności od sytuacji przyrządem pomiarowym, obiektem makroskopowym, aparatem, urządzeniem itp.)? Dla naszych potrzeb wystarczy stwierdzenie, że obiekt klasyczny to taki, który może znajdować się tylko w jednym z wektorów-stanów  $\{|\Psi_n\rangle\}$ , ortogonalnych względem siebie<sup>4</sup>. Oznacza to, że obiekty klasyczne, na skutek ich złożonej budowy, czy oddziaływania z otoczeniem, mogą być znajdowane (mierzone) jedynie w tych stanach [Pen00]. Nie wchodzi więc w rachubę obserwacja (pomiar) sumy (tzw. superpozycji) ich wektorów-stanów (w tym kontekście stany czyste wolne są od niepewności, charakterystycznej dla rachunku prawdopodobieństwa), choć wtedy możemy stwierdzać istnienie odpowiednich stanów mieszanych (operatory, będące kombinacjami wypukłymi operatorów

<sup>2</sup>w indukowanej przez ten iloczyn normie, czyli  $\lim_{m,n \rightarrow \infty} \langle \psi_n - \psi_m | \psi_n - \psi_m \rangle = 0$

<sup>3</sup> $\langle \phi | \phi \rangle = 1$

<sup>4</sup> $\forall_{m \neq n} \langle \Psi_m | \Psi_n \rangle = 0$



rzutowania na stany czyste). Np. znane z klasycznej teorii gier strategie mieszane są takimi stanami. Dlatego pojawiające się w rachunkach kombinacje liniowe ortogonalnych wektorów-stanów obiektu klasycznego będziemy interpretować jako stany mieszane.

Wszystkie próby ingerencji w zjawiska kwantowe z zewnątrz mogą odbywać się jedynie za pomocą obiektów klasycznych. Między innymi wszelkie wyniki pomiarów poznajemy tylko dzięki zmianom stanów jakichś obiektów klasycznych.

W bieżącym rozdziale, gdzie rozważamy transakcje dotyczące jednoczesnego obrotu dowolną ilością dóbr, stan gry  $|\Psi\rangle_{\text{in}} := \sum_k |\psi\rangle_k$  jest wektorem należącym do sumy prostej przestrzeni Hilberta dotyczących poszczególnych graczy  $\sum_k \oplus \mathcal{H}_k$  (suma prosta przestrzeni Hilberta to ich iloczyn kartezjański z iloczynem skalarnym równym sumie iloczynów skalarnych jego składników). Działające w przestrzeniach  $\mathcal{H}_k$  hermitowskie operatory<sup>5</sup> (tzw. *observable*) popytu  $Q_k$  i podaży  $P_k$  są operatorami kanonicznie sprzężonymi (na wzór ich fizycznych odpowiedników: położenia i pędu) [BF75]. Założenie wydaje się zasadne, gdyż np. przy jednoznacznie określonej cenie  $e^{-p}$ , gdzie  $p$  jest wynikiem działania operatora  $P_k$  na jego stan własny (wektor własny), będący precyzyjnie zadeklarowaną przez  $k$ -tego gracza ofertą sprzedaży  $|p\rangle_k$ , nie ma sensu jakiegokolwiek określenie popytu zgłaszanego przez tego gracza, który dotyczyłby tej samej transakcji. Przepływy kapitałowe odnoszące się do równoczesnego zestawu transakcji przeprowadzonych na podstawie algorytmu  $\mathcal{A}$  stanowią odpowiednik procedury pomiaru zjawiska kwantowego w fizyce. Transakcja polega na przejściu stanu przyjętych przez graczy strategii  $|\Psi\rangle_{\text{in}}$  w określający przepływy kapitałowe stan  $|\Psi\rangle_{\text{out}} := \mathcal{T}_\sigma |\Psi\rangle_{\text{in}}$ , gdzie

$$\mathcal{T}_\sigma := \sum_{k_d} |q\rangle_{k_d} \langle q| + \sum_{k_s} |p\rangle_{k_s} \langle p|$$

jest operatorem rzutowym zadany rozbiem  $\sigma$  zbioru graczy  $\{k\}$  na dwa rozłączne podzbiory  $\{k\} = \{k_d\} \cup \{k_s\}$ , czyli kupujących za ceny  $e^{q_{k_d}}$  i sprzedających po cenach  $e^{-p_{k_s}}$  obowiązujących w bieżącej turze transakcji. Zadaniem algorytmu  $\mathcal{A}$  jest wyznaczenie: rozbitcia rynku  $\sigma$ , zbioru parametrów cenowych  $\{q_{k_d}, p_{k_s}\}$  i zbioru wartości przepływów kapitałowych. Te ostatnie ustalane są zgodnie z interpretacją dystrybucyjną

$$(15.3) \quad \int_{-\infty}^{\ln c} \frac{|\langle q|\psi\rangle_k|^2}{k \langle \psi|\psi\rangle_k} dq$$

jako prawdopodobieństwa tego, że przy cenie transakcyjnej  $c$  (bądź mniejszej) gracz  $|\psi\rangle_k$  ma zamiar nabyć dobro  $\mathcal{G}$  (porównaj z interpretacją krzywych popytu

<sup>5</sup> operator hermitowski to odwzorowanie liniowe o rzeczywistych wartościach własnych, z których każdą interpretujemy jako wynik pomiaru obiektu znajdującego się w stanie opisywanym odpowiednim wektorem własnym

i podaży, przedstawioną w poprzednim rozdziale). Analogicznie dystrybuanta

$$(15.4) \quad \int_{-\infty}^{\ln \frac{1}{c}} \frac{|\langle p|\psi\rangle_k|^2}{k\langle\psi|\psi\rangle_k} dp$$

jest prawdopodobieństwem sprzedaży przez  $|\psi\rangle_k$ , po cenie  $c$ , dobra  $\mathcal{G}$ . Powyższe prawdopodobieństwa mają charakter warunkowy, gdyż odnoszą się do sytuacji następującej po rozstrzygnięciu o postaci rozbicia  $\sigma$ .

### § 3. Algorytm maksymalizujący obrót kapitałowy



Grę charakteryzują zasady jej rozgrywania. Dla zilustrowania działania algorytmu  $\mathcal{A}$  rozważmy przykład deterministycznego algorytmu izby rozrachunkowej, która przyjmując założenie o jednolitej cenie transakcyjnej, maksymalizuje mierzony pieniądzem obrót kapitałowy. Izba rozrachunkowa jest w naszym kwantowym modelu obiektem klasycznym. Założenie o jednakowej dla wszystkich cenie

$$\forall_{k_d, k_s} (\mathcal{Q}_{k_d} + \mathcal{P}_{k_s})|\Psi\rangle_{out} = 0$$

jest odpowiednikiem efektu splątania stanów w zjawiskach kwantomechanicznych. Przeprowadzane przez fizyków doświadczenia ze stanami splątanymi stanowią koronny dowód, przemawiający za niemożliwością konstrukcji teorii klasycznych, które prowadziłyby do uzyskiwanych wyników pomiarowych. Inspiracją do tych badań był najsławniejszy eksperyment XX wieku, tzw. *eksperyment EPR*. Jest to jedynie eksperyment myślowy(!), którego opis znajduje się w pracy Einsteina, Podolskiego i Rosena z 1935 roku [Ein01, Ber99]. Na rynku gdzie transakcje zawierane są bezpośrednio pomiędzy dwoma kupcami powyższy warunek będzie spełniony jedynie w ramach każdej takiej pary graczy. Dla prostoty rozważań ograniczmy klasę dopuszczalnych strategii do takich, których amplitudy prawdopodobieństwa (w podręcznikach mechaniki kwantowej zwane także funkcjami falowymi)  $\langle q|\psi\rangle_k$  (i  $\langle p|\psi\rangle_k$ ) są funkcjami zmiennej  $q$  (czy  $p$ ) o nośniku zwartym, całkownymi w kwadracie. Ustalając  $\sigma$  przeskalujemy amplitudy strategii podaży i popytu otrzymując zbiory funkcji  $\langle q|\phi\rangle_{k_d}$  i  $\langle p|\phi\rangle_{k_s}$  zmiennych  $q$  i  $p$  takie, że

$$(15.5) \quad \langle q|\phi\rangle_{k_d} := \sqrt{d_{k_d}} \frac{\langle q|\psi\rangle_{k_d}}{k_d\langle\psi|\psi\rangle_{k_d}}, \quad \langle p|\phi\rangle_{k_s} := \sqrt{s_{k_s}} \frac{\langle p|\psi\rangle_{k_s}}{k_s\langle\psi|\psi\rangle_{k_s}},$$

których odpowiednie całki kwadratów ich modułów mierzą wielkość strumienia kapitałowego przypadającego na każdego sprzedającego i kupującego. Dla transakcji z ceną  $c$  maksymalny możliwy strumień przepływów kapitałowych

jest mniejszą z wartości możliwych do wykonania sumarycznych sprzedaży i zakupów

$$(15.6) \quad j(\sigma, c) := \min \left\{ \sum_{k_d} \int_{-\infty}^{\ln c} |\langle q|\phi \rangle_{k_d}|^2 dq, c \sum_{k_s} \int_{-\infty}^{-\ln c} |\langle p|\phi \rangle_{k_s}|^2 dp \right\}$$

i największą wartość osiąga dla ceny  $c^*$  stanowiącej rozwiązanie równania

$$(15.7) \quad \sum_{k_d} \int_{-\infty}^{\ln c^*} |\langle q|\phi \rangle_{k_d}|^2 dq = c^* \sum_{k_s} \int_{-\infty}^{-\ln c^*} |\langle p|\phi \rangle_{k_s}|^2 dp.$$

Jeśli rozwiązań jest więcej (jedno istnieje na pewno, gdyż całki w równaniu są funkcjami ciągłymi), możemy wybrać dowolne z nich.

Rozbicie  $\sigma^* = (k_s^*, k_d^*)$  odpowiadające największemu strumieniowi przepływów

$$j(\sigma^*, c^*) = \max_{\sigma} j(\sigma, c^*)$$

wyznacza przyrosty dobra  $\mathfrak{G}$

$$(15.8) \quad \frac{1}{c^*} \int_{-\infty}^{\ln c^*} |\langle q|\phi \rangle_{k_d^*}|^2 dq, \quad - \int_{-\infty}^{-\ln c^*} |\langle p|\phi \rangle_{k_s^*}|^2 dp$$

i pieniędzy  $\epsilon$

$$(15.9) \quad - \int_{-\infty}^{\ln c^*} |\langle q|\phi \rangle_{k_d^*}|^2 dq, \quad c^* \int_{-\infty}^{-\ln c^*} |\langle p|\phi \rangle_{k_s^*}|^2 dp,$$

u poszczególnych graczy po zakończeniu rozliczeń dotyczących pojedynczej tury. Dzięki własności (15.7) przyrosty kapitałowe (15.8) i (15.9) będą się bilansować, więc przedstawiona gra należy do szczególnie interesującej klasy gier o sumie zerowej, nie wymagającej zasilania kapitałowego i nie generującej nadwyżek kapitałowych.

Maksymalizowanie obrotu mierzonych dobrem  $\mathfrak{G}$  prowadzi do odmiennej ceny  $c^*$  i przepływów. Tą nieuzasadnioną asymetrię moglibyśmy usunąć normalizując (osobno po stronie popytu i podaży) strategię graczy, zamieniając we wzorach (15.5) odpowiednie pierwiastki wyrażeniami  $\sqrt{\frac{d_{k_d}}{\sum_{l_d} d_{l_d}}}$  i  $\sqrt{\frac{s_{k_s}}{\sum_{l_s} s_{l_s}}}$ , por. [Deu99]

(w pracy tej znajdziemy także wyjaśnienie braku konieczności stochastycznej interpretacji prezentowanej tu teorii) oraz wykonując analogiczne rachunki, tym razem nie dla strumieni kapitałowych, lecz dla strumieni prawdopodobieństw. W tym przypadku założenie o zwartym nośniku amplitud prawdopodobieństw staje się zbyteczne. Warto uczynić dygresję, że owa symetria uzasadnia przedstawianie krzywych podaży i popytu w konwencji prawdopodobieństw, a nie

strumieni kapitałowych. Inny, „bardziej kwantowy” wariant takiego algorytmu, otrzymamy realizując transakcje z wagami określonymi strumieniami analogicznymi do (15.6), dla wszystkich możliwych rozbić  $\sigma$  i cen  $c$ . Takie strumienie kapitałowe należy bilansować przy nierealizowanych nadwyżkach ofert kupna czy sprzedaży. Nowy algorytm może wyłączać gracza z uczestnictwa w transakcji. Operator transakcji, przypominający popularną w teorii pola macierz rozpraszania [Wei99], będzie miał wtedy postać  $\mathcal{T}_{\sigma\alpha} := I + \alpha_d \sum_{k_d} |q\rangle_{k_d} \langle q| + \alpha_s \sum_{k_s} |p\rangle_{k_s} \langle p|$ , gdzie  $\alpha_d, \alpha_s \in \mathbb{R}_+$ , a  $I$  jest operatorem tożsamościowym na  $\sum_k \oplus \mathcal{H}_k$ .

#### § 4. Rynek instrumentem pomiarowym

W przypadku dużej liczby graczy warto spojrzeć na dowolną kwantową grę rynkową jako na grę dwuosobową *kupiec*  $|\psi\rangle_1$  kontra *reszta świata*<sup>6</sup> (dla wygody oznaczana dalej skrótem RŚ). Możliwość wprowadzenia efektywnej strategii RŚ zależy także od postaci algorytmu  $\mathcal{A}$  (przy dostatecznie dużej liczbie uczestników gry rynkowej strategia pojedynczego kupca nie powinna mieć wpływu na postać strategii RŚ). Gdy rozważamy strategię RŚ staje się zasadna jednoczesna wypowiedź o jej stanie popytowym i podażowym, gdyż dla jednych ten syntetyczny gracz jest sprzedawcą, równocześnie dla innych będąc kupującym.

##### 4.1. Ujemne prawdopodobieństwa w ekonomii

Dla opisu tak rozumianej reakcji rynku, niezależnej od charakterystyki podmiotu podejmującego z RŚ grę rynkową, wygodnie jest przejść do formalizmu kwantowej miary gęstości pseudoprawdopodobieństwa  $W(p, q) dpdq$  na przestrzeni fazowej  $\{(p, q)\}$ , znanej w literaturze pod nazwą funkcji Wignera [Tat83]

$$(15.10) \quad \begin{aligned} W(p, q) &:= h_E^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\hbar_E^{-1} p x} \frac{\langle q + \frac{x}{2} | \psi \rangle \langle \psi | q - \frac{x}{2} \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} dx = \\ &= h_E^{-2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\hbar_E^{-1} q x} \frac{\langle p + \frac{x}{2} | \psi \rangle \langle \psi | p - \frac{x}{2} \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} dx, \end{aligned}$$

gdzie dodatnia stała  $h_E = 2\pi\hbar_E$  jest bezwymiarowym ekonomicznym odpowiednikiem stałej Plancka. Przypomnijmy, że miara ta nie spełnia (prócz pewnych niżej wymienionych wyjątków) warunku dodatniej określoności<sup>7</sup>.

<sup>6</sup>ten drugi „gracz” posiada wiele cech wspólnych z makroskopowym fizycznym instrumentem pomiarowym

<sup>7</sup>przykładowy wykres funkcji Wignera przedstawiony jest w rozdziale 16 (rysunek 16.7)

Zgodnie z wykładnią wzorów (15.3) i (15.4) wykres opisującej reakcję RŚ funkcji<sup>8</sup> będącej całką gęstości pseudoprawdopodobieństwa  $\rho(p, q) dp dq$ , która w ogólnym przypadku jest przeliczalną mieszaniną funkcji Wignera<sup>9</sup>,

$$(15.11) \quad F_d(\ln c) := \int_{-\infty}^{\ln c} \rho(p = \text{constans}, q) dq$$

i wykres funkcji<sup>10</sup>

$$(15.12) \quad F_s(\ln c) := \int_{-\infty}^{\ln \frac{1}{c}} \rho(p, q = \text{constans}) dp$$

przedstawione jednolicie na dziedzinie  $\ln c$ , możemy interpretować jako dominujące w ekonomicznym opisie rynku odpowiednio krzywe podaży i popytu, wykreślone zgodnie z konwencją Cournota. Ze względu na pojawianie się ujemnych wartości funkcji  $\rho(p, q)$  dystrybuanty pseudoprawdopodobieństwa  $F_d$  i  $F_s$  nie muszą być funkcjami monotonicznymi. Podręczniki ekonomii podają takie przykłady odstępstw od prawa podaży (podaż pracy), czy od prawa popytu (dobra Giffena) [SN89]. Strategie rynkowe, których gęstości prawdopodobieństwa  $\rho$  posiadają ujemne wartości będziemy nazywać *giffenami*.

**4.2. Kwantowy efekt Zenona** Jeżeli rynek permanentnie „mierzy” ciągle tą samą (np. popytową  $\langle q|\psi \rangle$ ) stronę strategii gracza i zjawisko to jest dostatecznie częste w skali całego rynku, to określone algorytmem  $\mathcal{A}$  ceny nie wynikają z podażowej strony strategii  $\langle p|\psi \rangle$  tegoż gracza. Jednak, tak jak w modelu racjonalnego kupca, warunkiem koniecznym wyznaczenia zysku z gry jest przejście gracza do stanu  $\langle p|\psi \rangle$ . Gdy, jednocześnie u wielu graczy, nastąpi taka podażowo-popytowa zmiana „pomiaru” ich strategii, wtedy nie odzwierciedlające „odwrotnej strony medalu” rynkowe notowania cenowe ulegną załamaniu. Powyższy, oparty na kwantowym efekcie Zenona [FGM<sup>+</sup>00], mechanizm tłumaczy zjawisko krachu giełdowego. Jednak amplitudy strategii  $\langle p|\psi \rangle$  są transformacjami Fouriera<sup>11</sup> stanów  $\langle q|\psi \rangle$ ,

<sup>8</sup>w sytuacjach, gdy strategia RŚ proponuje określoną cenę sprzedaży  $e^{-p}$

<sup>9</sup> $\rho(p, q) = \sum_n w_n W_n(p, q)$ ,  $w_n \geq 0$ ,  $\sum_n w_n = 1$

<sup>10</sup>w okolicznościach, w których RŚ proponuje określoną cenę kupna  $e^q$

<sup>11</sup>funkcję  $g(p)$  nazywamy *transformatą Fouriera* funkcji  $f(q)$ , gdy

$$g(p) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(q) e^{ipq} dq.$$

Przekształcenie odwrotne ma postać

$$f(q) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} g(p) e^{-ipq} dp.$$

Transformacja Fouriera zachowuje zupełność przestrzeni  $\mathcal{L}^2$ , gdyż

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(q)|^2 dq = \int_{-\infty}^{\infty} |g(p)|^2 dp$$

więc skutki ilościowe takiego krachu powinny być prognozowalne. Inny, obrazujący kwantowy efekt Zenona przykład rynkowy, to stabilizacja cenowa towaru sprzedawanego przez monopolistę.

### § 5. Stany czyste graczy rynkowych

Tak jak w klasycznej teorii gier, wszystkie możliwe strategie gracza tworzą dwa rozłączne zbiory. Do jednego należą strategie czyste<sup>12</sup>, którym w naszym kwantowym podejściu odpowiadają wektory przestrzeni Hilberta (a wyrażając się bardziej starannie: operatory rzutowe na kierunki wyznaczone przez te wektory). Pozostałe strategie są strategiami mieszanymi, stanowiącymi zrandomizowane zespoły strategii czystych. W kwantowym formalizmie reprezentujemy je wypukłymi kombinacjami operatorów rzutowych.

#### 5.1. Strategie z precyzyjnie określoną ceną kupna (bądź sprzedaży)

Przyjmijmy, że amplitudy strategii  $\langle q|\psi\rangle_k$  (czy  $\langle p|\psi\rangle_k$ ), które (będąc funkcjami zmiennej  $q$ ) mają nieograniczone wartości całek kwadratów modułów ( $\langle q|\psi\rangle_k \notin \mathcal{L}^2$ ), posiadają naturalną interpretację jako bezwarunkowe deklaracje gracza  $k$  zakupu (czy sprzedaży) dobra  $\mathcal{G}$  w ilości  $e^q d_k$  (czy  $s_k$ ). Tak więc strategia  $\langle q|\psi\rangle_k = \langle q|a\rangle = \delta(q, a)$  oznacza, w przypadku zakwalifikowania gracza do zbioru  $\{k_a\}$ , odmowę kupna  $\mathcal{G}$  poniżej ceny  $c = e^a$  i pełną chęć zakupu za cenę nie mniejszą niż  $e^a$ . Zaś w przypadku „pomiaru” w zbiorze  $\{k_a\}$  — chęć sprzedaży  $\mathcal{G}$  za dowolną cenę. Powyższa interpretacja zgodna jest z *relacją nieokreśloności Heisenberga*:  $\text{var}(p) \text{var}(q) \leq \frac{\hbar^2}{2}$ . Strategię diracowską (dystrybucję delta Diraca)  $\delta(q, a) \notin \mathcal{L}^2$  z nośnikiem w punkcie  $a$  możemy interpretować jako granicę ciągu strategii gausowskich  $\eta(p, a, \sigma) \in \mathcal{L}^2$  z pierwszym momentem w  $a$ , których drugi moment  $\sigma$  zmierza do zera<sup>13</sup>. Strategie  $\langle q|\psi\rangle_2 = \langle q|a\rangle$  (czy  $\langle p|\psi\rangle_2 = \langle p|a\rangle$ ) nie stosują się do opisu RŚ. Jest tak, gdyż przy spełnionym permanentnie warunku  $d_2, s_2 > 0$ , gracz 1 mógłby czerpać z gry nieograniczone zyski, wynikające z gotowości gracza 2 do sprzedaży (czy kupna) dobra  $\mathcal{G}$  za dowolną cenę.

Funkcje popytu (15.11) i podaży (15.12) są prawdopodobieństwami dojścia do transakcji w grze, w której gracz 1 posługuje się odpowiednio strategią  $\langle p|\text{constans}\rangle$  lub  $\langle q|\text{constans}\rangle$ , a RŚ, proponując ceny, używa strategii  $\rho$ . Przypomnijmy, że w poprzednim rozdziale badaliśmy skuteczność strategii  $\langle q|\psi\rangle_1 =$

(tzw. twierdzenie Parsevala), zob. [BF75].

<sup>12</sup>por. str. 227

<sup>13</sup>patrz str. 187



$\langle q| - a \rangle$  w takiej dwuosobowej grze rynkowej, gdy RŚ stosuje strategię o kwadracie amplitudy równym rozkładowi normalnemu. Maksymalna intensywność zysku  $a$ , jaki w takiej grze może osiągnąć gracz 1, równa jest 0.27603 części wariancji funkcji rozkładu gracza 2. Oczywiście analogiczne własności posiada strategia  $\langle p|\psi \rangle_1 = \langle p| 0.27603 \rangle$ . W takich grach wartość  $a = 0.27603$  jest jedynym (przyciągającym na całej dziedzinie) punktem stałym dla funkcji intensywności zysku, co może tłumaczyć powszechność rynków, na których pojedynczy klient, zastając ofertę cenową, podejmuje decyzję o zawarciu transakcji. Czyżby więc za tak dla nas naturalne zjawisko odpowiedzialne były mechanizmy kwantowe?

**5.2. Strategie adiabaticzne** W matematyce finansowej pierwsze momenty zmiennych losowych  $p$  i  $q$  mierzą oczekiwany zysk odniesiony na pojedynczej transakcji, zaś drugie momenty — transakcyjne ryzyko [EG98]. Dlatego obserwabę<sup>14</sup>

$$(15.13) \quad H(\mathcal{P}_k, \mathcal{Q}_k) := \frac{(\mathcal{P}_k - p_{k0})^2}{2m} + \frac{m\omega^2(\mathcal{Q}_k - q_{k0})^2}{2}$$

(gdzie  $p_{k0} := \frac{k\langle \psi | \mathcal{P}_k | \psi \rangle_k}{k\langle \psi | \psi \rangle_k} \neq E(\mathfrak{p}_k)$ ,  $q_{k0} := \frac{k\langle \psi | \mathcal{Q}_k | \psi \rangle_k}{k\langle \psi | \psi \rangle_k}$ ,  $\omega := \frac{2\pi}{\theta}$ ) nazwiemy operatorem skłonności gracza  $k$  do ryzyka (dokładniej: intensywności skłonności gracza do ryzyka, patrz rozdział 14). Wielkość  $\theta$  jest charakterystycznym czasem transakcji, opisanym w modelu racjonalnego kupca. Parametr  $m > 0$  mierzy asymetrię ponoszonego przez gracza ryzyka w transakcjach kupna i sprzedaży. Uwzględnienie pełnej analogii z operatorem energii kwantowego oscylatora harmonicznego [BF75] pozwala, w oparciu o ten model, scharakteryzować niektóre własności kwantowych gier rynkowych. Tak m.in. możemy zinterpretować występującą w formalizmie gier kwantowych stałą  $h_E$ . Jest ona równa minimalnej wartości skłonności gracza do ryzyka. Wynika to choćby z przedstawienia jej w postaci iloczynu najmniejszej wartości własnej operatora  $H(\mathcal{P}_k, \mathcal{Q}_k)$  i liczby  $2\theta$ . W tym miejscu należy zaznaczyć, że wielkość  $2\theta$  jest najmniejszym interwałem czasowym<sup>15</sup>, w jakim ma sens mierzenie zysku gracza.

Operator skłonności gracza do ryzyka jest przemienny z transformacją Fouriera, więc transformacja ta nie wpływa na pomiar ryzyka strategii gracza — ryzyko związane z poczynaniami rynkowymi gracza jest jednakowe, niezależnie od tego, czy zajmuje on pozycję po stronie popytu (tj. w reprezentacji  $\langle q|\psi \rangle_k$ ), czy po stronie podaży (w reprezentacji  $\langle p|\psi \rangle_k$ ). Ryzyko strategii diracowskiej<sup>16</sup> jest nieskończone(!). Ta podaźowo-popytowa jednolitość definicji ryzyka, gdy charakteryzuje ono gracza, a nie odrębnie jego techniki kupowania i sprzedawania,



<sup>14</sup>w algebrze operatorów działających na  $\mathcal{H}$  mnożenie operatorów definiujemy jako ich zsymetryzowane (więc zapewniające hermitowskość) składanie (patrz str.151), czyli np.  $\mathcal{P}^2 := \mathcal{P} \circ \mathcal{P}$

<sup>15</sup>zob. rozdz. 14

<sup>16</sup>czyli takiej, której miara gęstość prawdopodobieństwa w reprezentacji podaźowej, bądź popytowej wyraża się deltą Diraca

stanowi unikalną cechę teorii kwantowej i jest argumentem przemawiającym za jej stosowaniem.

Strategie graczy charakteryzujące się ustaloną wartością ryzyka są wektorami własnymi operatora  $H(\mathcal{P}_k, \mathcal{Q}_k)$ . Prócz stanu podstawowego oscylatora, wszystkie strategie adiabatyczne

$$H(\mathcal{P}_k, \mathcal{Q}_k)|\psi\rangle = \text{constans} |\psi\rangle$$

są giffenami [Tat83]. Może przyszłe badania, prowadzone w ramach gier kwantowych, pozwolą rozpoznać sytuacje, w których obecność na rynku takich giffenów jest dla tegoż rynku strategią optymalną.

**5.3. Skorelowane strategie koherentne** Skorelowane strategie koherentne to wektory własne dwuparametrowego operatora anihilacji  $\mathcal{C}_k$  [DKM80]

$$\mathcal{C}_k(r, \eta) := \frac{1}{2\eta} \left( 1 + \frac{ir}{\sqrt{1-r^2}} \right) \mathcal{Q}_k + i\eta \mathcal{P}_k,$$

gdzie  $r$  jest współczynnikiem korelacji  $r \in [-1, 1]$ ,  $\eta > 0$ . W strategiach tych operacje kupna  $\mathcal{Q}_k$  i sprzedaży  $\mathcal{P}_k$  są skorelowane, a iloczyn ich dyspersji, spełniający zasadę nieoznaczoności Heisenberga

$$\Delta_p \Delta_q \sqrt{1-r^2} \geq \frac{\hbar_E}{2},$$

osiąga wartość minimalną. Operator anihilacji  $\mathcal{C}_k$  i jego wektory własne możemy sparametryzować wielkościami  $\Delta_p = \frac{\hbar_E}{2\eta}$ ,  $\Delta_q = \frac{\eta}{\sqrt{1-r^2}}$  i  $r$ . Funkcja Wignera skorelowanej strategii koherentnej ma postać gaussowską:

$$W(p, q) dp dq = \frac{1}{2\pi \Delta_p \Delta_q \sqrt{1-r^2}} e^{-\frac{1}{2(1-r^2)} \left( \frac{(p-p_0)^2}{\Delta_p^2} + \frac{2r(p-p_0)(q-q_0)}{\Delta_p \Delta_q} + \frac{(q-q_0)^2}{\Delta_q^2} \right)} dp dq.$$

Strategie te nie są więc giffenami. Można pokazać<sup>17</sup>, że tworzą one zbiór wszystkich strategii czystych, posiadających dodatnio określoną funkcję Wignera. Czyli nie będące giffenami strategie czyste muszą być reprezentowane na przestrzeni fazowej  $\{(p, q)\}$  rozkładami gaussowskimi.

## § 6. Stany mieszane, strategie termiczne



Zgodnie z ideami teorii gier [vNM53], spopularyzowanymi przez jednego z twórców teorii kwantów [vN32], Johna von Neumanna, najszybszy wybór strategii otrzymamy rozważając stany mieszane  $\rho(p, q)$ . Wśród tych strategii na szczególną uwagę zasługują strategie termiczne, tj. takie, które definiuje ich stała skłonność do ryzyka  $E(H(\mathcal{P}, \mathcal{Q})) = \text{constans}$ , przy maksymalnej ich entropii.

<sup>17</sup>patrz twierdzenie Hudsona [Hud74]

Miara Wignera  $n$ -tego stanu wzbudzonego oscylatora kwantowego ma postać [Tat83]

$$(15.14) \quad W_n(p, q) dpdq = \frac{(-1)^n}{\pi \hbar_E} e^{-\frac{2H(p, q)}{\hbar_E \omega}} L_n\left(\frac{4H(p, q)}{\hbar_E \omega}\right) dpdq,$$

gdzie  $L_n$  jest  $n$ -tym wielomianem Laguerre'a. Stan mieszany  $\rho_\beta$ , wyznaczony miarami Wignera  $W_n dpdq$  stanów oscylatora kwantowego ważonych rozkładem Gibbsa  $w_n(\beta) := \frac{e^{-\beta n \hbar_E \omega}}{\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\beta k \hbar_E \omega}}$ , ma postać

$$(15.15) \quad \begin{aligned} \rho_\beta(p, q) dpdq &:= \sum_{n=0}^{\infty} w_n(\beta) W_n(p, q) dpdq = \\ &= \frac{\omega}{2\pi} x e^{-x H(p, q)} \Big|_{x = \frac{2}{\hbar_E \omega} \operatorname{tgh}\left(\beta \frac{\hbar_E \omega}{2}\right)} dpdq, \end{aligned}$$

jest więc dwuwymiarowym rozkładem normalnym. Łatwo to dostrzec wiedząc, że wyrażenie

$$(15.16) \quad \frac{1}{1-t} e^{\frac{x t}{t-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) t^n$$

stanowi funkcję tworzącą dla wielomianów Laguerre'a. Wydaje się, że rozkłady (15.15) powinny wyznaczać kształt krzywych podaży i popytu rynków w równowadze gospodarczej. Na zrównoważonym rynku nie zaobserwujemy giffenów. Interesujące byłoby badanie temperatur takich rynków. W odróżnieniu od wprowadzonych w rozdziale 5 temperatur graczy rynkowych, będących mnożnikami Lagrange'a mierzącymi jakość osiągalnych przez graczy zysków, temperatury związane z ryzykiem przyjmują jedynie nieujemne wartości. Stosując formalizm całek po trajektoriach  $q = q(\beta)$  (czy  $p = p(\beta)$ ) [Fey80] uzyskamy dla hamiltonianu (15.13) równowagowy, kwantowy analogon modelu Bacheliera dyfuzji logarytmu ceny akcji, uzupełniony stosowną formułą Blacka-Scholesa wyceny opcji europejskiej [Hul97]. Specyficzny wariant takiego opisu rynku kwantowego, nawiązujący do taktyk graczy rynkowych, odnajdziemy w rozdziale 17.

Zgodnie z analogiami termodynamicznymi, zachowanie rynku znajdującego się w równowadze powinna opisywać sparametryzowana temperatura  $T = \beta^{-1}$  strategia gaussowska, zwana dalej strategią RŚ<sup>18</sup>. Jeśli na takim rynku pojawi się gracz stosujący strategię  $|\psi_1\rangle$  o mniejszej niż rynek wariancji (temperaturze) to, posługując się taktyką racjonalnego kupca<sup>19</sup>, może on nieprzerwanie przejmować kapitał z rynku. Sytuacja taka trwać będzie dopóty, dopóki rynek sam się nie schłodzi, tj. nie zmniejszy wariancji (ryzyka) własnej strategii. Rywalizacja jest więc mechanizmem powodującym przepływy ryzyka, który

<sup>18</sup>patrz §4 rozdz. 18

<sup>19</sup>omówionym w rozdziale 14



pozwala wyjaśniać proces dochodzenia rynku do równowagi termodynamicznej. Ciepleszy rynek działa destrukcyjnie na chłodniejszych od siebie kupców (zwiększają wariancje własnych strategii przy poszukiwaniu maksimum zysku), zaś oni wpływają na zmniejszenie wielkości nieoznaczoności rynkowej ceny. Takie wyrównywanie się temperatur uczestników gry rynkowej zbliża ich do nowego stanu równowagi.

---

### § 7. Rynek rozliczany komputerem kwantowym



Z góry nie znający strategii graczy algorytm  $\mathcal{A}$ , prowadzący rachunki w ramach ośrodkowych przestrzeni  $\mathcal{H}_k$ , musi arbitralnie narzucać w nich postać bazy. Wtedy ciągi reprezentujące amplitudy strategii graczy mogą być dowolnie długie, a więc algorytmów  $\mathcal{A}$  należy poszukiwać w klasie NP (algorytmy sprawdzające poprawność przeprowadzonych rachunków z naturalnych względów winny mieć wielomianową złożoność). Z tej przyczyny powstanie nowych rynków, dokonujących szybkich rozliczeń opartych na formalizmie kwantowym, stanie się realne dopiero w ramach technologii obliczeń kwantowych. Może taki arbitraż rynkowy, prowadzony za pomocą komputera kwantowego<sup>20</sup>, jest wykonywalny jedynie przy jednoznacznej odpowiedniości pomiędzy stałą  $\hbar$  a jej ekonomicznym odpowiednikiem? Koncepcje Rogera Penrose'a [**Pen00**] dotyczące mechanizmu myślenia uzasadniają poszukiwanie nowych fizycznych(!) zjawisk kwantowych (np. giffenów) na rynkach gospodarczych, gdzie algorytmy  $\mathcal{A}$  oparte są obecnie na regułach nieobliczeniowych. Czy zeznania kapitana Roberta Giffena przed brytyjskim parlamentem<sup>21</sup> (lata czterdzieste XIX wieku) były pierwszym w historii opisem fenomenu kwantowego? Rynkowy mechanizm wymiany stał się inspiracją sformułowania transakcyjnej interpretacji mechaniki kwantowej [**Cra86**]. Dlaczego powszechnie akceptowany przez fizyków uniwersalizm teorii kwantowej nie skłania ich do poszukiwań jej śladów wśród zjawisk społecznych?

---

<sup>20</sup>zob. [**Mil00**]

<sup>21</sup>zob. [**Sti47**]

## Interferencja strategii rynkowych

### § 1. Taktyki zmieniające popyt

W rozdziale 15 została przedstawiona teoria kwantowa, która odniesiona do rynku wyjaśnia m.in. mechanizm dochodzenia do równowagi, czy wskazuje przyczyny gwałtownych zmian cen rynkowych. Strategie graczy zawierających transakcje reprezentowane są amplitudami prawdopodobieństwa. Dystrybuanty- całki kwadratów modułów tych amplitud mają naturalną interpretację krzywych podaży, czy popytu. Taki obraz rynku powinniśmy uzupełnić jego dynamiką, określoną taktykami graczy, czyli unitarnymi operacjami na przestrzeni Hilberta strategii  $\langle q|\psi\rangle \in L^2$ , którymi gracze modyfikują swoje sposoby zachowań rynkowych. Podstawową taktyką jest tu transformacja Fouriera<sup>1</sup>, która amplitudę-strategię podażową przekształca w strategię popytu i vice versa. Inne taktyki pozwalają modyfikować popyt gracza. Spośród nich interesować nas będą tylko te, które dotyczą superpozycji strategii, z których każda z osobna posiada niezmienny obraz podaży-popytu, jednak pełna ich superpozycja prowadzi do nowego stanu czystego, którego nie sposób zredukować do wypukłej kompozycji składników. Jest to specyficzny efekt kwantowy, nieuwzględnialny przez klasyczny rachunek prawdopodobieństwa. Pojawia się on, gdy stany-komponenty superpozycji nie są ortogonalne, czyli nie odpowiadają żadnym parom strategii gracza klasycznego.

Taktyką nie wpływającą na podaż<sup>2</sup> jest liniowa operacja przesunięcia popytu o wartość  $\Delta$ <sup>3</sup>

$$(16.1) \quad \mathcal{D}_\Delta \langle q|\psi\rangle := \langle q - \Delta|\psi\rangle.$$

<sup>1</sup>patrz przypis na str. 233

<sup>2</sup>komutującą z operatorem  $\mathcal{P}$

<sup>3</sup>dla potrzeb tego rozdziału zrezygnujemy w definicjach (15.1) i (15.2) zmiennych  $q$  i  $p$  z odpowiednich przesunięć tych parametrów o wartość oczekiwaną logarytmu ceny  $E(\ln c)$ , które o tak nie ma znaczenia w sytuacjach, gdy rozważamy potem zmienną losową  $q+p$

Warto zauważyć, że, w aspekcie podaźowym, skutkuje ona jedynie zmianą fazy strategii-transformaty Fouriera  $\langle p|\psi\rangle \rightarrow e^{i\hbar^{-1}\Delta p}\langle p|\psi\rangle$ , więc nie ma wpływu na kształt krzywej podaży gracza. Kwantowomechaniczny formalizm umożliwia opis gry rynkowej prowadzonej za pomocą rodziny taktyk<sup>4</sup>

$$\mathcal{D}_\Delta(\xi_0, \xi_1) := \xi_0\mathcal{I} + \xi_1\mathcal{D}_\Delta,$$

gdzie pary  $(\xi_0, \xi_1)$  są jednorodnymi zespolonymi współrzędnymi rzutowymi punktów na sferze Riemanna<sup>5</sup>  $S_2 \simeq \mathbb{C}P^1 \simeq \overline{\mathbb{C}}$ , a  $\mathcal{I} = \mathcal{D}_0$  jest odwzorowaniem tożsamościowym. Bieguny  $(1, 0)$  i  $(0, 1)$  odpowiadają kolejno odwzorowaniu tożsamościowemu samej wyjściowej strategii-wzorca oraz przesunięciom jej powielonego egzemplarza. Nie leżące na biegunach punkty sfery  $S^2$  parametryzują wszystkie możliwe superpozycje dwóch egzemplarzy wyjściowej strategii. W tej grupie składanie taktyk transformujących wyjściową strategię  $\langle q|\psi\rangle$  definiujemy następująco:

$$\mathcal{D}_{\Delta'}(\xi'_0, \xi'_1) \circ \mathcal{D}_{\Delta''}(\xi''_0, \xi''_1) := \mathcal{D}_{\Delta'+\Delta''}(\xi'_0 \cdot \xi''_0, \xi'_1 \cdot \xi''_1).$$

Operacja ta jest przemienna. Przejście ze stanu opisywanego pojedynczym rozkładem normalnym do superpozycji takich strategii nie jest operacją unitarną, jednak taktyki  $\mathcal{D}_\Delta(\xi_0 \neq 0, \xi_1 \neq 0)$  manipulujące współczynnikami utworzonej superpozycji, czy szerokością  $\Delta$  rozstawienia jej gaussowskich składników są unitarne, warto więc zamiast taktyk  $\mathcal{D}(1, 0)$  i  $\mathcal{D}_\Delta(1, 0)$  rozważać ciągi transformacji strategii zbieżne w granicy do tych biegunów. W ramach rodziny taktyk  $\{\mathcal{D}_\Delta(\xi_0, \xi_1)\}_{\xi_0, \xi_1 \neq 0}$  prześledzimy proces zmiany popytu (i odpowiadającej mu podaży), w którym pojawiają się efekty interferencji strategii. Przedstawiają one zachowania gracza odbiegające od standardu wyznaczonego prawem popytu. Różne strategie rynkowe możemy utożsamiać z zachowaniami gracza odnośnie ceny danego dobra, występującymi przy odmiennych stanach jego wiedzy, czy podświadomości. Wtedy superponowanie strategii możemy interpretować jako pojawienie się różnego typu wzajemnych sprzężeń pomiędzy występującymi jednocześnie zespołami odmiennych stanów gracza. Często podczas zmiany naszych poglądów i charakterystycznych zachowań stare i nowe stany naszej ewoluującej osobowości koegzystują ze sobą w różnego rodzaju relacjach. Gdy brak jest owej koegzystencji, to takie schizofreniczne stany prowadzą do zachowań społecznie nieskutecznych.

<sup>4</sup>dbałość o unitarność odwzorowania nakazuje unormowanie jego wartości, jednak wymóg ten będzie spełniony, gdy nie zapomnimy o właściwym unormowaniu krzywych popytu, czy podaży

<sup>5</sup>szerszy opis tej struktury matematycznej czytelnik odnajdzie na początku kolejnego rozdziału, z tą różnicą, że tam bieguny sfery odpowiadają stanom ortogonalnym, zaś tu odnoszą się do strategii z  $L^2$ , których iloczyn skalarny jest różny od zera

§ 2. Efekty taktów  $\mathcal{D}_\Delta(\xi_0, \xi_1)$  dla strategii gaussowskiej

Interesuje nas gracz uczestniczący w grze opisywanej teorią kwantową, która polega na kupnie (bądź sprzedaży) ustalonego dobra rynkowego. Zajmiemy się jego czystymi strategiami adiabatycznymi. Takie ograniczenie usprawiedliwia fakt, iż w rzeczywistości rynkowej skłonność do ryzyka zdaje się stanowić cechę charakteru gracza, więc dla pojedynczego uczestnika rynku jest ona stała na znacznych przedziałach czasowych. Gracz dysponuje więc gaussowską strategią-wzorcem, która wyraża się pierwiastkiem standaryzowanego rozkładu normalnego  $\langle q|\psi\rangle_g := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{q^2}{4}}$ , określonego na dziedzinie stanowiącej logarytm ceny, powyżej której gracz rezygnuje z nabycia oferowanego mu dobra<sup>6</sup>. Istniejąca dowolność wyboru tak jednostki pieniężnej, jak i podstawy logarytmu pozwala przyjąć, że pierwsze dwa momenty rozkładu  $|\langle q|\psi\rangle_g|^2$  są równe kolejno  $q_0=0$  i  $\sigma=1$ . Przypomnijmy tu (patrz rozdział 14) że strategia gaussowska jest w teorii kwantowej jedyną strategią, która spełnia prawa popytu i podaży. Niech nasz gracz operuje taktą należącą do rodziny  $\{\mathcal{D}_\Delta(z) := \mathcal{D}_\Delta(\xi_0, \xi_1)\}$ . Skracając notację przyjmijmy opis punktów sfery Riemanna przy pomocy rzutowej współrzędnej niejednorodnej  $\frac{\xi_1}{\xi_0} =: z \in \mathbb{C}$ . W wyniku zastosowania taktów  $\mathcal{D}_\Delta(z)$  strategia gaussowska zostaje zastąpiona strategią, będącą superpozycją strategii gaussowskich

$$e^{-\frac{q^2}{4}} \longrightarrow e^{-\frac{q^2}{4}} + z e^{-\frac{(q-\Delta)^2}{4}}$$

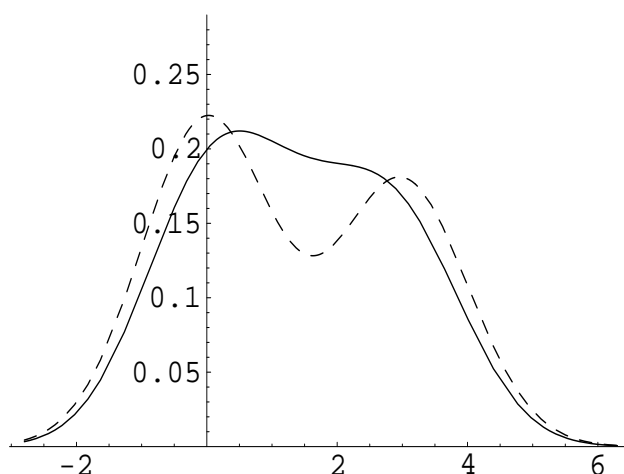
Na kolejnych rysunkach porównamy popyt gracza wyrażający się gęstością prawdopodobieństwa  $|\mathcal{D}_\Delta(z)\langle q|\psi\rangle_g|^2$  z gęstością<sup>7</sup>

$$(16.2) \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{1}{1+|z|^2} e^{-\frac{q^2}{2}} + \frac{|z|^2}{1+|z|^2} e^{-\frac{(q-\Delta)^2}{2}} \right),$$

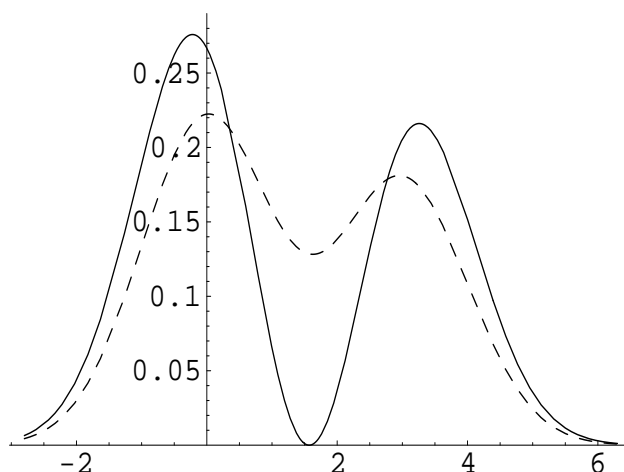
z jaką mielibyśmy do czynienia w sytuacji teorii klasycznej, która powinna traktować rozsunięte strategie gaussowskie jako mieszaninę stanów ortogonalnych i w ten sposób pomijać efekty interferencji. Dla  $\arg(z)=0$  w wyniku interferencji obserwujemy największe zlanie się dwóch krzywych gaussowskich, które poza tym ulegają pewnemu wzajemnemu przyciąganiu. Rysunek 16.1 ilustruje tę sytuację dla  $\Delta=3$  i  $z=0.9$ . Dla unaocznienia skali efektów kwantowych odpowiednia suma dwóch strategii gaussowskich pozbawiona składnika interferencyjnego (16.2) na tym i na następnych rysunkach przedstawiona jest krzywą przerywaną. Skrajnym przeciwieństwem tego przykładu jest sytuacja, gdy  $\arg(z)=\pi$ . Obrazuje ją rysunek 16.2. Teraz, jedynie po zmianie fazy parametru  $z$ , dzwony

<sup>6</sup>czyli logarytm ceny rezygnacji, patrz str. 216

<sup>7</sup>w teorii kwantowej taki typ gęstości występuje w przypadkach taktów  $\mathcal{D}_\Delta(z)$ , dla których  $z$  jest liczbą urojoną ( $\arg(z) = \pm \frac{\pi}{2}$ )



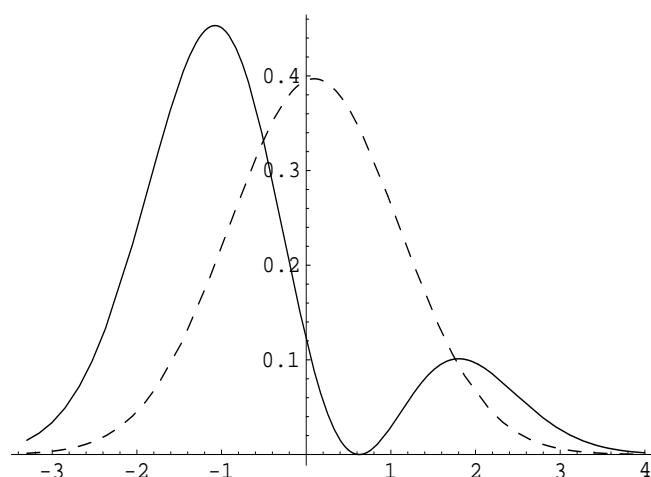
Rysunek 16.1. Konstruktywna interferencja dwóch strategii gaussowskich będących efektem taktyki  $\mathcal{D}_3(0.9)$ . Krzywa przerywana odpowiada taktyce  $\mathcal{D}_3(\pm 0.9i)$ .



Rysunek 16.2. Destruktywna interferencja dwóch strategii gaussowskich dla taktyki  $\mathcal{D}_3(-0.9)$ . Krzywa przerywana odpowiada taktyce  $\mathcal{D}_3(\pm 0.9i)$ .

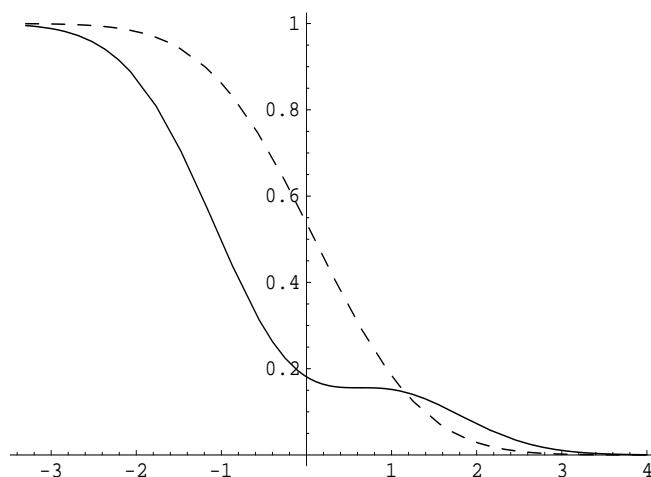
pochodzące od superpozycji krzywych Gaussa są w pełni odseparowane. Interferencja jest także przyczyną ich wzajemnego odpychania. Wpływ interferencji nasila się, jeżeli zmniejszymy rozstęp pomiędzy gaussowskimi komponentami. Rysunek 16.3 przedstawia taką sytuację, gdy krzywe Gaussa o bardziej niż poprzednio zbliżonych wysokościach ( $z = -\sqrt{0.9}$ ) praktycznie nachodzą na siebie ( $\Delta = 0.2$ ). Mimo to destruktywna interferencja doskonale uwydatnia różnicujące je cechy. Krzywe całkowite rozkładów gęstości prawdopodobieństwa z rysunku





Rysunek 16.3. Destruktywna interferencja „rozpychająca” dwie nachodzące na siebie strategie gaussowskie o zbliżonej wysokości – taktyka  $\mathcal{D}_{0.2}(-\sqrt{0.9})$ . Krzywa przerywana odpowiada taktyce  $\mathcal{D}_{0.2}(\pm\sqrt{0.9}i)$ .

**16.3** (czyli dystrybuanty, jeśli uwzględnić dziedzinę w odwrotnym porządku) przedstawia rysunek 16.4. Zgodnie z zamieszczoną w rozdziale 15 rynkową interpretacją kwantowej teorii obrazują one wpływ efektów kwantowych (interferencyjnych) na kształt krzywej popytu wyznaczonej dla taktyki  $\mathcal{D}_{0.2}(-\sqrt{0.9})$ .



Rysunek 16.4. Zmiana krzywej podaży spowodowana kwantowym efektem interferencyjnym z rysunku 16.3.

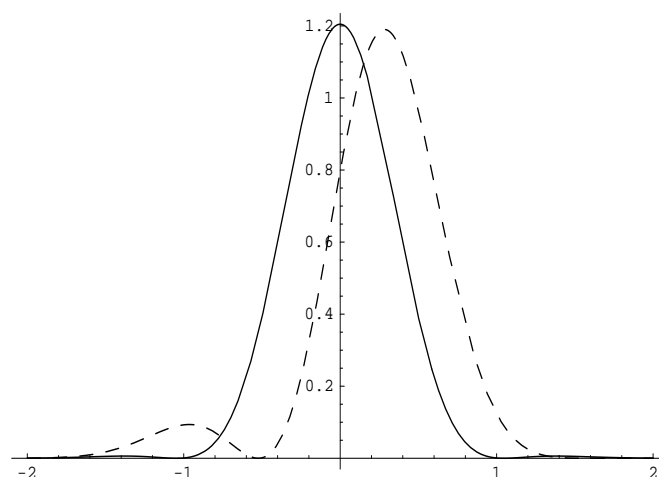
### § 3. Transformacja Fouriera obrazów taktyk $\mathcal{D}_\Delta(z)$

Analizowaliśmy popyt wynikający ze strategii, która w reprezentacji popytowej jest superpozycją strategii gaussowskich. Charakterystyka strategii przy pomocy kwadratów modułów amplitud prawdopodobieństwa, a nie samych amplitud, jest niekompletna. Dlatego warto dopełnić ją opisem tej samej strategii, lecz w odniesieniu do jej aspektu podażowego. Prezentowany w bieżącej części książki kwantowy opis rynku wymaga postrzegania kupca (gracza) jako podmiotu rynkowego, który zgodnie z reprezentacją popytową  $\langle q|\psi\rangle$  swojej strategii  $|\psi\rangle$  nabywa określone dobro i konsumując je (lub przetwarzając, bądź pozostawiając je nieprzetworzonym), osiąga użyteczność (czy zysk) określony operatorem  $\mathcal{Q} + \mathcal{P}$ . Nie  $\mathcal{Q}$ , lecz dopiero ta obserwacja jest niezależna od wyboru jednostki pieniężnej, mierzącej cenę transakcyjnego dobra. Gęstość miary prawdopodobieństwa podażowej zmiennej losowej  $p$  wyznacza kwadrat modułu reprezentacji podażowej  $\langle p|\psi\rangle$  tej samej strategii  $|\psi\rangle$ , w oparciu o którą dobro zostało nabyte! Strategia  $|\psi\rangle$ <sup>8</sup> wyraża więc pełny stosunek gracza do rynku. Niezależne traktowanie aspektów podażowych i popytowych zachowań występujących na rynku jest niezgodne z opisem kwantowym. Co się tyczy efektu interferencji, to taktyki  $\mathcal{D}_\Delta(z)$  nie są przemienne z transformacją Fouriera, nie jest więc obojętne w którym z obrazów – podażowym, czy popytowym – gracz wykonuje superpozycję strategii. Gęstość prawdopodobieństwa podaży dla strategii będących superpozycją popytową strategii gaussowskich przy czterech różnych wartościach ich względnej fazy, czyli kąta  $\arg(z)$ , ilustrują rysunki 16.6 i 16.5. W przypadku gracza-pośrednika handlowego pochodną dystrybucyjną możemy interpretować jako intensywność sygnału sprzedaży, który gracz kieruje w stronę rynku, gdy zamierza zbyć zakupione wcześniej dobro<sup>9</sup>. Zauważamy, że manipulowanie fazą pozwala na zróżnicowany wybór zachowań kupieckich, cechujących podażowy aspekt taktyk  $\mathcal{D}_\Delta(z)$ . Taktyka z  $\arg(z) = 0$  posiada wyraźnie zlokalizowany sygnał sprzedaży (rys. 16.5), w przeciwieństwie do dwóch równorzędnych maksimum sygnału sprzedaży taktyki z  $\arg(z) = \pi$ . Dla  $\arg(z) = \frac{3}{2}\pi$  (rys. 16.5) wraz z maleniem ceny<sup>10</sup> sygnał kupna wprawdzie pojawia się dość ostrożnie, by po dalszym spadku wystąpić po raz drugi, tym razem już bardziej zdecydowanie. Odwrotna sytuacja zachodzi dla  $\arg(z) = \frac{1}{2}\pi$  (rys. 16.6). Zwróćmy tu uwagę, że dopiero pomiar dotyczący zmiennej losowej  $p$  pozwala rozróżnić strategie  $\mathcal{D}_3(i)$  i  $\mathcal{D}_3(-i)$ .

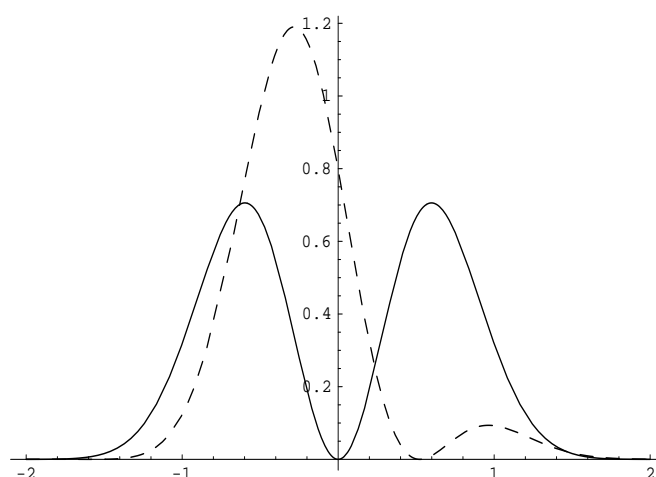
<sup>8</sup>reprezentowana funkcją  $\langle q|\psi\rangle$  lub jej transformatą  $\langle p|\psi\rangle$

<sup>9</sup>gra rynkowa różni się nieco w zależności od tego, czy gracz zgłasza chęć kupna, czy akceptuje napotkaną cenę dobra – analizie tego zagadnienia poświęcone będą następne rozdziały książki

<sup>10</sup>zmienna  $p$  została tak dobrana, że maleje wraz ze wzrostem jednostkowej ceny dobra, str. 227



Rysunek 16.5. Gęstość prawdopodobieństwa dla transformat Fouriera obrazów taktyków  $\mathcal{D}_3(1)$  (krzywa ciągła) i  $\mathcal{D}_3(-i)$  (krzywa przerywana).



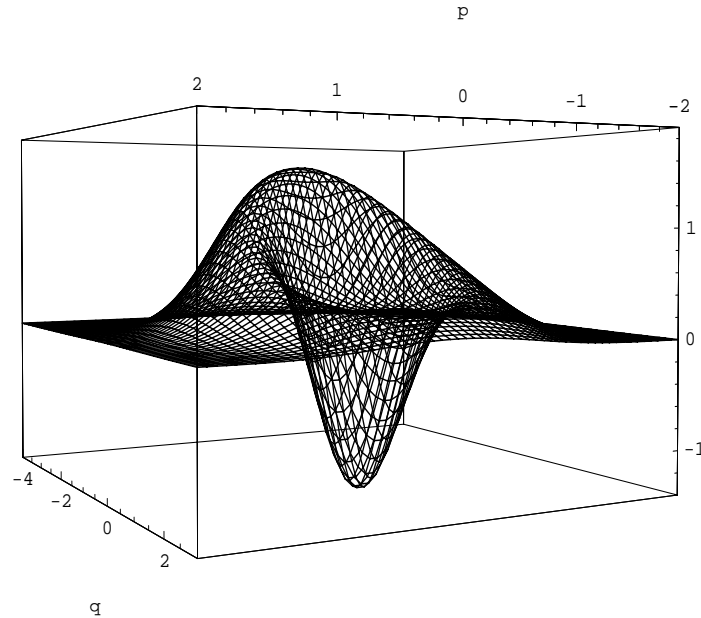
Rysunek 16.6. Gęstość prawdopodobieństwa dla transformat Fouriera obrazów taktyków  $\mathcal{D}_3(-1)$  (krzywa ciągła) i  $\mathcal{D}_3(i)$  (krzywa przerywana).

§ 4. *Popyt warunkowy*

Interesujące jest badanie różnych aspektów strategii wykorzystujące ich przedstawienie na dziedzinie przestrzeni fazowej<sup>11</sup>  $\{p, q\}$  przy pomocy wprowadzonej

<sup>11</sup>patrz str. 232

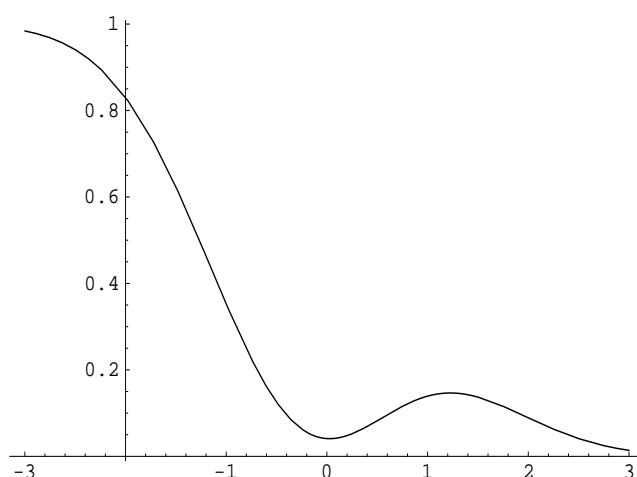
w rozdziale 15 funkcji Wignera. Dla określonego stanu czystego  $|\psi\rangle$  tą funkcję gęstości pseudoprawdopodobieństwa wyliczamy przy pomocy formuły (15.10). Rysunek 16.7 to wykres funkcji Wignera, przedstawiający zachowania gracza operującego taktyką rynkową  $\mathcal{D}_{0,2}(-\sqrt{0.9})$ . Dołek na wykresie o kształcie asy-



Rysunek 16.7. Wykres funkcji Wignera dla taktyki  $\mathcal{D}_{0,2}(-\sqrt{0.9})$ .

metrycznego krateru opada poniżej wartości 0, co jakościowo różni funkcję Wignera od rozkładów gęstości podaży-popytu dla modeli sformułowanych w ramach klasycznego rachunku prawdopodobieństwa, gdzie miara prawdopodobieństwa musi zostać dodatnio określona. Przekrój powierzchni wykresu płaszczyzną  $p = \text{constans}$  obrazuje gęstość prawdopodobieństwa warunkowego, stanowiącego miarę prawdopodobieństwa dla ceny rezygnacji gracza kupującego w sytuacjach, gdy jego cena<sup>12</sup> rezygnacji przy sprzedaży tego dobra jest stała. Przekroje przechodzące przez ujemne wartości funkcji Wignera są charakterystyczne dla sytuacji strategii-giffenów. Odpowiednie całki z tych krzywych przedstawiają w pełni racjonalne sytuacje, w których popyt (czy podaż) przestaje być funkcją monotoniczną. Przykład takiej reakcji gracza (może być nim reszta świata) obrazuje rysunek 16.8. Paradoks braku własności monotoniczności krzywej popytu (czy podaży) okazuje się tu jedynie konsekwencją chęci odpowiedzi na pytania związane z prawdopodobieństwem warunkowym, dotyczącym dowolnej strategii niegaussowskiej. W tym kontekście warto zadać sobie pytanie, czy legendarny kapitan Giffen, obserwując sprzeczną z prawem popytu anomalie rynkową, zarejestrował zaskakujący (choć posiadający wyjaśnienie)

<sup>12</sup>w przypadku konsumenta powinniśmy mówić raczej o użyteczności, a nie o cenie



Rysunek 16.8. Niemonotoniczny popyt warunkowy dla taktyki  $\mathcal{D}_{0.2}(-\sqrt{0.9})$  (krzywa całkowa przekroju powierzchni z rysunku 16.7 płaszczyzną  $p = 0.4[\frac{\hbar E}{\sigma}]$ ).

popyt, który zmalał po spadku ceny, czy jedynie uchwycił zmianę pomiędzy dwoma standardowymi<sup>13</sup> krzywymi popytu, która zachodziła na rynku przy destruktywnej interferencji, będącej efektem ostrożnej transformacji popytu, charakterystycznej dla roztropnego (więc racjonalnie działającego), lecz ubogiego konsumenta. Autor skłania się ku tej ostatniej odpowiedzi. Ma ona przewagę dzięki swej większej falsyfikowalności [Pop77], będącej konsekwencją precyzyjnie wyznaczonej przez teorię kwantową ilościowej predykcji odnośnie takiego zjawiska.

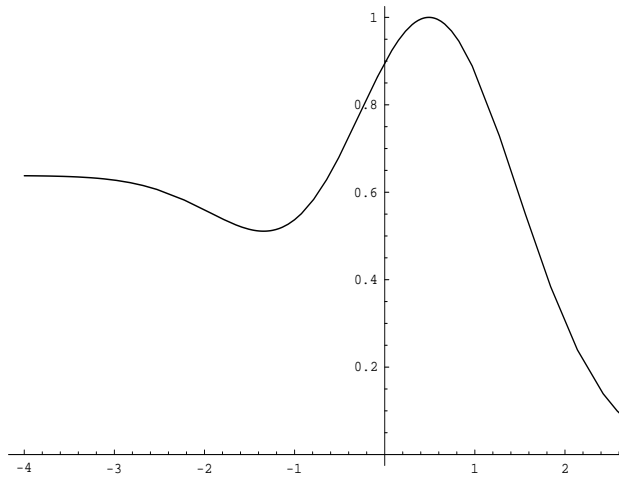
Wyżej scharakteryzowany został przypadek niemonotonicznego warunkowego popytu dla interferujących strategii gaussowskich. Przypomnijmy, że cecha ta jest właściwa wszystkim strategiom niegaussowskim. Dlatego ważnym wydaje się poszukiwanie warunków gry rynkowej, w których strategie opisane rozkładami normalnymi nie prowadzą do maksymalizacji wartości natężenia zysku. Mogą one wyjaśnić okoliczności, w których natykamy się na strategie-giffeny. Uważny czytelnik z pewnością dostrzegł prócz niemonotoniczności inną paradoksalną cechę krzywych całkowych niektórych przekrojów wykresów funkcji Wignera. Posiadają one globalne maksima dla skończonych wartości parametru  $q = q_{\max}$  (np. dla powierzchni z rys. 16.7, z przeciwną orientacją osi  $p$ ). Oznacza to, że istnieje niezerowa cena dobra  $e^{\frac{q_{\max}-q_0}{\sigma}}$ , poniżej której gracz bezpowrotnie traci duże zainteresowanie jego kupnem.

<sup>13</sup>zgodnymi z prawem popytu

Na przykład w kapryśnym świecie mody często obserwujemy tego typu zachowania rynkowe, znają je także dobrze posiadacze akcji śmieciowych. Przykład takiej krzywej warunkowego popytu przedstawia rysunek 16.9. Gdyby, przy nie zmieniającej się taktyce gracza, spadła odpowiednio jego ocena użyteczności dobra, a co za tym idzie, uległa zmianie wartość parametru  $p$ , to nowy przekrój byłby pozbawiony tej anomalii. To ciągle podtrzymywane zwodnicze nadzieje co do wartości cenowej dobra zachowują ją, tylko z pozoru sprzeczną z oczekiwaniami sytuacji popytową.



Obydwa rozważane w tym paragrafie zjawiska odstępstwa od prawa popytu



Rysunek 16.9. Niemonotoniczny popyt warunkowy z maksimum dla niezerowej wartości ceny. Taktyka  $\mathcal{D}_{0,2}(-0.9^{-\frac{1}{2}})$  (krzywa całkowa przekroju powierzchni z rysunku 16.7 płaszczyzną  $p = -0.2[\frac{\hbar E}{\sigma}]$ ).

(jak i inne paradoksalne własności) znikają, jeśli przekroje wycałkować po parametrze  $p$ . Uzyskana w ten sposób bezwarunkowa dystrybuanta popytu, będąc całką kwadratu modułu funkcji  $\langle q|\psi\rangle$ , spełnia już właściwe jej prawo.

Powyższe rozważania wykazały, że superpozycja elementarnych strategii kwantowych posiada własności znane z obserwacji rynku. Modelowanie takich zachowań w ramach tradycyjnego rachunku prawdopodobieństwa byłoby niemożliwe z tych samych powodów, dla których fizycy kiedyś zmuszeni zostali do odrzucenia klasycznego obrazu świata. W takim kontekście wydaje się oczywiste, że np. projektanci software'u, automatycznie obsługującego współczesne rynki kapitałowe, prędzej, czy później staną przed koniecznością skorzystania z

kwantowych modeli gier rynkowych. Warto więc uczynić kilka uwag odnośnie unikalnej skuteczności, jaka cechuje taktyki kwantowe.

---

### § 5. Samouzgadniająca się taktyki nieliniowe

W rozdziale 14 analizowaliśmy nieliniową taktykę  $\mathcal{D}_{E(q)}$  operującą na diracowskiej strategii, którą możemy postrzegać jako granicę strategii gaussowskich dla  $\sigma \rightarrow 0$ . Dzięki unikalnej własności, ujętej na stronie 219 w tezie twierdzenia o punkcie stałym, okazała się ona metodą maksymalizacji zysku w grze rynkowej, w której reszta świata, znajdująca się w polaryzacji<sup>14</sup> zmuszającej do przedstawiania ofert cenowych, przyjmuje pasywną taktykę  $\mathcal{I}$  na własnej strategii gaussowskiej. Taktyka  $\mathcal{D}_{E(q)}$  wymaga pomiaru średniej  $E(q)$ , więc nie można jej stosować w pojedynczej grze. Jednakże w sekwencji jednakowych gier, gdy partner zachowuje się pasywnie, potrafimy na podstawie minionych potyczek aproksymować parametr  $E(q)$ , by w kolejnej przesunąć naszą cenę rezygnacji do tej wartości. Tak rozumiana taktyka  $\mathcal{D}_{E(q)}$  jest wtedy unitarna, i jako operacja kwantowa gwarantuje nam warunki poufności<sup>15</sup>. Wspomniane twierdzenie o punkcie stałym zakłada dodatnio określoną miarę prawdopodobieństwa zadaną taktyką przeciwnika. Możliwe, że gdy pasywny z konieczności przeciwnik (np. reszta świata nie może reagować na niewygodne dla niej zachowania jedynie pojedynczego, małego uczestnika rynku) wybierze strategię giffen, to taktyka  $\mathcal{D}_{E(q)}$  utraci walor najwyższej zyskowności. Powijaki w jakich znajduje się, na obecnym, wstępnym etapie, rozwój komputerów kwantowych nie przeszkadzają już dziś symulować odpowiednie przebiegi rozgrywek kwantowych na tradycyjnych komputerach. W takich sytuacjach posługiwanie się najprostszymi taktykami kwantowymi, podobnymi do tu przedstawionych, powinno przynieść jakościowo zupełnie nowe efekty. Taktyki te są znacznie bogatsze od mało przypominających żywe, ludzkie zachowania rynkowe, klasycznych algorytmów kupna-sprzedaży, które zmonopolizowały obecny rynek automatycznie obsługiwanych transakcji. Mogłyby one już dziś operować na rynkach kapitałowych, gdyby powstały kwantowo zarządzane i rozliczane fundusze powiernicze. Nic nie stoi także na przeszkodzie, by dla chętnych pojawiły się nowe rynki, na których wszystkie strony transakcji mogłyby się posługiwać taktykami kwantowymi. Fizyczne modele kwantowe oferują rozwiązania wyjątkowo stabilne w porównaniu z ich odpowiednikami klasycznymi [Deu98]. Może więc kwantowe rynki zabezpieczą przyszłe społeczeństwo przed negatywnymi

---

<sup>14</sup>patrz str. 264

<sup>15</sup>jakikolwiek intruz musi spełniać własność klasycznego przyrządu pomiarowego, dysponuje więc jedynie nieunitarnymi środkami ingerencji

konsekwencjami głębokich wahań cenowych, które charakteryzują obecną gospodarkę.

Dla potrzeb sytuacji, gdy zasady funkcjonowania rynku pozwalają analizować zachowania potencjalnych partnerów transakcji, należałoby zbadać grę z przeciwnikiem, którego taktyka reaguje na nasze zmiany strategii. Takie gry posiadają termodynamiczne analogie i pozwalają opisywać procesy dochodzenia do równowagi rynkowej<sup>16</sup>. Ze względu na obszerność tematu analiza konkurencyjnych taktyk rynkowych wykracza poza ramy tej części książki, która jest jedynie zarysem obszernej tematyki rynkowych gier kwantowych.

Gdy gracz dysponuje dwoma strategiami czystymi  $|\psi_0\rangle$  i  $|\psi_1\rangle$ , wtedy w teorii klasycznej zbiór strategii, w którym (zmierzając od  $|\psi_0\rangle$  do  $|\psi_1\rangle$ ) może on w sposób ciągły dokonywać zmian, jest tylko jeden. To jednowymiarowy zbiór strategii mieszanych, będący złączem wypukłym<sup>17</sup>, rozpiętym przez punkty  $|\psi_0\rangle$  i  $|\psi_1\rangle$ . W porównaniu z tym teoria kwantowa oferuje mu niezwykle bogate możliwości. Stoi on przed wyborem dowolnej krzywej ciągłej spośród ścieżek łączących bieguny sfery  $S_2$ . Z tego powodu nieprzewidywalność jego poczynąń drastycznie rośnie, co stawia jakościowo nowe wymagania przed przeciwnikiem. Na rynkach jednakowo traktujących każdy podmiot przeciwnik, dysponujący jedynie wiedzą opartą na klasycznej teorii gier, z pewnością znajdzie się w pozycji skazanej na przegraną.

---

<sup>16</sup>zob. uwagi poczynione w §6 rozdz. 15

<sup>17</sup>patrz str. 33



## Kwantowa dyfuzja cen i zysków

to understand the word 'doublethink'  
involved the use of doublethink

*George Orwell, 1984*

W rozdziale 3 części pierwszej „Dwoistości wartości kapitału” rozważaliśmy dualność charakteryzującą ryzyko transakcji rynkowych, w jego niekwantowym aspekcie przedstawiane w przestrzeniach  $\mathbb{R}^2$  i  $\mathbb{P}^2$ <sup>1</sup>. Posiadający pewne podobieństwa do tamtego kwantowy opis ryzyka formułuje owe zagadnienie w kontekście strategii gry rynkowej  $|\psi\rangle \in \mathcal{L}^2$ , określającej dwoiste miary zdarzeń w przestrzeniach  $\mathbb{R}^2$  i  $\mathbb{P}^2$ . Podobnie jak w rozdziale 3 części pierwszej, ryzyko znajduje swą pełną interpretację w przestrzeni prostych  $\mathbb{P}^2$ . Jednak pamiętać należy o pierwotnym znaczeniu przestrzeni Hilberta  $\mathcal{H}$  w teorii kwantowej. Dopiero w języku tej przestrzeni opis zachowań rynkowych staje się kompletny, a stosunkowo proste w takim formalizmie modele gier rynkowych posiadają w przestrzeni  $\mathbb{P}^2$  skomplikowany rachunkowo obraz.

---

### § 1. Tomografia rynkowa

Konsument nabywanego na rynku dobra  $\mathcal{G}$  zysk osiągnięty w tej transakcji może wyrazić zmienną losową<sup>2</sup>  $w = -q$ . W podobnej sytuacji producent zbywający  $\mathcal{G}$  dla określenia swego zysku użyje zmiennej  $w = -p$ . Odpowiednia wysokość zysku domu aukcyjnego, utrzymującego się z prowizji od ceny po jakiej kupowane jest dobro  $\mathcal{G}$ , wyniesie<sup>3</sup>  $w = q$ . Pośrednik, likwidujący nadmierne zapasy  $\mathcal{G}$ , gdy sprzedaje z intensywnością dwukrotnie przewyższającą intensywność jednocześnie prowadzonego przez niego skupu, wyznaczy swój zysk

<sup>1</sup>przeźren prostych w  $\mathbb{R}^2$

<sup>2</sup>definicje zmiennych losowych  $p$  i  $q$  poznaliśmy w rozdziale 15

<sup>3</sup>jeśli np. jest to pięcioprocentowa prowizja, a cena zakupu  $\mathcal{G}$  wynosi 10€, to  $\ln(5\% \cdot 10\text{€}) = \ln 10\text{€} + \ln 0.05$  i czynnik  $\ln 0.05$  (tak samo, jak wielkość jednostki pieniężnej €) można zignorować, gdyż jest on jednakowy dla przebiegu każdej aukcji

zmienną  $w = -2p - q$ . Różne podmioty rynku charakteryzują się właściwym sobie poziomem aktywności handlowej, której tempo dostosowują do własnych wymagań i możliwości. Dlatego jeśli ustalimy standard dla jednostek zmiennych kanonicznych  $p$  i  $q$ , w którym zmienna losowa ryzyka (zob. (15.13)) ma prostą postać<sup>4</sup>  $\frac{p^2}{2} + \frac{q^2}{2}$ , to zmienna losowa zysku  $w$  konkretnego podmiotu rynkowego z handlu dobrem  $\mathcal{G}$  będzie wyrażać się wzorem

$$(17.1) \quad uq + vp + w(u, v) = 0,$$

gdzie parametry  $u$  i  $v$  określają sposób uczestnictwa tego podmiotu w rynkowym obrocie dobrem  $\mathcal{G}$ . Zmierzając do maksymalizacji własnych zysków gracz będzie odpowiednio modyfikował postać własnej strategii  $|\psi\rangle$ , jednak proces ten będzie przebiegać w ramach scharakteryzowanej liczbami  $u$  i  $v$  specyfiki włączania się gracza w obrót rynkowy. Za skrajny przykład niech posłuży tu sytuacja ograniczającego się do skupowania nieruchomości rentiera. Nie będzie on miał, tak potrzeby, jak i okazji, korygować postaci podażowej reprezentacji własnej strategii, gdyż ta nie będzie wpływać na osiągnięty przez niego zysk z nabycia nieruchomości.

Uwzględniając jawną postać amplitudy prawdopodobieństwa  $|\psi\rangle \in \mathcal{L}^2$ , która charakteryzuje aktualną strategię gracza rynkowego, możemy stwierdzić, że to trójka wielkości  $(u, v, |\psi\rangle)$  wyraża właściwości zmiennej losowej zysku  $w$  z jego transakcji dobrem  $\mathcal{G}$ . Miara pseudoprawdopodobieństwa zachowań gracza, wynikających ze strategii  $|\psi\rangle$ , jest funkcja Wignera  $W(p, q)$  określona na przestrzeni fazowej  $(p, q)$  formułą (15.10). Dlatego, jeżeli ustalimy wartości parametrów  $u$  i  $v$ , to rozkładem prawdopodobieństwa zmiennej losowej  $w$  będzie rozkład brzegowy  $W_{u,v}(w)dw$ , uzyskany przez wycałkowanie funkcji Wignera  $W(p, q)$  wzdłuż prostej  $uq + vp + w = 0$

$$(17.2) \quad W_{u,v}(w) := \iint_{\mathbb{R}^2} W(p, q) \delta(uq + vp + w, 0) dpdq.$$

Powyższe przekształcenie całkowe  $(W : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}) \rightarrow (W : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{R})$  w literaturze nazywane jest *transformacją Radona* [Hel80]. Zauważmy, że względem wszystkich argumentów  $W_{u,v}(w)$  jest funkcją jednorodną stopnia -1, tzn.

$$W_{\lambda u, \lambda v}(\lambda w) = |\lambda|^{-1} W_{u,v}(w).$$

Już wcześniej zetknęliśmy się ze szczególnymi przypadkami miary  $W_{u,v}(w)dw$ . Kwadrat modułu strategii czystej w reprezentacji podażowej wynosi  $|\langle p|\psi\rangle|^2 = W_{0,1}(p)$ , a w reprezentacji popytowej  $|\langle q|\psi\rangle|^2 = W_{1,0}(q)$ . Tak jak w tych dwóch szczególnych przypadkach, funkcja  $W_{u,v}(w)$  jest dodatnio określona dla dowolnych wartości parametrów  $u$  i  $v$ , gdyż zmiana wartości tych parametrów zadaje transformację kanoniczną, po przeprowadzeniu której nowa miara  $W_{u,v}(w)dw$

<sup>4</sup>upływ czasu  $\gamma$  (patrz (17.8)) będziemy określać w jednostkach proporcjonalnych do przeciętnego czasu trwania transakcji  $\theta$  (zob. rozdz. 14) tak, by przyjąć, że  $\omega = 1$  we wzorze (15.13)

jest kwadratem modułu strategii-funkcji falowej zapisanej w jej nowej reprezentacji.

Wyrażając zmienne  $u, v$  w jednostkach  $\hbar_E^{-\frac{1}{2}}$  i korzystając z definicji (15.10) oraz (17.2) otrzymamy poniższy związek pomiędzy funkcjami  $W_{u,v}(w)$  i  $\langle p|\psi\rangle$  lub  $\langle q|\psi\rangle$  [MM99], jednakowy dla podażowej i popytowej reprezentacji strategii gracza<sup>5</sup>:

$$(17.3) \quad W_{u,v}(w) = \frac{1}{2\pi|v|} \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{i}{2v}(up^2+2pw)} \langle p|\psi\rangle dp \right|^2.$$

Wykorzystując we wzorze (17.2) całkową postać delty Diraca

$$(17.4) \quad \delta(uq+vp+w, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(uq+vp+w)} dk$$

znajdujemy przekształcenie odwrotne do (17.2). Ma ono postać

$$(17.5) \quad W(p, q) = \frac{1}{4\pi^2} \iiint_{\mathbb{R}^3} \cos(uq+vp+w) W_{u,v}(w) dudvdw.$$

Stosujący jednakową strategię gry różni uczestnicy rynku (bądź jeden uczestnik, który ma sposobność odnajdować się w odpowiednio zmieniających się sytuacjach) mierząc swoje zyski z handlu dobrem  $\mathcal{G}$  tworzą tomograficzny obraz swej strategii, zdeformowany subiektywnymi okolicznościami, określającymi charakteryzujące ich wartości parametrów  $u$  i  $v$ . Korzystając ze zgromadzonej w taki sposób informacji i posługując się formułą (17.5) możemy odtworzyć wyrażoną funkcją Wignera  $W(p, q)$  pierwotną postać, obserwowanej na różne sposoby w transakcjach rynkowych, ich strategii.

### 1.1. Przykład: rozkład brzegowy strategii adiabaticznej

Znając przedstawioną wzorem (15.14) funkcję Wignera  $n$ -tego stanu wzbudzonego oscylatora harmonicznego, możemy bezpośrednio z definicji (17.2) wyznaczyć rozkład brzegowy odpowiadający dowolnej strategii adiabaticznej. Korzystając z formuł (17.4), (15.16) i poniższej tożsamości [Man99]<sup>6</sup>

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikw - \frac{k^2}{4}} L_n\left(\frac{k^2}{2}\right) dk = \frac{2^{n+1}\sqrt{\pi}}{n!} e^{-w^2} H_n^2(w)$$

po przekształceniach otrzymamy następującą jego postać

$$(17.6) \quad W_{n,u,v}(w) = \frac{2^n}{\sqrt{\pi}(u^2+v^2)n!} e^{-\frac{w^2}{u^2+v^2}} H_n^2\left(\frac{w}{\sqrt{u^2+v^2}}\right) = |\langle w|\psi_n\rangle|^2,$$

<sup>5</sup>zamieniając  $p$  na  $q$  należy także zamienić  $u$  z  $v$

<sup>6</sup>w części drugiej „Dwoistości wartości kapitału”, w rozdziale poświęconym stochastycznej reprezentacji algebry stopy, przyjęliśmy konwencję, w której symbol  $H_n(w)$  oznacza  $n$ -ty moniczny wielomian Hermita, o współczynniku 1 przy wiodącej potędze zmiennej  $w$

którą identyfikujemy jako kwadrat modułu odpowiedniej amplitudy prawdopodobieństwa, wyrażonej w reprezentacji właściwej dla zmiennej  $w$ . Powyższy wzór możemy objaśniać klasycznie, posługując się stochastyczną reprezentacją algebry stopy, omówioną w części drugiej rozprawy. Teraz dzięki formule (17.5) oparte na stopie stochastycznej klasyczne rachunki znajdują pełną interpretację w ramach teorii kwantowej. Wzór (17.6) staje się oczywisty, gdy będziemy go postrzegać jako konsekwencję transformacji dziedziny funkcji Wignera do nowych zmiennych kanonicznych, z których jedną jest specyficzna dla uczestnika rynku, wyrażająca jego zysk zmienna  $\mathfrak{w}(u, v)$ .

---

## § 2. Transformacje kanoniczne

Wszystkie transformacje kanoniczne<sup>7</sup>  $(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) \rightarrow (\mathcal{P}', \mathcal{Q}')$ , które zachowują addytywność komponent podażowej i popytowej operatora skłonności gracza do ryzyka  $\frac{\mathcal{P}'^2}{2m} + \frac{m\mathcal{Q}'^2}{2}$ , możemy przedstawić, używając odpowiednio sparametryzowanej macierzy, w następujący sposób

$$(17.7) \quad \begin{pmatrix} \mathcal{P} \\ \mathcal{Q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\operatorname{Re} z}{z\bar{z}} & \operatorname{Im} z \\ -\frac{\operatorname{Im} z}{z\bar{z}} & \operatorname{Re} z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{P}' \\ \mathcal{Q}' \end{pmatrix},$$

gdzie  $z \in \overline{\mathbb{C}}$ , a parametr wyrażający asymetrię podażowo-popytową ryzyka ma postać  $m = z\bar{z}$ . W takiej parametryzacji zmiana modułu liczby  $z$  odpowiada przejściu do transakcji cechującej się, przy jednakowym ryzyku, inną proporcją jego rozkładu pomiędzy operacje kupna i sprzedaży. Interesujące jest także znaczenie fazy liczby  $z$ . Jej zmiana implikuje przejście do zmiennych kanonicznych, w których zostają zmieszane aspekty popytowe i podażowe transakcji. W szczególności zmiana fazy  $\arg z$  o  $\frac{\pi}{4}$  prowadzi do zmiennych kanonicznych  $\mathcal{P}' = \mathcal{Y} := \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathcal{P} - \mathcal{Q})$  i  $\mathcal{Q}' = \mathcal{Z} := \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathcal{P} + \mathcal{Q})$ . Zmiennej podażowej  $\mathcal{P}$  odpowiada teraz zmienna  $\mathcal{Y}$  średniej arytmetycznej wychylenia logarytmu ceny od wartości oczekiwanej tej zmiennej w transakcjach kupna i sprzedaży dobra  $\mathfrak{G}$ , a zmiennej popytowej  $\mathcal{Q}$  — zmienna  $\mathcal{Z}$  zysku odniesionego w jednorazowym procesie kupna-sprzedaży  $\mathfrak{G}$ . Własność kanoniczności wymusza takie, a nie inne unormowanie zmiennych  $\mathcal{Y}$  i  $\mathcal{Z}$ . Przekształcenie (17.7) można postrzegać jako wariant dyskretnej transformacji Fouriera (21.3), gdyż otrzymamy go ze złożenia macierzy Hadamarda (21.2) z macierzą zmieniającą orientację operatora  $\mathcal{Q}$  na zgodną z kierunkiem wzrostu ceny dobra  $\mathfrak{G}$ .

---

<sup>7</sup>tj. liniowych przekształceń operatorów  $\mathcal{P}$  i  $\mathcal{Q}$ , które nie zmieniają ich komutatora  $\mathcal{P}\mathcal{Q} - \mathcal{Q}\mathcal{P}$

W dalszej części tego rozdziału będziemy rozważać opis strategii w reprezentacji Schrödingera, gdzie są one funkcjami określonymi na dziedzinie zmiennej  $y$ , wyrażającej znormalizowaną wartość logarytmu ceny transakcyjnej. Dualny opis, operujący wartościami znormalizowanego zysku  $z$ , nie wymaga żadnych formalnych modyfikacji, co wynika z wiążącego zmienne  $y$  i  $z$  kanonicznego sprzężenia oraz z symetrycznej postaci operatora  $H(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})$  skłonności gracza rynkowego do ryzyka.

---

### § 3. Dyfuzja ceny

Zbadajmy własności popularnego w fizyce statystycznej operatora rozkładu statystycznego Gibbsa<sup>8</sup>

$$(17.8) \quad e^{-\gamma H(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})}$$

jako kwantowej, nieunitarnej taktyki gracza (nazwijmy ją *taktyką cieplną*), czyli operacji prowadzącej do stosowania przez niego w grze rynkowej nowej strategii. Postać operatora (17.8) wynika z rozważań przedstawionych w §7 rozdziału o termodynamice portfeli kanonicznych, w pierwszej części rozprawy. Przy okazji warto zauważyć, że opisany w tamtym rozdziale kanoniczny portfel urnowy w ramach kwantowej teorii gier posiada dwa różne odpowiedniki: strategię termiczną i taktykę cieplną. Klasyczny opis ewolucji w czasie  $t$  logarytmu ceny papieru wartościowego (czy innego płynnego dobra rynkowego), zwany modelem Bacheliera, zakłada, że gęstość prawdopodobieństwa tej zmiennej losowej spełnia równanie dyfuzji z dryfem<sup>9</sup>, gwarantującym niemożność osiągnięcia zysków z przeprowadzenia arbitrażu. Dlatego naturalne jest założenie, że kwantowa wartość oczekiwana średniego logarytmu ceny  $E(\mathcal{Y})$  sama jest z kolei zmienną losową o właściwościach określonych modelem Bacheliera. Tak więc przedstawiona w tym rozdziale zmienna cenowa  $y$  ma własności znane z opisu obiektu fizycznego wykonującego ruch błędny, w różnych skalach czasowych opisywany modelami cząstki Browna (w gruboziarnistej skali czasu  $t$ ) i cząstki Rayleigha (w drobnoziarnistej skali czasu  $\gamma$ ) [vK90]. Dopiero złożenie tych ruchów daje pełny obraz losowych zmian wartości parametru cenowego  $y$ . Wydaje się, że parametry  $t$  i  $\gamma$  powinniśmy traktować jako zmienne niezależne, bowiem pierwszy z nich parametryzuje chaotyczną ewolucję „stanu równowagi rynkowej”, drugi zaś — etap, na jakim znajduje się gracz (w tym i cały rynek) w chaotycznym, kwantowym procesie dochodzenia do tego stanu równowagi.

---

<sup>8</sup>by rozróżnić temperaturę taktyki od temperatury strategii zamiast zwyczajowego oznaczenia  $\beta$  występujący tu mnożnik Lagrange'a oznaczono literą  $\gamma$

<sup>9</sup>zob. §5 bieżącego rozdziału

Dlatego też parametr  $\gamma$  możemy interpretować nieco inaczej, traktując go jako odwrotność temperatury kanonicznego portfela urnowego, reprezentującego strategię graczy wykazujących jednakową skłonność do podejmowania ryzyka, którzy operują na taktycę, będącej stanem podstawowym operatora ryzyka  $H(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})$ . Niezależnie od sposobu interpretacji przyjęcie taktyki (17.8) oznacza, zgodnie z założeniami poczynionymi w §7 rozdz. o termodynamice portfeli kanonicznych (patrz część pierwsza rozprawy), że celem gracza jest minimalizowanie (w ramach posiadanej informacji o rynku) ryzyka gry. Strategią o najmniejszym ryzyku jest stan podstawowy operatora  $H(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})$ . Wygodnie jest więc przyjąć takie normowanie<sup>10</sup> operatora taktyki cieplnej, w którym strategia ta jest jego punktem stałym<sup>11</sup>. Wtedy operator taktyki cieplnej ma postać<sup>12</sup>

$$\mathcal{R}_\gamma := e^{-\gamma(H(\mathcal{Y}, \mathcal{Z}) - \frac{1}{2})},$$

gdyż operator  $H(\mathcal{Y}, \mathcal{Z}) - \frac{1}{2}$  anihiluje strategię najmniejszego ryzyka. Dla zrozumienia funkcjonowania taktyki cieplnej warto jest przedstawić sposób działania operatora  $\mathcal{R}_\gamma$  na strategiach  $\langle y|\psi\rangle \in \mathcal{L}^2$  za pomocą jego jądra całkowego<sup>13</sup>  $\mathcal{R}_\gamma(y, y')$

$$(17.9) \quad \langle y|\mathcal{R}_\gamma\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{R}_\gamma(y, y') \langle y'|\psi\rangle dy',$$

którego postać wyznacza *formuła Mehlera*<sup>14</sup>:

$$\mathcal{R}_\gamma(y, y') = \frac{1}{\sqrt{\pi(1-e^{-2\gamma})}} e^{-\frac{y^2-y'^2}{2} - \frac{(e^{-\gamma}y-y')^2}{1-e^{-2\gamma}}}.$$

W modelach fizycznych  $\mathcal{R}_\gamma(y, y')$  opisuje prawdopodobieństwo zmiany w czasie  $\gamma$  prędkości  $y'$  na  $y$  błądzącej cząstki Rayleigha<sup>15</sup>. Dla tego dodatnio określonego jądra warunek punktu stałego w strategii najmniejszego ryzyka wyraża następująca tożsamość

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{R}_\gamma(y, y') e^{\frac{y^2-y'^2}{2}} dy' = 1.$$

Taktyka  $\mathcal{R}_\gamma$  nosi nazwę procesu Ornsteina-Uhlenbecka. Przejdźmy teraz do takiej reprezentacji przestrzeni Hilberta  $\mathcal{L}^2$ , w której punkt stały taktyki cieplnej

<sup>10</sup>posiadamy swobodę w wyborze wartości mnożnika Lagrange'a  $\zeta$ , zob. str. 95

<sup>11</sup>normowanie takie, w przeciwieństwie do więzu ustalającego sumę wag rozkładu kanonicznego na 1 (zob. w części pierwszej tej rozprawy rozdz. o termodynamice portfeli kanonicznych), pozwala także zachować taktycę  $\mathcal{R}_\gamma$  względem parametru  $\gamma$  własność addytywności  $\mathcal{R}_{\gamma_1+\gamma_2} = \mathcal{R}_{\gamma_2}\mathcal{R}_{\gamma_1}$ , która umożliwia postrzeganie taktyki cieplnej jako złożenia kolejnych operacji cząstkowych, wykonywanych w kolejnych przedziałach czasu

<sup>12</sup>przyjęliśmy uprzednio, że  $\omega=1$

<sup>13</sup>w literaturze nazywanego *jądrem cieplnym*

<sup>14</sup>proste wyprowadzenie tego wzoru czytelnik znajdzie w [GJ81]; różne metody jego otrzymywania (Schwingera, algebraiczna, całkowania po trajektoriach) zestawiono w artykule [BBF02]

<sup>15</sup>wtedy zmienne  $y$  i  $\gamma$  należy wyrazić w jednostkach stosownych dla opisu fizycznego

odpowiada funkcji stałej. Dzięki temu zabiegowi umożliwiamy opis procesu w konwencji tradycyjnego rachunku prawdopodobieństwa, przerzucając funkcyjne własności punktu stałego taktyki na probabilistyczną miarę  $\widetilde{dy} := \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-y^2} dy$ , określoną dla zmiennej  $y$ . Teraz uwzględniamy punkt stały taktyki cieplnej, będący strategią najmniejszego ryzyka, w postaci odpowiadającej mu miary prawdopodobieństwa, niezmienniczej względem działania odmiennie zapisanego jądra taktyki  $\mathcal{R}_\gamma$ . Transformacja  $\mathcal{L}^2(dy) \rightarrow \mathcal{L}^2(\widetilde{dy})$  prowadzi do wyrażenia wektorów własnych operatora skłonności do ryzyka przez kolejne wielomiany Hermita<sup>16</sup> i sprowadza się do pomnożenia wektorów z  $\mathcal{L}^2$  przez funkcję  $\sqrt[4]{\pi} e^{\frac{y^2}{2}}$ . Teraz formuła (17.9) ma postać:

$$\langle \widetilde{y} | \widetilde{\mathcal{R}_\gamma} \psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{\mathcal{R}_\gamma}(y, y') \langle \widetilde{y}' | \psi \rangle \widetilde{dy}',$$

gdzie

$$\widetilde{\mathcal{R}_\gamma}(y, y') := \frac{1}{\sqrt{1-e^{-2\gamma}}} e^{y'^2 - \frac{(e^{-\gamma}y - y')^2}{1-e^{-2\gamma}}}.$$

Zazwyczaj proces stochastyczny Ornsteina-Uhlenbecka opisywany jest jądrem  $\widetilde{\mathcal{R}_\gamma}(y, y')$ , będącym fundamentalnym rozwiązaniem równania Fokkera-Plancka [Enc97].

#### § 4. „Klasyczny” obraz kwantowej dyfuzji

Znanym z podręczników o równaniach różniczkowych cząstkowych obiektem jest jądro dla funkcji wykładniczej operatora Laplace’a  $e^{-\frac{\gamma}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2}}$ , gdyż stanowi ono fundamentalne rozwiązanie równania dyfuzji

$$\frac{\partial f(y, \gamma)}{\partial \gamma} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(y, \gamma)}{\partial y^2}.$$

Jądro to ma postać

$$\mathcal{R}_\gamma^0(y, y') := \frac{1}{\sqrt{2\pi\gamma}} e^{-\frac{(y-y')^2}{2\gamma}},$$

a niezmiennicza względem jądra  $\mathcal{R}_\gamma^0(y, y')$  miara wyraża się wzorem

$$dy_0 := \frac{1}{\sqrt{\pi\gamma}} e^{-\frac{y^2}{2\gamma}} dy.$$

Zadany w ten sposób proces stochastyczny nazywany jest procesem Wienera-Bacheliera. W fizycznych modelach, w których zmienne  $y$  i  $\gamma$  mają interpretację

<sup>16</sup>patrz, w części pierwszej tej rozprawy, rozdział o stochastycznej reprezentacji algebry stopy

odpowiednio wyskalowanych współrzędnych położenia i czasu, nazywamy go ruchem cząstki Browna. Dla iloczynu operatorów  $\mathcal{X}_k$  w  $\mathcal{L}^2$ , będących mnożeniami przez odpowiadające kolejnym chwilom  $k = 1, \dots, n$ ;  $-\frac{\gamma}{2} \leq \gamma_1 \leq \dots \leq \gamma_n \leq \frac{\gamma}{2}$  funkcje  $x_k(y(\gamma_k))$ , warunkową miarę Wienera  $dW_{y,y'}^\gamma$ , przy  $y = y(-\frac{\gamma}{2})$  i  $y' = y(\frac{\gamma}{2})$ , określamy jądrem odpowiedniego operatora

$$\int \prod_{k=1}^n x_k(y(\gamma_k)) dW_{y,y'}^\gamma := \left( e^{-\frac{\gamma_1 + \gamma/2}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2}} \mathcal{X}_1 e^{-\frac{\gamma_2 - \gamma_1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2}} \mathcal{X}_2 \dots \mathcal{X}_n e^{-\frac{\gamma/2 - \gamma_n}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2}} \right) (y, y').$$

W trywialnym przypadku operatorów stałych  $x_k(y(\gamma_k)) \equiv 1$  otrzymamy jądro funkcji wykładniczej operatora Laplace'a

$$\int dW_{y,y'}^\gamma = \mathcal{R}_\gamma^0(y, y').$$

Używając miary Wienera możemy jądro taktiki cieplnej przedstawić następującym wzorem<sup>17</sup> [GJ81]

$$(17.10) \quad \mathcal{R}_\gamma(y, y') = \int \mathcal{T}' e^{-\int_{-\gamma/2}^{\gamma/2} \frac{y^2(\gamma') - 1}{2} d\gamma'} dW_{y,y'}^\gamma$$

znanym jako *formuła Feynmana-Kaca*. Rozwijając w szereg funkcję wykładniczą w powyższym wzorze i wykorzystując popularną wśród fizyków interpretację teorii kwantowej w języku całek po trajektoriach [Kle95] możemy przedstawić poprawki do wzorów wynikających z modyfikacji modelu Bacheliera, powstałej z zastąpienia jądra  $\mathcal{R}_\gamma^0(y, y')$  jądrem  $\mathcal{R}_\gamma(y, y')$ , jako efekty uwzględnienia klasycznej miary ryzyka<sup>18</sup>, które powstają w wyniku interferencji wszelkich możliwych klasycznych scenariuszy<sup>19</sup> zmiany zysku w takim, odpowiadającym czasowi  $\gamma$ , kwantowym sektorze rozszerzonego modelu Bacheliera. Na krótkich odcinkach czasu  $\gamma \ll 1$  (czy dla wysokotemperaturowych taktik cieplnych, charakterystycznych dla rozchwianego rynku, czy zdezorientowanych graczy) poprawki kwantowe będą nieistotne, a proces Ornsteina-Uhlenbecka upodobni się do procesu Wienera-Bacheliera. W efekcie, korzystając z charakterystycznej dla rozkładu normalnego  $\eta(x, \sigma^2)$  własności kumulowania się dyspersji przy uśrednianiu (na której opiera się konstrukcja procesu Wienera-Bacheliera)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \eta(x+y, \sigma_1^2) \eta(y, \sigma_2^2) dy = \eta(x, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

<sup>17</sup> $\mathcal{T}'$  jest operatorem antychronologicznym, zob. rozdział o stopie macierzowej w części drugiej tej rozprawy

<sup>18</sup>w klasycznym rachunku prawdopodobieństwa ryzyko zmiennej losowej wyrażamy kwadratem odchylenia tej zmiennej od jej wartości średniej. Warto jest spostrzec, że zgodne z tą konwencją byłoby używanie zespolonego operatora zysku  $\mathcal{A} := \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathcal{Y} + i\mathcal{Z})$  (tzw. operatora anihilacji), gdyż przedstawiony przy jego pomocy operator ryzyka  $H(\mathcal{A}^\dagger, \mathcal{A}) - \frac{1}{2} = \mathcal{A}^\dagger \mathcal{A}$  ma postać sfaktoryzowaną.

<sup>19</sup>zob. np. przystępny tekst Marka Kaca [Kac61] opisujący tą ideę



całość kwantowego ruchu błędnego (odbywającego się w parametrze  $\gamma$ ) możemy przenieść, w postaci addytywnego zwiększenia ruchliwości, w ramy klasycznego modelu Bacheliera. Mechanizm ten wyjaśnia zmienność ruchliwości logarytmu ceny występującą w ramach klasycznego modelu Bacheliera, która wynika ze zmiany temperatury taktyki charakteryzującej rynek na skutek np. dezorientującego, bądź objaśniającego, charakteru pojawiających się informacji. Intrygujący fenomen ruchów cen rynkowych możemy opisywać także w sposób skrajnie redukcjonistyczny, postrzegając go w pełni jako proces kwantowy. Wtedy klasyczny model Bacheliera będzie konsekwencją krótkiego działania taktyki używanej przez smithowską niewidzialną ręką rynku. W warunkach pełnej konkurencji jest nią cała handlowa reszta świata postrzegana jako jeden abstrakcyjny kupiec targujący się z każdym pojedynczym realnym podmiotem rynkowym. Zmieniający się stan informacji o świecie powoduje, że po czasie  $\gamma \ll 1$  taktyka ta staje się zarzucona na rzecz nowej, zmierzającej do strategii-stanu podstawowego operatora skłonności do ryzyka, zlokalizowanego wokół skorygowanej wartości oczekiwanej logarytmu ceny dobra  $\mathcal{G}$ . Powinniśmy przy tym pamiętać, że opis nasz używa dryfującego układu odniesienia<sup>20</sup>, dobranego tak, by proces zmian cenowych był uniemożliwiającym arbitraż martyngałem, tzn. aby aktualna cena  $\mathcal{G}$  pokrywała się z jej przyszłą wartością oczekiwaną, skorygowaną odpowiednią stopą zysku z instrumentów finansowych pozbawionych ryzyka.



W obydwu tych wariantach interpretacyjnych zjawiska chaotycznego ruchu cen rynkowych dopiero w pobliżu stanu o najmniejszej kwantowej dyspersji, tj. przy dużych wartościach parametru czasowego  $\gamma$  (czy, w temperaturowym ujęciu, w przypadku dobrze poinformowanych graczy), poprawki kwantowe powinny wnieść jakościowe korekty do modelu Bacheliera, wymagające uwzględnienia specyfiki procesu Ornsteina-Uhlenbecka.

<sup>20</sup> patrz uwagi w następnym paragrafie

### § 5. Paradoksalna własność dryfu cenowego

W bieżącym rozdziale dwukrotnie nawiązaliśmy do powszechnego w inżynierii finansowej założenia o dryfie logarytmu ceny dowolnego podstawowego instrumentu finansowego (dobra rynkowego). Wielkość dryfu wyznaczana jest na podstawie wymogu, by cena<sup>21</sup> takiego instrumentu posiadała własność martyngału [DeG81]. Dla wygody oznaczymy to założenie skrótowo przez DZ i rozważmy prosty eksperyment myślowy [Pio97], który czyni kontrowersyjnym postrzeganie ceny wolnej od arbitrażu jako zmiennej losowej o jednakowej, wyznaczonej dla różnych chwil czasu, wartości oczekiwanej. Niech suweren, władający wyimaginowanym krajem, dekretuje obowiązujący kurs swojej waluty  $\mathcal{G}$  względem waluty sąsiada  $\mathcal{G}'$  tak, że wartość logarytmu tej ceny pieniądza (oznaczymy ją przez  $\eta$ ) jest proporcjonalna do wyniku eksperymentu mierzącego położenie cząstki Browna, bezdryfowo błędzącej w jednym wymiarze. Hołdujący założeniu DZ posiadacz waluty  $\mathcal{G}$  będzie chwalił suwerena, przedkładając nad  $\mathcal{G}'$  swój pieniądz  $\mathcal{G}$ , gdyż jego cena przedstawiana w jednostkach  $\mathcal{G}'$  zawsze przeciętnie zwyżkuje (proces  $e^\eta$  jest submartyngałem). Równie zadowolony ze swej waluty  $\mathcal{G}'$  będzie cudzoziemiec, gdy na podstawie DZ stwierdzi, że jej kurs względem  $\mathcal{G}$ , wynoszący  $e^{-\eta}$ , wykazuje zawsze tendencję zwyżkową (gdyż także jest submartyngałem). Te dwa odmienne stanowiska są wzajemnie sprzeczne, dlatego, przynajmniej w niektórych zagadnieniach inżynierii finansowej, przyjmowanie DZ jest niewłaściwe. Wydaje się, że każdorazowa akceptacja DZ powinna być poprzedzona wykazaniem braku związku pomiędzy rozważanym modelem finansowym, a przedstawionym wyżej paradoksem. Gdy właściciele  $\mathcal{G}$  czy  $\mathcal{G}'$  zrezygnują z DZ, to swoje przyszłe korzyści z posiadania pieniędzy, zamiast spodziewanym ich przyrostem wyrażonym w konkurencyjnej walucie, powinni mierzyć prognozowaną zmianą wartości logarytmu ich kursu<sup>22</sup>. Wtedy paradoksalność omówionej sytuacji zniknie — oczekiwane zyski z posiadania którejkolwiek z walut będą zerowe<sup>23</sup>.

<sup>21</sup>dla prostoty rozważań przyjmujemy, że pod tym określeniem rozumiemy cenę skorygowaną o stopę zwrotu z kapitału wolnego od ryzyka

<sup>22</sup>podobnie jak to proponował Daniel Bernoulli w swoim rozwiązaniu sławnego *paradoksu petersburskiego*, zob. np. [DeG81]

<sup>23</sup>nic nie stoi na przeszkodzie, by w tym anegdotycznym eksperymencie myślowym funkcję waluty spełniało dowolne dobro rynkowe, więc wydaje się niekonsekwentne i przesadnie ostrożne omijanie tzw. *paradoksu Siegela* przez przyjmowanie logarytmicznych stóp jako martyngałów jedynie w ograniczonym zakresie rynku walutowego [Tay95]

---

## § 6. Résumé

Handlujący dobrem  $\mathfrak{G}$  gracze o jednakowych strategiach rynkowych (w tym cały rynek), niczym tomograf, stosując różne reprezentacje jednej strategii gry, dostarczają, poprzez wyniki zawartych transakcji, danych, pozwalających odtworzyć ich strategię z kształtu odpowiadającej jej funkcji Wignera. Jeśli założymy, że jesteśmy w stanie wyznaczać wartości rozkładów brzegowych  $W_{u(t),v(t)}(w)$  badając zmiany cenowe rynkowych instrumentów finansowych, to gruntowne poznanie odpowiadających im strategii kwantowych wymaga posłużenia się odwrotną transformacją Radona (17.5). Rachunkowo zagadnienie to odpowiada problemowi znanemu z tomografii, gdy znając stopień absorpcji promieni rentgenowskich przechodzących przez prześwietlany obiekt odtwarzamy rozkład tworzącej go materii. Może doświadczenia odniesione w tej dziedzinie w medycynie, geofizyce czy radioastronomii zostaną kiedyś wykorzystane w celu zgłębienia tajemnic zmienności krzywych podaży i popytu.

Współczesne badania rynków kapitałowych skłaniają uczonych ku modelom dyfuzji cenowej nawiązującym do procesu Ornsteina-Uhlenbecka. Argumenty za takimi modyfikacjami modelu Bacheliera znajdziemy m.in. w pracach [MP01, Hav02]. Mogliśmy się przekonać, że konsekwencją kwantowej teorii są właśnie korekty tego rodzaju. Korzystanie z rynkowych strategii kwantowych daje sposobność osiągania zysków w skalach czasowych znajdujących się poniżej progu charakterystycznego dla rynku efektywnego [MS01] (cząstka Browna). Logarytm ceny posiada tam wyżej przedstawione właściwości dochodzącej do stanu równowagi rynkowej cząstki Rayleigha. Choć hipoteza rynku efektywnego zakłada natychmiastową reakcję cen na nową informację rynkową, to bez wątplenia tempo przepływu informacji jest skończone (ograniczone z góry prędkością światła). Splątanie stanów kwantowych pozwala na stosowanie protokołu supergęstego kodowania<sup>24</sup>. Umożliwia on przekazanie jednym  $q$ -bitem dwóch bitów informacji, skraca więc tempo przepływu informacji o połowę, co pozwala wyprzedzić reakcję klasycznego rynku na nową informację i tym samym otwiera drogę do arbitrażu kwantowego, bazującego na powyższych dwóch mechanizmach kwantowych (subskala czasowa dochodzącej do klasycznej równowagi cząstki Rayleigha i splątanie). Dodatkowo kwantowy efekt Zenona spowalnia proces dochodzenia rynku do stanu efektywności. Cecha niepowielalności kwantowych strategii (*no cloning theorem*, zob. §2 rozdziału o targach kwantowych) zabezpiecza strategię przynoszącą zysk z takiego arbitrażu przed przejęciem.

---

<sup>24</sup> zob. [NC00] i rozdział 20

## Targi kwantowe

“Well, now that we HAVE seen each other,”  
said the Unicorn, “if you’ll believe in me, I’ll  
believe in you. Is that a bargain?”

*Through the Looking Glass*

W minionej dekadzie, głównie za sprawą pojawienia się ekonofizyki, na tyle uległ zmianie paradygmat ekonomii, że np. ekonomiści analizują rolę zasady nieokreśloności Heisenberga w [Bla99], czy nie wzdragają się przed postawieniem w tytule swojego artykułu zaskakującej tezy, która głosi, że mechanika kwantowa i ekonomia matematyczna są izomorficzne [Lam00]. W kontekście badań nad komputerami kwantowymi pojawiły się prace<sup>1</sup> rozszerzające koncepcje teorii gier na dziedzinę mechaniki kwantowej. Wśród istniejących różnorodnych ilościowych metod naukowych tylko teoria kwantów nie pozwala abstrahować od fenomenu świadomości, będącego immanentnym obiektem nauk społecznych<sup>2</sup>. Wydaje się więc, że objęcie zagadnień dotyczących podstawowych zjawisk rynkowych modelami specyficznymi dla mechaniki kwantowej ma w zainteresowanym środowisku naukowym szansę akceptacji większą, niż kiedykolwiek wcześniej. Jedynie wnikliwe badania mogą rozstrzygnąć kwestię na ile ekonomia jest, bądź może się stać, kwantowa.

W rozdziale 15 zarysowana została ogólna charakterystyka kwantowych gier rynkowych ( $q$ -gier rynkowych). Spośród  $q$ -gier rynkowych możemy wyodrębnić  $q$ -transakcje, tj. te  $q$ -gry, które cechują się brakiem zinstytucjonalizowanej izby rachunkowej. Kwantowe targi ( $q$ -targi) są szczególnym typem  $q$ -transakcji. Do  $q$ -transakcji zaliczymy także  $q$ -aukcje, którym poświęcony jest następny rozdział tej książki.

Uczestnicy  $q$ -targu, zwani dalej Alicją (A) i Billem (B), prowadzą pomiędzy sobą negocjacje. Przyjmujemy, że z góry założyli, kto z nich występuje w roli kupującego (Alicja), a kto chce sprzedać towar (Bill). Nie spełniające tego założenia dwustronne  $q$ -targi wymagają odrębnego zbadania. Celem Alicji i Billa jest ustalenie wysokości ceny, przy której ewentualnie dochodzi do wymiany pomiędzy nimi określonego dobra. Dlatego w  $q$ -targach właściwym dla  $q$ -gry

<sup>1</sup>np. [EWL99]

<sup>2</sup>zob. [Agu01]

rynkowej przyrządem pomiarowym jest para uczestników  $q$ -targu. W przeciwieństwie do  $q$ -targów, w  $q$ -aukcjach przyrządem pomiarowym jest tylko jedna strona  $q$ -transakcji, tj. inicjator aukcji.

### § 1. Sfera Riemanna stanów polaryzacji Alicji

Przez *przestrzeń stanów polaryzacji* strategii Alicji będziemy rozumieć jednowymiarową zespoloną prostą rzutową  $\mathbb{C}P^1$ , której punkty (czyli polaryzacje, zwane także  $q$ -bitami [Ber96]) sparametryzujemy jednorodnymi zespolonymi współrzędnymi rzutowymi  $\xi = (\xi_0, \xi_1)$ . Obrazuje ona dwuwymiarową zespoloną przestrzeń Hilberta  $\mathcal{H}_s$ , w której określiliśmy pewną bazę ortonormalną ( $|0\rangle, |1\rangle$ ),  $|\xi\rangle = \xi_0|0\rangle + \xi_1|1\rangle \in \mathcal{H}_s$  – więc iloczyn skalarny wektorów  $|\xi'\rangle, |\xi''\rangle \in \mathcal{H}_s$  wyraża się wzorem

$$(18.1) \quad \langle \xi' | \xi'' \rangle = \bar{\xi}'_0 \xi''_0 + \bar{\xi}'_1 \xi''_1 = \bar{\xi}'' \cdot \xi'$$

(gdzie  $\bar{\xi}_k$ ,  $k = 0, 1$  jest liczbą zespoloną sprzężoną do  $\xi_k$ ) oraz utożsamiliśmy proporcjonalne do siebie elementy  $|\xi\rangle$  i  $t|\xi\rangle$  ( $t \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ). Przechodząc do współrzędnych jednorodnych do niejednorodnych  $\underline{\xi} = (\xi_0, \xi_1) \rightarrow (1, z = \frac{\xi_1}{\xi_0})$ ,  $(0, \xi_1) \rightarrow \infty$  możemy na przestrzeń  $\mathbb{C}P^1$  patrzeć jak na domkniętą płaszczyznę Gaussa  $\bar{\mathbb{C}}$ . Współrzedną zespoloną  $z \in \bar{\mathbb{C}}$  możemy opisywać także punkty rzeczywistej, dwuwymiarowej sfery  $S_2$ . W tym celu wykorzystujemy określoną następującym równaniem suriekcję  $\mathcal{H}_s \rightarrow S_2$

$$(18.2) \quad S_2 \ni (x_1, x_2, x_3) =: \vec{r}(\xi) = \frac{\langle \xi | \vec{\sigma} \xi \rangle}{\langle \xi | \xi \rangle},$$

gdzie  $\vec{\sigma} := (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  jest trójką macierzy Pauliego [Dir64],  $\sigma_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,

$\sigma_2 := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\sigma_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ . Zbiór macierzy  $\{\sigma_k\}_{k=1, \dots, 3}$ , uzupełniony macie-

rzą jednostkową  $\sigma_0 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , generuje algebrę *kwaternionów* [Enc97]. Od-

wzorowanie (18.2) wyznacza bijekcję  $\bar{\mathbb{C}} \rightarrow S_2$ , zwaną *parametryzacją Cayley-Kleina*. W zależności od potrzeb stosujemy wymiennie te trzy  $\mathbb{C}P^1 \simeq \bar{\mathbb{C}} \simeq S_2$  równoważne obrazy przestrzeni stanów polaryzacji. Musimy jednak pamiętać, że operacja dodawania stanów, potrzebna przy opisie zjawisk kwantowych, mogących zachodzić na kilka alternatywnych sposobów<sup>3</sup>, powinna być przeprowadzana na poziomie jednorodnych współrzędnych rzutowych stanów polaryzacji, czyli w przestrzeni  $\mathcal{H}_s$ . Prawdopodobieństwo pomiaru w stanie  $|\xi'\rangle$  strategii o

<sup>3</sup>patrz np. [Ber96]

polaryzacji  $|\xi''\rangle$ , które w teorii kwantowej jest kwadratem modułu iloczynu skalarnego (18.1) unormowanych wektorów  $|\xi'\rangle$  i  $|\xi''\rangle$ , wyraża się za pomocą kąta  $\alpha$ , wyznaczonego przez odpowiadające tym polaryzacjaom wektory jednostkowe  $\vec{r}'(\xi')$ ,  $\vec{r}'(\xi'') \in \mathbb{R}^3$  (należące do  $S_2$ ) następująco:

$$\frac{|\langle \xi' | \xi'' \rangle|^2}{\langle \xi' | \xi' \rangle \langle \xi'' | \xi'' \rangle} = \frac{1 + \vec{r}'(\xi') \cdot \vec{r}'(\xi'')}{2} = \cos^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Jednak pojedynczy pomiar na pytanie, czy strategia  $|\xi''\rangle$  ma polaryzację  $|\xi'\rangle$ , daje zawsze odpowiedź zerojedynkową, o wartości informacyjnej jedynie jednego bitu.

Punkty sfery Riemanna  $z \in \overline{\mathbb{C}}$  możemy utożsamić z operatorami rzutowymi  $P_{\vec{r}}$ , działającymi w przestrzeni Hilberta  $\mathcal{H}_s$  następująco  $P_{\vec{r}(\xi)}|\xi'\rangle := \frac{\langle \xi | \xi' \rangle}{\langle \xi | \xi \rangle} |\xi\rangle$ , które zwykło się zapisywać w postaci symbolicznego wyrażenia  $P_{\vec{r}(\xi)} = \frac{|\xi\rangle\langle \xi|}{\langle \xi | \xi \rangle}$ . W bazie ortonormalnej ( $|0\rangle, |I\rangle$ ) projektory te mają postać macierzy  $P_{\vec{r}}$

$$(18.3) \quad P_{\vec{r}} = \frac{I + \vec{r}' \cdot \vec{\sigma}}{2},$$

gdzie  $I$  jest macierzą jednostkową. To przedstawienie operatorów rzutowych w  $\mathcal{H}_s$  zwane jest *parametryzacją Stokesa* [Kho80]. Tak więc parametryzacja Stokesa (18.3) jest odwzorowaniem  $S_2 \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ , odwrotnym do parametryzacji Cayley-Kleina (18.2).

Stan polaryzacji strategii Alicji  $|\xi\rangle_A \in \mathcal{H}_{sA}$ , zinterpretujemy następująco. Alicja posiada polaryzację  $I$  (znajduje się w stanie  $|\vec{r}'\rangle_A = |I\rangle$ ), jeśli w trakcie transakcji *formuluje ona warunki określającej ją umowy*. Dla prostego wariantu  $q$ -transakcji jakimi są  $q$ -targi oznacza to, że to ona składa propozycję cenową. W przeciwnym wypadku, *gdy jest ona stroną decydującą o tym, czy zawrzeć transakcję*, znajduje się w stanie polaryzacyjnym  $|0\rangle$ . Akceptuje, bądź nie, warunki proponowanej jej transakcji. Wektory ( $|0\rangle, |I\rangle$ ) tworzą bazę ortonormalną, rozpinającą przestrzeń  $\mathcal{H}_s$  możliwych stanów polaryzacji strategii Alicji. Przestrzeń stanów polaryzacji strategii Billa określamy w analogiczny sposób.

Zdarzenia, czyli punkty fizycznej czasoprzestrzeni Minkowskiego  $\{x_\mu\}_{\mu=0,\dots,3}$ , w której istnieją gracze, możemy przedstawiać w postaci dwuwymiarowych macierzy  $x\sigma := \sum_\mu x_\mu \sigma_\mu$ . Interwał czasoprzestrzenny zdarzeń, określających w układzie inercyjnego obserwatora wektor  $(x_\mu)$ , wynosi  $|x_\mu| := x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$  i jest równy wyznacznikowi macierzy  $x\sigma$ . W tej kwaternionowej reprezentacji zdarzeń czasoprzestrzennych zachowująca ich pseudometrykę *właściwa grupa Lorentza*  $SO_0^\uparrow(3, 1)$  (obejmująca zachowujące kierunek upływu czasu i orientację czasoprzestrzenną izometrię przestrzeni Minkowskiego [PR85]) jest grupą homografii  $x\sigma \rightarrow g^{-1}x\sigma g$ ,  $g \in PSL(2, \mathbb{C})$ . Izomorfizm  $SO_0^\uparrow(3, 1) \simeq PSL(2, \mathbb{C})$  stanowi fundament zastosowań rachunku spinorowego w fizyce [PR85].

Wyraźny w powyższym kontekście hipotetyczny związek pomiędzy przestrzenią polaryzacji gracza, a jego *sferą niebieską* [PR85], sugerowany jednokową symetrią tych obiektów, wydaje się fascynującym zagadnieniem badawczym.




---

## § 2. Polaryzacja $q$ -targu

W języku fizyki strategie Alicji i Billa możemy nazwać *fermionami*, czyli obiektami teorii nie mogącymi występować jednocześnie w tym samym stanie<sup>4</sup>. To, z pozoru zaskakujące stwierdzenie, sprowadza się do spostrzeżenia, że do  $q$ -targu dochodzi jedynie wtedy, gdy dwie strony  $q$ -targu posiadają przeciwne polaryzacje (a i to nie gwarantuje zawarcia transakcji). W  $q$ -targu stany polaryzacyjne Alicji i Billa są więc splątane. Oznacza to, że redukcja stanu  $|\xi\rangle_A$  do stanu  $|I\rangle_A$  (czy do  $|0\rangle_A$ ) musi zawsze odpowiadać znalezieniu się Billa w stanie polaryzacyjnym  $|0\rangle_B$  (bądź, odpowiednio,  $|I\rangle_B$ ). Przestrzeń stanów polaryzacji  $q$ -targu jest więc izomorficzna przestrzeni stanów polaryzacji pojedynczego uczestnika  $q$ -targu  $\mathbb{C}P^1$ . Przestrzeń współrzędnych jednorodnych dla stanów polaryzacji  $q$ -targu (dwuwymiarową przestrzeń Hilberta  $\mathcal{H}_s \subset \mathcal{H}_{sA} \otimes \mathcal{H}_{sB}$ ) rozpinają ortonormalne wektory  $|10\rangle := |I\rangle_A|0\rangle_B$  i  $|01\rangle := |0\rangle_A|I\rangle_B$ . Rozważane  $q$ -targi są więc, tak jak składające się na nie polaryzacje strategii Alicji czy Billa,  $q$ -bitami. Na poziomie opisu zjawiska w jego współrzędnych jednorodnych proces rynkowy prowadzący do  $q$ -targu jest rzutowaniem  $P_{|I\rangle} : \mathcal{H}_{sA} \otimes \mathcal{H}_{sB} \rightarrow \mathcal{H}_s$ . Wynik rzutowania zależy od wyboru bazy ( $|0\rangle, |I\rangle$ ) (wystarczy wskazać wektor  $|0\rangle$ , który, z dokładnością do czynnika fazowego, wyznacza ortogonalny do niego, unormowany wektor  $|I\rangle$ ). Przyjmijmy naturalne założenie, że polaryzację  $q$ -targu jednoznacznie określa para jego uczestników.

**Klonowanie** Z rozważań przeprowadzonych w następnym paragrafie wynika, że stan  $q$ -targu  $|01\rangle$  jest korzystniejszy dla Alicji niż stan  $|10\rangle$ . Umiejętność replikacji wektora bazowego  $|0\rangle$  pozwoliłaby Alicji unikać sytuacji znalezienia się w stanie  $|10\rangle$ . Ponieważ klonowanie stanu w ramach mechaniki kwantowej jest niemożliwe [WZ82], dopiero kwantowa natura targu czyni tą grę nietrywialną, a co za tym idzie i atrakcyjną. Prześledźmy za Wootterssem i Żurkiem, jak prostą konsekwencją założeń teorii jest to stwierdzenie. Jeśli przez  $|\Psi^*\rangle$  oznaczmy kwantowomechaniczny stan hipotetycznego urządzenia umożliwiającego klonowanie, w jakim znajduje się ono przed tym zabiegiem,




---

<sup>4</sup>strategie graczy, którzy uczestniczą w innej niż  $q$ -targ transakcji, nie muszą być fermionami (patrz rozdział 15)

to operacja klonowania  $K$  powinna mieć postać

$$(18.4) \quad K|\Psi^*\rangle|\xi\rangle_1 = |\Psi_\xi\rangle|\xi\rangle_1|\xi\rangle_2$$

i jak każda ewolucja kwantowa musiałaby być operacją liniową (każda ewolucja kwantowa, nie niszcząca informacji o układzie, jest operacją unitarną [BF75]). Stan klonującego urządzenia po tym zabiegu, czyli  $|\Psi_\xi\rangle$  może (lecz nie musi) zależeć od stanu klonowanego obiektu — dlatego w jego oznakowaniu występuje indeks  $\xi$ . W szczególnych przypadkach własność (18.4) przybierze postać

$$K|\Psi^*\rangle|0\rangle_1 = |\Psi_0\rangle|0\rangle_1|0\rangle_2 \quad \text{lub} \quad K|\Psi^*\rangle|I\rangle_1 = |\Psi_I\rangle|I\rangle_1|I\rangle_2.$$

Korzystając z liniowości hipotetycznej operacji  $K$ , dla dowolnej kombinacji liniowej tych dwóch wyrażań otrzymamy następującą równość

$$(18.5) \quad K|\Psi^*\rangle(\lambda_0|0\rangle_1 + \lambda_1|I\rangle_1) = \lambda_0|\Psi_0\rangle|0\rangle_1|0\rangle_2 + \lambda_1|\Psi_I\rangle|I\rangle_1|I\rangle_2,$$

gdzie  $\lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{C}$ . Jednak powyższe równanie nie może być spełnione, gdyż nie może istnieć liniowa operacja  $K$  o własności (18.4)). Jeśli  $|\Psi_0\rangle \neq |\Psi_I\rangle$ , to prawa strona równania (18.5) jest mieszaniną stanów ( $|\Psi\rangle$  jest stanem klasycznym), której nie sposób uzyskać przy pomocy kwantowej ewolucji stanu czystego, gdyż po operacji  $K$  wzrasta entropia tego układu do wartości różnej od zera. Gdy zaś  $|\Psi_0\rangle = |\Psi_I\rangle =: |\Psi\rangle$ , to po prawej stronie (18.5), równej  $|\Psi\rangle(\lambda_0|0\rangle_1|0\rangle_2 + \lambda_1|I\rangle_1|I\rangle_2)$  brakuje składnika  $\lambda_0\lambda_1(|0\rangle_1|I\rangle_2 + |I\rangle_1|0\rangle_2)$ , który powinien się tam pojawić z uwagi na własność klonowania (18.4).





Kolejny rozdział (§3.1) przedstawia dualną do niemożliwości klonowania własność kwantowej teorii. Uniemożliwia ona manipulacje związane z odsuwaniem od gry tych uczestników, którzy posługują się jednakowymi strategiami czystymi.

W następnym paragrafie odnajdziemy dalsze uwagi dotyczące klonowania strategii rynkowej. Mimo iż unikalny (niemożliwy do powielenia), to stan polaryzacyjny uczestnika  $q$ -targu jest przemieszczalny. Stosując klasyczny i kwantowy kanał komunikacji, możemy przy pomocy metody teleportacji (zob. rozdz. 20 §7) przekazać w miejsce odbywania się innego  $q$ -targu  $q$ -bit polaryzacji Alicji. W ten sposób zamiast z Billem, Alicja może podjąć  $q$ -targ z Celiną, jednak nie zdoła prowadzić obydwu targów jednocześnie, powiększając w ten sposób własne zyski. W kontekście powszechnie panującego przekonania o niepodzielności uwagi ta kwantowa własność targu wydaje się naturalna.

**Nietranzytywność dominacji** Powiemy, że w trakcie trwania  $q$ -targu o polaryzacji  $|0\rangle$  polaryzacja Alicji  $|\xi\rangle_A$  *dominuje* nad polaryzacją Billa  $|\xi\rangle_B$  ( $|\xi\rangle_A \succ |\xi\rangle_B$ ) wtedy i tylko wtedy, gdy prawdopodobieństwo znalezienia się w stanie  $|0\rangle$  jest większe dla Alicji niż dla Billa

$$|\xi\rangle_A \succ |\xi\rangle_B \Leftrightarrow \frac{|\langle 0|\xi\rangle_A|^2}{A\langle \xi|\xi\rangle_A} > \frac{|\langle 0|\xi\rangle_B|^2}{B\langle \xi|\xi\rangle_B} \Leftrightarrow x_{3A} < x_{3B}.$$

Użycie słowa „dominacja” dla określenia powyższej relacji znajduje uzasadnienie w asymetrii zysków osiągalnych przez jednego uczestnika  $q$ -targu, kolejno w polaryzacjach  $|0\rangle$  i  $|I\rangle$ . Analizie tych zysków zostanie poświęcony następny paragraf bieżącego rozdziału. Oczywiście, dla jednakowej polaryzacji  $q$ -targów, relacja dominacji jest przechodnia. Dla trzech podmiotów: Alicji, Billa i Celinny, gdy każda para tworzy  $q$ -targ, zaś polaryzacje tych  $q$ -targów są takie same, mamy

$$(|\xi\rangle_A \succ |\xi\rangle_B \text{ i } |\xi\rangle_B \succ |\xi\rangle_C) \Rightarrow |\xi\rangle_A \succ |\xi\rangle_C.$$

Dla takich sytuacji istnieje niekwantowy model statystyczny [Kho80], który prowadzi do wyników identycznych, jak omawiane w tym rozdziale  $q$ -targi. Jednak w sytuacjach, gdy polaryzacje  $q$ -targów nie są wymuszone na ich uczestnikach kulturowymi więzami, czy wstępną umową, polaryzacje różnych  $q$ -targów są zazwyczaj różne, więc może zachodzić sytuacja, gdy:

$$|\xi\rangle_A \succ |\xi\rangle_B \text{ i } |\xi\rangle_B \hat{\succ} |\xi\rangle_C \text{ i } |\xi\rangle_C \hat{\succ} |\xi\rangle_A.$$

Dla różnych polaryzacji strategii Alicji, Billa i Celinny skrajnym przykładem jest tu sytuacja, gdy  $|\xi\rangle_A \sim |0\rangle$ ,  $|\xi\rangle_B \sim |\widehat{0}\rangle$  i  $|\xi\rangle_C \sim |\widehat{0}\rangle$ , znana np. z popularnej gry *papier, kamień, nożyce* (RSP). Gdy dominowanie w  $q$ -targu rzutuje na asymetrię zysków stron biorących w nim udział, patrz paragraf 4, wtedy inwestorzy nabywający, bądź zbywający akcje jednej z trzech spółek handlowych: Alicji, Billa czy Celinny, mogą być postrzegani jako gracze w grę RSP. Kwantowy wariant RSP został rozważony w pracy [IT01], gdzie wykazano istnienie dla tej gry stabilnej

równowagi Nasha, nie występującej w klasycznej wersji RSP. Także nietranzytywność obserwowanych w praktyce targowania relacji dominacji stanowi argument za stosownością posługiwania się w matematycznym opisie targów formalizmem kwantowym. Ograniczony charakter nietranzytywności klasycznych modeli stochastycznych został przedstawiony w pracy [Pio00]. Zgodność przedstawionego formalizmu z obserwowanymi procesami targów powinna zostać zweryfikowana na drodze empirycznej. Jednak nic nie stoi na przeszkodzie, by omawiane tu  $q$ -targi realizować za pomocą stosownego kwantowego oprzyrządowania. Wtedy po obydwu stronach  $q$ -targu mogłyby uczestniczyć koalicje, których stan stanowiłby superpozycję stanów reprezentujących członków koalicji. Badanie takiego rodzaju  $q$ -transakcji wymaga opracowania.

---

### § 3. Warunek racjonalności decyzji o dobieciu targu

Przypomnijmy, że strategię Alicji, prócz stanu jej polaryzacji  $|\xi\rangle_A \in \mathcal{H}_{sA}$ , charakteryzuje popytowo-podażowy składnik  $|\psi\rangle_A \in \mathcal{H}_A$ , opisany w rozdziale 15. Stan  $q$ -targu  $|\Psi\rangle = |\xi\rangle|\psi\rangle_A|\psi\rangle_B$  jest elementem iloczynu tensorowego przestrzeni Hilberta  $\mathcal{H}_s \otimes \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ . Rozważmy sytuację, w której, Alicja ma zamiar nabyć towar po cenie  $c$ . Zmienna losowa  $q := -\ln c$  mierzy ewentualny zysk, jaki odniosłaby Alicja, która nabyła by towar za tę cenę. Wyrażając to spostrzeżenie bardziej precyzyjnie, zachowująca się addytywnie względem cen logarytmiczna stopa zysku  $\ln \frac{c_0}{c} = \ln c_0 - \ln c$  mierzy zysk Alicji w sytuacji, gdy towar, który nabyła za cenę  $c$  przedstawia dla niej wartość  $c_0$ . W analogicznej sytuacji, w której Bill pragnie sprzedać towar po cenie  $c$ , jego potencjalny zysk z takiej transakcji mierzy zmienna losowa  $p := \ln c$ . Podaż towaru, za który kupiec otrzymuje określoną ceną  $c$  ilość pieniądza, możemy postrzegać jako popyt na pieniądz za który „płaci się” określoną ilością towaru, zgodnie z wyrażoną towarem ceną pieniądza  $c^{-1}$ . Dlatego brak minusa przy logarytmie ceny w definicji zmiennej losowej  $p$  (w odniesieniu do definicji  $q$ ) wynika z symetrii opisu, która wymaga by zmienna losowa  $p$  była podażowym odpowiednikiem popytowej zmiennej losowej  $q$  ( $-\ln c = \ln c^{-1}$ ).

Warto tu przestrzec przed niewłaściwym wyobrażeniem iluzorycznej możliwości sklonowania strategii gracza (patrz poprzedni paragraf), zwykle spowodowanym pomyleniem dziedziny strategii-funkcji falowej  $\langle q|\psi\rangle$  (czy  $\langle p|\psi\rangle$ ) z trójwymiarową przestrzenią zjawisk fizycznych. Prowadzenie niezależnych targów, w ten sam sposób, jednocześnie w dwóch miejscach fizycznych, nie jest przykładem multiplikacji strategii, gdyż ciągle na dziedzinie  $\{q\}$  (czy  $\{p\}$ ) mamy do czynienia z jedną funkcją falową, jedynie pomiar wykonywany jest dwukrotnie. Osiągnięty tym sposobem zysk nie jest sumą zysków składowych lecz

średnią, ważoną wartościami składników kapitałowych. Logarytm ceny wyznacza procent składany zysku, a on dotyczy jedynie proporcji, więc nie ulega zmianie np. na skutek sprzedaży po atrakcyjnie wysokiej cenie podwójnej ilości wcześniej nabytego odpowiednio tanio dobra. Zwielokrotnienie zysków Alicji w ustalonym interwale czasowym jest jednak możliwe poprzez wykorzystanie mechanizmu oscylatora finansowego, patrz rozdział 6. Dla realizacji tego celu Alicja musi mieć możliwość doprowadzenia do sytuacji nachodzenia na siebie okresów ważności obligacji zbywalnych, nabytych przez nią w  $q$ -targach, prowadzonych w różnych przedziałach czasowych. Jednak w przypadku stosowania tego typu dźwigni finansowej nie możemy mówić o klonowaniu, gdyż w owej złożonej sekwencji transakcji przystąpienie do kolejnego targu następuje po zakończeniu poprzedniego, którego rozliczenie jest jedynie odroczone.

Zgodnie z probabilistycznym postulatem mechaniki kwantowej, gęstość prawdopodobieństwa pojawienia się konkretnej wartości (charakteryzującej gracza rynkowego) zmiennej losowej, np. w przypadku Alicji wartości  $q$  zmiennej losowej  $q$ , równa jest kwadratowi modułu unormowanej do jedności jego strategii-funkcji falowej

$$(18.6) \quad \frac{|\langle q|\psi\rangle_A|^2}{{}_A\langle\psi|\psi\rangle_A} dq.$$

W fizyce unormowanie to jest następstwem przyjęcia prawa zachowania bytu materialnego cząstki: *istniejąca cząstka musi zostać gdzieś zarejestrowana*. Tym sposobem charakteryzujące każdego gracza rynkowego stwierdzenie, że *skłonienie go do targu jest jedynie kwestią ceny* okazuje się odpowiednikiem niemożliwości zaobserwowania tajemniczego znikania cząstek. Stwierdzenie uczestnictwa w rynku danego podmiotu nie następuje dzięki jakimkolwiek jego deklaracjom, lecz możliwe jest jedynie pośrednio, poprzez zaobserwowanie (pomiar) faktu zawarcia transakcji. Podobnie jak istnienie fotonu stwierdzamy opierając się jedynie na informacji o jego absorpcji przez detektor.

Konsekwencją użycia miary (18.6) jest spostrzeżenie, że gęstość prawdopodobieństwa wystąpienia określonych zamiarów handlowych Alicji i Billa, wyrażonych odpowiednio zmiennymi losowymi  $q$  i  $p$ , wynosi

$$(18.7) \quad \frac{|\langle q|\psi\rangle_A|^2}{{}_A\langle\psi|\psi\rangle_A} \frac{|\langle p|\psi\rangle_B|^2}{{}_B\langle\psi|\psi\rangle_B} dqdp,$$

gdzie  $\langle q|\psi\rangle_A$  jest amplitudą prawdopodobieństwa wystąpienia zamiaru cenowego  $q$  u kupującej Alicji, która posługuje się w trakcie  $q$ -targu podażyowo-popytowym składnikiem strategii, stanowiącym wektor  $|\psi\rangle_A \in \mathcal{H}_A$ . Analogicznie interpretujemy związaną z Bille amplitudę  $\langle p|\psi\rangle_B$ . Jednak nie zawsze zamiary  $q$  i  $p$  doprowadzą do zawarcia transakcji. W sytuacji polaryzacji  $|10\rangle$ , gdy Alicja proponując  $q$  określi cenę transakcyjną na poziomie  $c = e^{-q}$ , Bill zaakceptuje ją jedynie wtedy, gdy  $p \leq -q$ , czyli gdy zamierzona przez niego cena  $e^p$  będzie niewiększa niż  $e^{-q}$ . Symetria  $(q, p, c) \rightarrow (p, q, c^{-1})$  dyktuje warunek

akceptacji Alicji dla polaryzacji  $|01\rangle$ . Do transakcji dojdzie jedynie wtedy, gdy Alicja wyda na towar nie więcej niż zaplanowała  $p \leq -q$ . Tak więc warunek racjonalności decyzji o dobieciu targu nie zależy od polaryzacji i ma postać nierówności

$$(18.8) \quad q + p \leq 0.$$

Oczywiście, gdybyśmy przyjęli konwencję przeciwną, w której zmienna  $q$  mierzy zyski nie Alicji, lecz kupca z nią handlującego i odpowiednio skorygowali definicję  $p$ , wtedy warunek (18.8) przybrałby postać  $q + p \geq 0$ .

Logarytm ceny transakcyjnej  $\ln c$  jest zmienną losową  $-q$ , bądź  $p$ , w zależności od tego, czy  $q$ -transakcja znajduje się w polaryzacji  $|10\rangle$  czy w polaryzacji  $|01\rangle$ , ograniczoną do sytuacji w których spełniony jest warunek (18.8). Dlatego, by otrzymać w stanie  $|10\rangle$  jej (jeszcze nienormowany) rozkład ucięty, musimy wycałkować gęstość (18.7) pomnożoną przez funkcję  $[q + p \leq 0]$ , po zmiennej  $p$

$$(18.9) \quad \int_{-\infty}^{\infty} [q + p \leq 0] \frac{|\langle p|\psi\rangle_B|^2}{B\langle\psi|\psi\rangle_B} dp \frac{|\langle q|\psi\rangle_A|^2}{A\langle\psi|\psi\rangle_A} dq \Big|_{q=-\ln c} = \\ = \int_{-\infty}^{\ln c} \frac{|\langle p|\psi\rangle_B|^2}{B\langle\psi|\psi\rangle_B} dp \frac{|\langle -\ln c|\psi\rangle_A|^2}{A\langle\psi|\psi\rangle_A} d\ln c.$$

Analogiczny rachunek prowadzi do nienormowanej funkcji rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej  $\ln c$  dla polaryzacji  $|01\rangle$

$$(18.10) \quad \int_{-\infty}^{\infty} [q + p \leq 0] \frac{|\langle q|\psi\rangle_A|^2}{A\langle\psi|\psi\rangle_A} dq \frac{|\langle p|\psi\rangle_B|^2}{B\langle\psi|\psi\rangle_B} dp \Big|_{p=\ln c} = \\ = \int_{-\infty}^{-\ln c} \frac{|\langle q|\psi\rangle_A|^2}{A\langle\psi|\psi\rangle_A} dq \frac{|\langle \ln c|\psi\rangle_B|^2}{B\langle\psi|\psi\rangle_B} d\ln c.$$

---

#### § 4. Model $q$ -targów Alicji z resztą świata



Należy tu przynajmniej zasygnalizować potrzebę zbadania stanów równowagi Nasha [MW00] dla kwantowej gry uczestników  $q$ -targu, zmieniających polaryzację  $q$ -targu przez stosowanie taktyk, będących unitarnymi homografiemi na zespolonych prostych rzutowych odpowiednio  $\mathbb{C}P_A^1$  i  $\mathbb{C}P_B^1$ . My skoncentrujemy się jedynie na taktyce zmiany cenowej charakterystyki strategii uczestnika  $q$ -targu<sup>5</sup>, badając jej wpływ na osiągnięte przez niego korzyści.

---

<sup>5</sup>Łatwo jest zauważyć, że taktyka ta jest odwzorowaniem unitarnym

Dla zilustrowania przebiegu  $q$ -targu, i przedstawienia możliwych zysków, jakie mogą z niego wynikać, rozważmy następujący prosty model  $q$ -targu. Załóżmy, że Alicję charakteryzuje popytowo-podażowa funkcja falowa, będąca stanem własnym operatora popytu. Wtedy gęstość prawdopodobieństwa  $\frac{|\langle q|\psi\rangle_A|^2}{\langle\psi|\psi\rangle_A}$  występująca we wzorach (18.9) i (18.10) przyjmuje postać delty Diraca  $\delta(q, a)$ , co oznacza strategię „kupuję jedynie wtedy, gdy cena  $c$  jest niższa niż  $e^{-a}$ ” (z tego powodu wartość  $e^{-a}$  możemy nazwać ceną rezygnacji). Niech Celina reprezentuje strategię RŚ<sup>6</sup>, czyli rynku na którym interesujące Alicję dobro spełnia prawo podaży (nie jest *giffenem*). W tej sytuacji, zgodnie z twierdzeniem omówionym w rozdziale 15, gęstość prawdopodobieństwa  $\frac{|\langle p|\psi\rangle_{RŚ}|^2}{\langle\psi|\psi\rangle_{RŚ}}$  jest rozkładem Gaussa. Wybierając odpowiednie wielkości jednostek towaru dla których określana jest jego cena i przeskalowując zmienną  $p \rightarrow \sigma p$ , gdzie  $\sigma$  jest dyspersją rozkładu Gaussa, możemy przyjąć, że rozkład ten ma postać standaryzowanego rozkładu normalnego  $\eta(p)$ . Formuły (18.9) i (18.10) przybierają teraz następującą postać:

$$(18.11) \quad \int_{-\infty}^{\ln c} \eta(p) dp \delta(\ln c + a, 0) d \ln c$$

i

$$(18.12) \quad [\ln c + a \leq 0] \eta(\ln c) d \ln c.$$

Całki po  $\ln c \in (-\infty, \infty)$  wyrażeń (18.11) i (18.12) są równe prawdopodobieństwu zawarcia  $q$ -transakcji  $E([\ln c + a \leq 0])$  (jednakowym w obydwu przypadkach polaryzacji  $|10\rangle$  i  $|01\rangle$ ). Pamiętamy z rozdziału 14, że czas oczekiwania na zawarcie transakcji  $t$  jest zmienną losową o rozkładzie geometrycznym i nie zależy od polaryzacji. Jego wartość oczekiwana wynosi

$$(18.13) \quad \begin{aligned} E(t) &= (1 + E([\ln c + a \leq 0]) \sum_{k=1}^{\infty} k (1 - E([\ln c + a \leq 0]))^{k-1}) \theta = \\ &= (1 + (E([\ln c + a \leq 0]))^{-1}) \theta, \end{aligned}$$

gdzie  $\theta$  jest charakterystycznym czasem trwania pojedynczego  $q$ -targu w modelu racjonalnego kupca. We wzorze (18.13) uwzględniono także czas potrzebny Alicji na sprzedanie dobra, który jest równy  $\theta$ , co jest konsekwencją kwantowej interpretacji<sup>7</sup> strategii Alicji  $\delta(q, a)$ . Parametrem mierzącym wielkość osiągalnego przez Alicję zysku w sekwencji jednakowych  $q$ -targów jest natężenie zysku, równe ilorazowi wartości oczekiwanej wziętego ze znakiem minus logarytmu ceny transakcyjnej i średniego czasu oczekiwania na zawarcie transakcji  $E(t)$ .

<sup>6</sup>patrz rozdział 15

<sup>7</sup>patrz rozdział 15

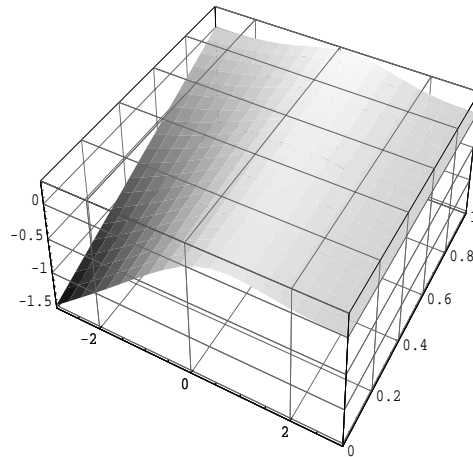
Wynosi ono

$$(18.14) \quad - \frac{p_{10}E_{10}(\ln c) + (1 - p_{10})E_{01}(\ln c)}{E(t)},$$

gdzie  $p_{10} := |\langle 10|10 \rangle|^2$  jest prawdopodobieństwem zajścia transakcji przy polaryzacji  $|10\rangle$ . Rozkłady (18.11) i (18.12) nie są unormowane, więc występujące w liczniku natężenia zysku (18.14) uśredniania  $E_{10}()$  i  $E_{01}()$  należy wykonać odpowiednio z unormowanymi rozkładami (18.11) i (18.12), czyli z  $\delta(\ln c + a, 0) d \ln c$  i  $\frac{[\ln c + a \leq 0]}{E([\ln c + a \leq 0])} \eta(\ln c) d \ln c$ . Wykorzystując we wzorze (18.14) formułę (18.13) oraz mnożąc licznik i mianownik przez wyrażenie  $E([\ln c + a \leq 0])$ , otrzymamy następującą funkcję  $\rho(a)$ , opisującą natężenie zysku Alicji w jednostkach  $\theta$

$$(18.15) \quad \rho(a) = \frac{\int_{-\infty}^{-a} (p_{10}a - p_{01}x) \eta(x) dx}{1 + \int_{-\infty}^{-a} \eta(x) dx}.$$

W sytuacji, gdy RŚ zawsze podejmuje decyzję akceptującą zawarcie transak-



Rysunek 18.1. Natężenie zysku Alicji w  $q$ -targu z RŚ jako funkcja logarytmu jej ceny rezygnacji  $a \in [-2.5, 2.5]$  i prawdopodobieństwa  $p_{01}$  znalezienia się  $q$ -targu w stanie polaryzacyjnym  $|01\rangle$ .

cji ( $p_{10} = 1$ ) maksymalne natężenie zysku, jakie Alicja może osiągnąć, wynosi 0.14028 i odpowiada ono logarytmowi ceny rezygnacji  $a$  równemu 0.85096. Jeśli RŚ zawsze proponuje cenę transakcji, maksymalne natężenie zysku Alicji jest osiągalne dla strategii  $a = 0.27063$ .

Pamiętamy z rozdziału 14, że wartość ta ma unikalną własność – jest punktem stałym funkcji  $\rho(a)$ , przyciągającym na całej dziedzinie. Dlatego, przy polaryzacji  $|01\rangle$  i braku wiedzy o parametrach rozkładu normalnego charakteryzującego strategię RŚ, najlepszą taktyką Alicji na osiągnięcie warunku  $a = 0.27063 \sigma$

okazuje się prosta i naturalna procedura iteracyjna  $\rho(a) \rightarrow a$ , prowadząca do samouzgadniającego się korygowania optymalnego logarytmu ceny rezygnacji  $a$ . W przedstawionym  $q$ -targu polaryzacja  $|01\rangle$  jest korzystniejsza dla Alicji od polaryzacji  $|10\rangle$ . Charakterystyczne cechy omawianej  $q$ -transakcji możemy zaobserwować na wykresie funkcji  $\rho = \rho(a, p_{10})$  widniejącym na załączonym rysunku. Gdy  $p_{01} = 1$  (tylni brzeg fałdy) każda wartość  $a$  przynosi Alicji przeciętne zyski większe od zera. Oczywiście przy drugiej skrajności, gdy polaryzacja  $q$ -targu jest  $|10\rangle$  (czyli  $p_{01} = 0$ , przedni brzeg fałdy), strategie  $a < 0$  przynoszą Alicji straty. Nic dziwnego, że w sytuacji rywalizacji konkurencyjnej pomiędzy sprzedawcami rynki zdominował model, w którym kupiec, chcąc dać klientowi lepszą pozycję targową, wystawia ceny na swoich towarach.

### § 5. Temperatury mieszanin $q$ -targów

W ogólnym przypadku opisywania  $q$ -targów przy pomocy strategii mieszanych stan  $q$ -targu jest operatorem gęstości prawdopodobieństwa  $\rho$ , określonym na przestrzeni  $\mathcal{H}_s \otimes \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ . Sytuacje, gdy polaryzacja  $q$ -targu nie zależy od wzajemnie niezależnych strategii mieszanych Alicji i Billa, powinniśmy opisywać sfaktoryzowaną postacią operatora gęstości  $\rho = \rho_s \rho_A \rho_B$ , gdzie  $\rho_s$  określony jest na  $\mathcal{H}_s$ ,  $\rho_A$  na  $\mathcal{H}_A$ , a  $\rho_B$  na  $\mathcal{H}_B$ . Stan polaryzacyjny  $q$ -targu  $\rho_s$  jest teraz mieszaniną (kombinacją wypukłą) odpowiadających punktom sfery  $S_2$  stanów czystych  $P_{\vec{r}}$ , którą możemy przedstawić w postaci

$$(18.16) \quad \rho_{\beta_s, \vec{r}} = \frac{e^{\frac{\beta_s}{2} \vec{r} \cdot \vec{\sigma}}}{\text{Tr}(e^{\frac{\beta_s}{2} \vec{r} \cdot \vec{\sigma}})} = \frac{1}{2} (I + \vec{r} \cdot \vec{\sigma} \tanh \frac{\beta_s}{2}),$$

gdzie  $\text{Tr}(\dots)$  jest operatorem śladu<sup>8</sup>, a odwrotność parametru  $\beta_s \in \mathbb{R}$  nazywana jest przez fizyków temperaturą spinową układu opisywanego operatorem gęstości  $\rho_{\beta_s, \vec{r}}$ . Powyższy zapis byłby prostszy po wykonaniu podstawienia  $\frac{\beta_s}{2} \rightarrow \beta_s$  jednak w przyjętej konwencji istnieje zgodność formuł ze standardowymi rachunkami, prowadzonymi w ramach dwuwymiarowej reprezentacji algebry  $\text{su}(2)$ . Ze wzoru (18.16) wynika, że graniczne postacie operatora  $\rho$  są projektorami

$$\lim_{\beta_s \rightarrow \infty} \rho_{\beta_s, \vec{r}} = \lim_{\beta_s \rightarrow -\infty} \rho_{\beta_s, -\vec{r}} = P_{\vec{r}}.$$

Dla jednoznaczności (poza środkiem  $K_2$ ) parametryzacji punktów kuli  $K_2$  współrzędnymi  $(\beta, \vec{r})$  przyjmujemy konwencję, że  $\beta_s \geq 0$ . Kombinacje wypukłe punktów sfery  $S_2$  tworzą kulę  $K_2$ , której brzegiem jest  $S_2$ . Każdy stan polaryzacyjny  $\rho_{\beta_s, \vec{r}}$  możemy utożsamić z punktem kuli  $\rho \in K_2$ . Prosta przechodząca przez ten

<sup>8</sup>śladem macierzy jest liczba równa sumie jej elementów diagonalnych

punkt i środek kuli przecina sferę  $S_2$  w dwóch antypodalnych punktach  $-\vec{r}$  i  $\vec{r}$ . Proporcje w jakich  $\rho$  dzieli odcinek  $\{-\vec{r}, \vec{r}\}$  wyznaczają dla dowolnego polaryzacyjnego stanu mieszanego wagi jego przedstawienia w postaci kombinacji wypukłej jedynie dwóch projektorów

$$\rho_{\beta_s, \vec{r}} = \frac{P_{\vec{r}}}{1 + e^{-\beta_s}} + \frac{P_{-\vec{r}}}{1 + e^{\beta_s}}.$$

Jeśli punkt  $r \in S_2$  odpowiada polaryzacji  $q$ -targu Konstrukcja ta pozostaje prawdziwa dla  $\beta = 0$ , gdy  $\rho$  jest środkiem  $K_2$ , jednak wtedy nie unikniemy charakterystycznej dla współrzędnych sferycznych wieloznaczności wyboru kierunku  $\vec{r}$ . Istnieje jeszcze jedna popularna wielkość, która zastępując temperaturę spinową może parametryzować stan polaryzacyjny. Jest nią entropia Shannona  $S$ , która dla stanu polaryzacyjnego wyraża się wzorem

$$S(\beta_s) = -\text{Tr}(\rho_{\beta_s, \vec{r}} \ln \rho_{\beta_s, \vec{r}}) = \frac{\ln(1 + e^{\beta_s})}{1 + e^{\beta_s}} + \frac{\ln(1 + e^{-\beta_s})}{1 + e^{-\beta_s}}.$$

Prócz określającej stan polaryzacyjny temperatury spinowej  $\beta_s^{-1}$  strategię uczestnika  $q$ -targu charakteryzuje temperatura ryzyka, będąca odwrotnością odpowiedniego mnożnika Lagrange'a  $\beta$ . W rozdziale 15 wykazano, że przypadku podażowo-popytowej części strategii RŚ, opisywanej rozkładem normalnym, związek pomiędzy dyspersją  $\sigma$  tego rozkładu a temperaturą  $\beta^{-1}$  jest następujący

$$\sigma^2 \operatorname{tgh} \frac{\pi \hbar_E \beta}{\theta} = \text{constans},$$

gdzie  $\hbar_E$  jest ekonomicznym odpowiednikiem stałej Plancka. W omawianym  $q$ -targu strategia Alicji miała zerową temperaturę (jej strategię możemy postrzegać jako granicę rozkładu normalnego z dyspersją  $\sigma$  zmierzającą do zera). Pozwalało jej to (przy racjonalnym zachowaniu) stosować arbitraż rynkowy. Jedynym taktiką-remedium na ograniczenie zysków przepływających od RŚ do Alicji jest zmniejszenie dyspersji  $\sigma$  strategii RŚ, czyli zmniejszenie jej temperatury  $\beta^{-1}$ . Na skutek tego zjawiska przesunie się w kierunku zera optymalna wartość parametru  $a$  strategii Alicji. By dojść do nowego optimum Alicja będzie musiała zastosować taktikę opartą na procedurze iteracyjnej, więc dyspersja jej strategii będzie większa od zera<sup>9</sup>. Proces ten przypomina przepływ ciepła z cieplejszego termostatu RŚ do chłodniejszego układu A. Skutkiem tego termostat ochładza się, a układ A ogrzewa, by potem obniżyć swoją entropię (a zatem także i temperaturę) w procesie iteracyjnego poznawania wartości nowego optimum dla parametru  $a$ .

Wprowadzając mechanizm sprzęgający stan polaryzacyjny strategii RŚ z jej częścią podażowo-popytową  $\eta(p)$ , będącą stosowną całką mieszaniny funkcji Wignera z wagami rozkładu Gibbsa, otrzymalibyśmy model analogiczny do

<sup>9</sup>czyli temperatura  $\beta_A^{-1}$  będzie większa od zera



fizycznego modelu układu spinowego oddziaływującego z termostatem fononowym [Pio83]. Użycie w badaniu takiego  $q$ -targu formalizmu charakterystycznego dla kwantowych, kwazirównowagowych procesów statystycznych, pozwoliłoby sformułować równania nieliniowe, opisujące dynamikę zmian temperatur ryzyka i temperatur spinowych. Badanie  $q$ -targu (czy zespołu powiązanych ze sobą  $q$ -targów), bez kontekstu dyktującego ceny rynkowe termostatu RŚ, wydaje się, z punktu widzenia opisu występujących na rynku zjawisk ekonomicznych, nazbyt abstrakcyjne. W obowiązującej kulturze rynkowej obyczaj handlowy zwykle z góry determinuje stan polaryzacji targu z RŚ (np. cena sprzedawcy). Dlatego interesujący opis zmian temperatury spinowej w  $q$ -transakcji możemy otrzymać dopiero w modelu z trzema podmiotami rynku: A, B i RŚ, gdzie A i B operują innymi strategiami względem siebie, niż względem RŚ. Minimalny rynkowy model dynamiczny  $q$ -targów jest więc czterowymiarowy, uwzględniający temperatury cechujące ryzyko A, B i RŚ oraz temperaturę spinową  $q$ -targu prowadzonego pomiędzy A i B.

Charakteryzująca polaryzację  $q$ -targu temperatura spinowa przypomina inny mnożnik Lagrange'a, związany ze strategią zarządzania portfelem kapitałowym, którego rolę analizowaliśmy w rozdziale 5. Taka sprzężona z logarytmiczną stopą zysku temperatura portfelowa, będąca już trzecim z kolei rodzajem temperatury procesu kapitałowego, pozwala porównywać umiejętności specjalistów inwestycyjnych, działających na różnych rynkach, w różnych okresach czasowych, i przy odmiennych warunkach koniunktury gospodarczej. Dla agresywnych procesów kapitałowych, gdy logarytmiczna stopa zysku traci własność addytywności, temperatury portfelowe mają niezerową część urojona (patrz rozdział 6). Wyżej rozważony  $q$ -targ Alicji z RŚ, zarówno w polaryzacji  $|01\rangle$  jak i w  $|10\rangle$ , można postrzegać jako strategię wielokrotnego kupna i sprzedaży pewnego papieru wartościowego, którego statystykę notowań logarytmu ceny określa rozkład normalny. Możemy więc wyznaczyć temperaturę portfelową dla strategii Alicji.

---

## § 6. Końcowe uwagi

Gdy Celina pośredniczy w targu pomiędzy Alicją i Billem w taki sposób, że np. najpierw dochodzi do  $q$ -targu pomiędzy A i C, a potem pomiędzy C i B, to możemy mówić o  $q$ -targu złożonym odbywającym się pomiędzy A i B. Pośrednicy w takim  $q$ -targu cechują się właściwościami filtrów rozważanych w kontekście znanych zjawisk mechaniki kwantowej. Istotą kwantowych  $q$ -targów złożonych z sieci pośredników byłoby zaniechanie rozliczeń transakcyjnych na

pośrednich etapach przepływu kapitałowego. Stwarzałyby to możliwość operowania superpozycjami amplitud, charakteryzujących stany zysków (logarytmów cen) i stany polaryzacyjne, złożonych  $q$ -targów.

Wyżej zarysowana zbieżność opisu  $q$ -targów i zjawisk fizyki ciała stałego pozwala przypuszczać, że  $q$ -targi mogłyby być prowadzone przy pomocy kwantowych automatów, działających w oparciu o mechanizmy dobrze znane fizykom. Koncepcja Rogera Penrose'a [Pen00], dotycząca mechanizmu myślenia, czyni prawdopodobną możliwość pojawiania się fenomenu  $q$ -targów na istniejących obecnie rynkach gospodarczych, gdzie metody zawierania transakcji oparte są na algorytmach nieobliczeniowych. Czy rola pośrednika w obrocie kapitałowym nie sprowadza się do funkcji polaryzatora ułatwiającego przeprowadzenie transakcji?

Jeśli, uwzględniając bardziej realistyczny rynek kilku dóbr, uogólnimy transakcje dotyczące jednego dobra i pieniądza, to  $q$ -targi na takim rynku będą dotyczyć wielu parametrów cenowych  $c_1, c_2, \dots$ . Rozszerzone w ten sposób  $q$ -targi mogą także modelować funkcjonowanie negocjacji, które bazują na wielokryterialnej ocenie proponowanych warunków.

Już 800 lat p.n.e. Grekom znany był mechanizm przynoszący Alicji większe korzyści z sytuacji o polaryzacji  $|01\rangle$ , tj. gdy zamiast proponować cenę, akceptuje ona transakcję. Hezjod pisze<sup>10</sup>, że Zeus uznający metodę „*jeden połowi, drugi wybiera*”, dzieląc się z Prometeuszem, pozwolił człowiekowi dokonać połowienia.

---

<sup>10</sup>zob. [BT96]

## Kwantowe aukcje angielskie

### § 1. $Q$ -targ z jednostronną licytacją

W poprzednim rozdziale zaznajomiliśmy się z podstawowymi pojęciami i własnościami targów kwantowych. Antagonistyczne względem siebie strategie uczestniczących w nich dwóch graczy stanowią wektory przestrzeni Hilberta, a ich właściwości są zgodne z postulatami teorii kwantowej. Będziemy kontynuować rozważania dotyczące  $q$ -targów, w szczególnym kontekście posiadających wielowiekową tradycję gier rynkowych, w których kilka podmiotów rywalizuje o nabycie pojedynczego dobra rynkowego. Teoria kwantowa modeluje zjawiska zachodzące na istniejących rynkach precyzyjniej niż robią to konkurencyjne odpowiedniki, używające standardowego rachunku prawdopodobieństwa. „Klasyczne” konstrukcje są jedynie asymptotycznymi cieniami, jakie pozostają po przejściu granicznym  $\hbar_E \rightarrow 0$ , wykonanym na wynikach modelu kwantowego. To subiektywna opinia autora, do której sceptyków powinna nakłonić analiza tendencji rozwojowych nauki w ostatnich latach. Obserwujemy wzmożone prace nad technologiami, prowadzącymi do budowy urządzeń wykorzystujących unikalne konsekwencje splątania kwantowego. Teoria obliczeń kwantowych osiąga dojrzałość autonomicznej dyscypliny wiedzy. Walory poznawcze teorii holistycznej przemawiają za unifikacją stosowanych metod matematycznych, opisujących zjawiska społeczne i fenomeny świata fizycznego. Nowa filozofia przyrody [Bro96] może scalić obszary wiedzy, które w klasycznym nurcie kultury były postrzegane w skrajnie odmienny sposób.

Rozważmy szczególną sytuację  $q$ -targu, w którym gracz, dla symetrii przyszłych rachunków oznaczony numerem -1, sprzedaje ustaloną ilość dobra, znajdując się w polaryzacji  $|0\rangle$ , tj. polaryzacja jego  $q$ -targu z graczem oznakowanym numerem 1 jest określona wektorem  $|0\rangle_{-1}|1\rangle_1$ . Gracz 1 proponuje cenę dobra, a gracz -1 akceptuje, bądź odrzuca tą propozycję. O ewentualnym sfinalizowaniu transakcji decyduje warunek racjonalności targu

$$(19.1) \quad [q + p \leq 0],$$

którego parametry  $p = \ln c_{-1}$  i  $-q = \ln c_1$  są zmiennymi losowymi, będącymi logarytmami cen tego samego dobra, przy których odpowiedni gracze rezygnują z targu, czyli *cenami rezygnacji*. Zmienne losowe  $p$  i  $q$ , które ujmują addytywnie zyski wynikłe ze zmiany ceny, charakteryzują się gęstościami prawdopodobieństw, równymi kwadratam modułów odpowiednich funkcji falowych  $\langle p|\psi\rangle_{-1}$  i  $\langle q|\psi\rangle_1$ , czyli strategii uczestników tego targu. Zwróćmy uwagę, że do opisywanego tu targu mogło dojść np. w okolicznościach, gdy pierwotnie zamiar kupna określonej ilości dobra zgłaszała większa liczba podmiotów rynkowych, jednak zrezygnowali oni z targu, gdyż cena rezygnacji  $c_1$  gracza okazała się większa niż ceny rezygnacji  $c_k$  pozostałych kupujących  $c_1 > c_k$ ,  $k = 2, \dots, N$ . Oznacza to, że uczestnik takiej licytacji jest fermionem, podlegającym zakazowi Pauliego, zabraniającemu dwóm indywiduom egzystować w jednakowych stanach. Dotycząca uczestnika  $q$ -targu własność bycia fermionem została, w odmiennym kontekście, wydedukowana w poprzednim rozdziale. Przy założeniu, że w początkowej fazie targu uczestniczy kilku licytujących się graczy warunek racjonalności targu (19.1) przybiera postać

$$(19.2) \quad [q_{\min} + p \leq 0],$$

gdzie  $q_{\min} := \min_{k=1, \dots, N} \{q_k\}$  jest wziętym ze znakiem minus logarytmem ceny, która okazała się najwyższą spośród ofert cenowych proponowanych przez kupujących. Zgodnie z występującą w poprzednim rozdziale formułą (18.10) gęstość prawdopodobieństwa dobitcia targu z kupującym o numerze  $k$ , przy cenie  $c_k = e^{-q_k}$ , dana jest wzorem:

$$(19.3) \quad dq_k \frac{|\langle q_k|\psi_k\rangle|^2}{\langle \psi_k|\psi_k\rangle} \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^N \int_{-\infty}^{\infty} dq_m \frac{|\langle q_m|\psi_m\rangle|^2}{\langle \psi_m|\psi_m\rangle} \int_{-\infty}^{\infty} dp \frac{|\langle p|\psi_{-1}\rangle|^2}{\langle \psi_{-1}|\psi_{-1}\rangle} [q_k = \min_{n=1, \dots, N} \{q_n\}] [q_k + p \leq 0].$$

Interesująca sprzedającego bezwarunkowa gęstość prawdopodobieństwa dobitcia targu przy cenie  $c$  jest sumą powyższych wyrażeń dla  $q_k = -\ln c$  po wszystkich wartościach indeksu  $k = 1, \dots, N$  numerującego kupujących. Abstrahując od należącego do domeny kwantów sposobu wyznaczania występujących w wyrażeniu (19.3) amplitud prawdopodobieństwa, w opisanym wyżej typie  $q$ -targu bez trudu dostrzeżemy popularną na rynkach dóbr rzadkich *aukcję angielską*, zwaną także aukcją pierwszej ceny. W kontekście kwantowomechanicznym interesującą cechą formuły (19.3), jest występowanie w niej funkcji falowych, opisujących stany uczestników aukcji, dla których, zgodnie z zakazem Pauliego, w tych stanach nie ma już miejsca — odpadli bowiem z targu przed jego rozstrzygnięciem, z powodu oferowania zbyt niskiej ceny zakupu.

## § 2. $Q$ -aukcja z dominującym licytującym

Najczęściej spotykany scenariusz aukcji angielskiej, w którym przyjmuje się jawną dla wszystkich graczy cenę wywoławczą<sup>1</sup>  $c_w$  należy zinterpretować jako  $q$ -aukcję angielską, w której w ten sam sposób, jednostronnie obciążono dziedzinę miar, odpowiadających strategiom uczestników licytacji. Cena wywoławcza należy więc do kategorii pojęć dotyczących pomiaru (patrz rozdział 15). W teorii kwantowej utożsamienie ceny rezygnacji gracza -1 z ceną wywoławczą doprowadziłoby do sprzeczności, gdyż wiązałoby ten drugi typ ceny z polaryzacją gracza -1, na co nie pozwala zakaz Pauliego (przed ustaleniem warunków targu gracze -1 i 1 znalazłby się w tym samym stanie polaryzacyjnym). W praktyce aukcyjnej często mamy do czynienia z ceną rezerwacji, czyli taką, ukrytą przed licytującymi ceną  $c_r$ , poniżej której gracz -1 nie jest zobligowany do sprzedaży licytowanego dobra. W Polsce możemy zetknąć się z mylącym nazwaniem tej ceny ceną minimalną<sup>2</sup>. Bieżący rozdział prezentuje rozważania dotyczące najprostszych aukcji, dla których  $c_w = 0$  i  $c_r = \infty$ .

Analizując różne sytuacje związane z angielskimi  $q$ -aukcjami ograniczmy się do takich, które charakteryzuje ściśle określona cena rezerwacji  $c = e^{p'}$ . Tej zdeterminowanej cenie odpowiada miara prawdopodobieństwa  $|\langle p|\psi_{-1}\rangle|^2 dp = \delta(p - p') dp$ . Przyjmijmy dalej, że gracze uczestniczący w licytacji posiadają możliwość posługiwania się strategiami mieszanymi. Wtedy we wzorze (19.3) powinniśmy zastąpić kwadraty modułów amplitud prawdopodobieństwa  $|\langle q_k|\psi_k\rangle|^2$  ich kombinacjami wypukłymi  $\eta(q_k) := \sum_m w_m |\langle q_k|m\psi_k\rangle|^2$ , gdzie  $|m\psi_k\rangle$  oznacza jedną z wybranych losowo przez gracza  $k$  strategii,  $w_m \geq 0$ ,  $\sum_m w_m = 1$ .

Jeśli dla pewnego  $k = k'$  wyrażenie (19.3) możemy zastąpić miarą

$$(19.4) \quad [q_{k'} + p' \leq 0] \eta(q_{k'}) dq_{k'},$$

to wtedy taka aukcja redukuje się do omówionego już wcześniej modelu racjonalnego kupca, czyli takiego  $q$ -targu o polaryzacji  $|0\rangle_{-1}|1\rangle_1$ , w którym gracz -1 stosuje strategię, będącą stanem własny operatora podaży  $\mathcal{P}$  (bądź operatora popytu  $\mathcal{Q}$ , w wariacie aukcji angielskiej dotyczącej sprzedaży, gdy gracz -1 występuje w roli sprzedającego). Jest tak, gdy miara zbioru zdarzeń, dla których  $q_{k'} \neq \min_{n=1, \dots, N} \{q_n\}$  staje się zaniedbywalnie mała, czyli w sytuacjach, gdy  $k'$ -ty gracz oferuje ceny, które są zbyt wysokie dla pozostałych uczestników aukcji.

<sup>1</sup>W nazewnictwie anglosaskim określaną mianem minimalnej oferty

<sup>2</sup><http://www.allegro.pl>

### § 3. Jednakowe strategie licytujących

Rozważmy inną klasę sytuacji, gdy wszystkich  $N$  kupujących charakteryzuje ta sama gęstość rozkładu logarytmu ceny rezygnacji  $\eta(q)$ , którą możemy interpretować jako strategię rynku pozostającego w równowadze (por. rozdział 15) i cechującego się średnią wartością logarytmu ceny rezygnacji równą zeru (zawsze możemy wybrać takie jednostki płatnicze, przy których warunek ten będzie spełniony).

W takich sytuacjach miara (19.3) redukuje się do wyrażenia

$$(19.5) \quad [q + p' \leq 0] \eta(q) \left( \int_q^\infty \eta(r) dr \right)^{N-1} dq,$$

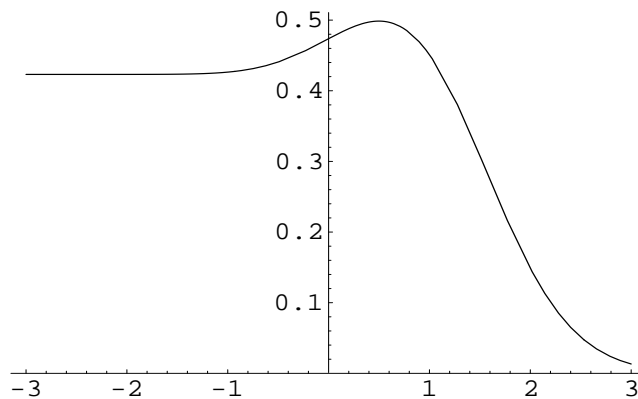
gdź prawdopodobieństwo (19.5) zwycięstwa gracza  $k$  w aukcji zakończonej ceną należącą do przedziału  $[e^{-q}, e^{-q}(1 + dq)]$  nie zależy od numeru gracza. Zmienna losowa  $-q$  obrazuje wielkość zysku mierzonego procentem (składanym), jaki graczowi  $-1$  przynosi aukcja, w odniesieniu do przeciętnej ceny rynkowej sprzedawanego towaru. Dla celu badania zysków sprzedającego możemy tą sytuację postrzegać jako tożsamą okolicznościom opisywanym modelem  $q$ -targu o zdeterminowanej polaryzacji. Wtedy abstrakcyjny przeciwnik sprzedającego, cechujący się własnościami  $RS^3$ , może doprowadzić do dobicia targu przez propozycję cenową, której logarytm wzięty ze znakiem minus jest zmienną losową  $q'$ , określoną rozkładem równym  $N$ -krotnej wartości rozkładu (19.5), czyli funkcją  $q' := \min\{q_1, \dots, q_N\}$ , zwaną *statystyką pozycyjną* rangi 1 [Cra58]. Wyliczona na podstawie tej miary funkcja natężenia zysku sprzedającego, której sposób wyznaczenia przedstawiony został w rozdziale 14, przybiera następującą postać (por. ze wzorem (14.12))

$$(19.6) \quad \rho_N(p') := \frac{E(-[q' + p' \leq 0] q')}{E(t)} = \frac{- \int_{-\infty}^{-p'} q \eta(q) \left( \int_q^\infty \eta(r) dr \right)^{N-1} dq}{N^{-1} + \int_{-\infty}^{-p'} \eta(q) \left( \int_q^\infty \eta(r) dr \right)^{N-1} dq},$$

gdzie  $t$  to zmienna losowa, która jest czasem potrzebnym dla osiągnięcia przez gracza  $-1$  przeciętne zysku  $E(-[q' + p' \leq 0] q')$  przy ustalonej cenie rezygnacji  $p'$ . Przypomnijmy, że funkcja (19.6) posiada unikalną własność osiągania wartości maksymalnej w jej punkcie stałym, który, w przypadku gdy  $q$  ma rozkład Gaussa, jest przyciągający na całej dziedzinie. W modelach kwantowych rozkłady normalne odgrywają zasadniczą rolę, gdyż są nimi wszystkie strategie zgodne z prawem popytu, tzn. miary te wyczerpują klasę dodatnio określonych kwantowych strategii czystych, a także opisują strategie rynków znajdujących

<sup>3</sup>reszty świata, patrz poprzedni rozdział

się w równowadze (patrz rozdział 15). Dlatego do końca następnego paragrafu przyjmiemy założenie, że  $\eta(q)$  jest rozkładem normalnym. Przyciąganie funkcji  $\rho_N(p')$  na całej dziedzinie powoduje, że przeciwnik licytujących się może stosować naturalną metodę maksymalizacji natężenia swojego zysku, polegającą na ciągłym korygowaniu swojej ceny rezygnacji do wartości równej przeciętnemu natężeniu zysku. W metodzie tej niepotrzebna jest znajomość charakterystyki rozkładu  $\eta(q)$ . Jednak w przypadkach większej liczby licytujących się podobną skuteczność można osiągnąć przyjmując, że gracz -1 posiada zerową cenę rezygnacji ( $p' = -\infty$ ). Na rysunku 19.1 obserwujemy spadek funkcji  $\rho_N(p')$  od jej wartości maksymalnej asymptotycznie do  $\rho_N(-\infty)$ .

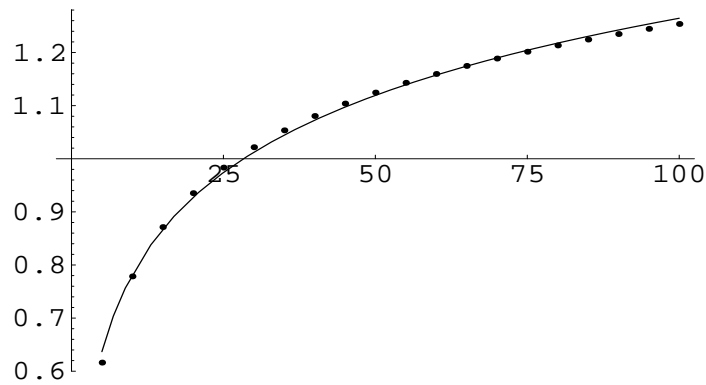


Rysunek 19.1. Wykres funkcji natężenia zysku  $\rho_N(p')$  z  $q$ -aukcji angielskiej dla  $N=3$ .

Dla rosnących wartości  $N$  zacierą się różnica pomiędzy tymi liczbami. Właśność tą dostrzeżemy w zestawieniu wyników (tabela 19.1) osiąganych za pomocą tych dwóch różnych metod wyboru strategii ustalania ceny rezygnacji gracza -1, dla dziesięciu początkowych wartości  $N$ . Liczby zamieszczone w ostatniej kolumnie tej tabeli obrazują proporcję która nie zależy od dyspersji  $\sigma$  rozkładu normalnego  $\eta(q)$ .

To nie umiejętnie określanie przez sprzedającego jego ceny rezygnacji, ale rywalizacja wielu graczy, licytujących cenę zakupu pojedynczego dobra, czyni atrakcyjnym organizowanie aukcji. Możliwości zwiększania zysku, jakie wynikają ze wzrostu liczby uczestników licytacji, obrazuje kolejny wykres 19.2. Okazuje się, że dla  $N \leq 100$  stosowny ciąg logarytmiczny skutecznie przybliża korzyści mierzone jednostkami dyspersji  $\sigma$ , jakie może przynosić organizowanie  $q$ -aukcji angielskiej w sytuacjach, gdy założenie o równych gaussowskich rozkładach  $\eta(q_k)$  możemy uznać za spełnione.

Zysk gracza -1, mierzony względem wartości przeciętnej logarytmu ceny rynkowej licytowanego dobra, musi się bilansować z analogicznie wyznaczoną stratą zwycięzcy licytacji. Stąd wynika, że, w przypadku braku ceny rezygnacji



Rysunek 19.2. Punkty odpowiadające maksymalnym wartościom natężenia zysku z  $q$ -aukcji angielskiej dla  $N \leq 100$  na tle krzywej  $0.21 \log N + 0.3$ .

$N$	$\max_{p'} \rho_N(p')$	$\rho_N(-\infty)$	$\max_{p'} \rho_N(p') / \rho_N(-\infty)$
1	0.27603	0	—
2	0.410091	0.282095	1.45373
3	0.498606	0.423142	1.17834
4	0.564273	0.514688	1.09634
5	0.616195	0.581482	1.0597
6	0.658949	0.633603	1.04
7	0.695165	0.676089	1.02822
8	0.726489	0.7118	1.02064
9	0.754024	0.742507	1.01551
10	0.77854	0.769376	1.01191

Tabela 19.1. Zestawienie natężeń zysku (w jednostkach  $\sigma$ ) dla gaussowskich statystyk pozycyjnych rangi 1.

gracza -1, natężenie przeciętnych strat uczestnika licytacji wynosi  $-\frac{2\rho_N(-\infty)}{1+N}$ . Zatem wzrost liczby uczestników  $q$ -aukcji angielskiej jest korzystny dla wszystkich uczestników aukcji.

Rozważamy jednakowe strategie uczestników licytacji, więc przy pomocy kwantowych operacji<sup>4</sup> nie sposób pomniejszyć ilości uczestników licytacji. Ta cecha  $q$ -aukcji angielskiej, wykluczająca na poziomie kwantowym możliwość manipulacji wynikami aukcji, która jest bezpośrednią konsekwencją przedstawionego niżej twierdzenia o nieredukowalności jednakowych graczy, sprzyja

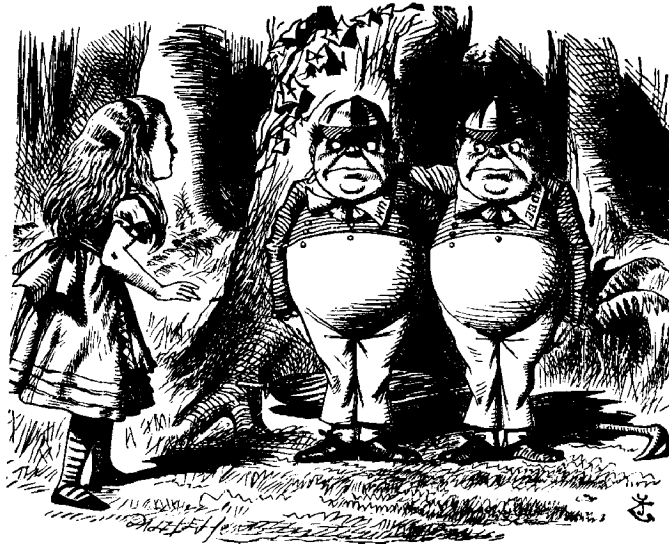
<sup>4</sup>liniowych



stabilności osiągniętego stanu równowagi w sytuacjach, gdy licytujący dochodzą do równowagowej strategii, cechującej anonimową RŚ o temperaturze  $T=0$  (rozdział 15).

**3.1. Twierdzenie o nieredukowalności jednakowych graczy** Poniższe twierdzenie zaprezentowane w kontekście zjawisk fizycznych odnajdziemy w pracy [PB00]. Rozważmy hipotetyczną operację kwantową  $\mathcal{J}$ , która pozwala za pomocą klasycznego urządzenia, znajdującego się początkowo w stanie  $|\Psi^*\rangle$ , wyeliminować z gry (czyli z jej stanu) jednego spośród graczy posługujących się identycznymi strategiami czystymi, nieznanymi obsługującemu urządzenie. Łatwo zauważyć, że możemy ograniczyć rozważania do dwóch graczy. Wtedy taka operacja  $\mathcal{J}$  ma postać

$$(19.7) \quad \mathcal{J}|\Psi^*\rangle|\psi\rangle_1|\psi\rangle_2 = |\Psi_\psi\rangle|\psi\rangle_1.$$



Zakładamy, że stan końcowy klasycznego urządzenia może zależeć od postaci strategii  $|\psi\rangle$  oraz że stany  $|\Psi^*\rangle$ ,  $|\Psi_\psi\rangle$  i  $|\psi\rangle$  są normowalne. Podobnie jak w problemie klonowania z §2 poprzedniego rozdziału, wystarczy ograniczyć zagadnienie do dwuwymiarowej podprzestrzeni strategii rozpiętej na wektorach  $|0\rangle$  i  $|I\rangle$ . Szczególne przypadki równania (19.7) mają postać

$$(19.8) \quad \mathcal{J}|\Psi^*\rangle|0\rangle_1|0\rangle_2 = |\Psi_0\rangle|0\rangle_1, \quad \mathcal{J}|\Psi^*\rangle|I\rangle_1|I\rangle_2 = |\Psi_I\rangle|I\rangle_1.$$

Przedstawiając strategię  $|\psi\rangle$  w postaci superpozycji  $\lambda_0|0\rangle + \lambda_1|I\rangle$ , korzystając z liniowości  $\mathcal{J}$  i związków (19.8) otrzymamy następującą postać równania (19.7)

$$(19.9) \quad \lambda_0^2|\Psi_0\rangle|0\rangle_1 + \lambda_1^2|\Psi_I\rangle|I\rangle_1 + \lambda_0\lambda_1\mathcal{J}|\Psi^*\rangle(|0\rangle_1|I\rangle_2 + |I\rangle_1|0\rangle_2) = |\Psi_\psi\rangle(\lambda_0|0\rangle_1 + \lambda_1|I\rangle_1).$$

Wyrażenie  $\mathcal{J}|\Psi^*\rangle(|0\rangle_1|\mathbf{I}\rangle_2 + |\mathbf{I}\rangle_1|0\rangle_2)$  nie zależy<sup>5</sup> od parametrów  $\lambda_0$  i  $\lambda_1$ , więc stan końcowy urządzenia  $|\Psi_\psi\rangle$ , będący rozwiązaniem równania (19.9), musi być następującą kombinacją liniową  $|\Psi_\psi\rangle = \lambda_0|\Psi_0\rangle + \lambda_1|\Psi_1\rangle$ . Wybierając unormowaną do jedności strategię  $|\psi\rangle$ ,  $|0\rangle$  i  $|\mathbf{I}\rangle$  otrzymamy, że  $|\lambda_0|^2 + |\lambda_1|^2 = 1$ , a stąd że

$$(19.10) \quad 1 = \langle\Psi_\psi|\Psi_\psi\rangle = 1 + \bar{\lambda}_0\lambda_1\langle\Psi_0|\Psi_1\rangle + \lambda_0\bar{\lambda}_1\langle\Psi_1|\Psi_0\rangle$$

dla  $\langle\Psi_\psi|\Psi_\psi\rangle = \langle\Psi_0|\Psi_0\rangle = \langle\Psi_1|\Psi_1\rangle = 1$ . Tak więc możemy stwierdzić, że  $\langle\Psi_0|\Psi_1\rangle = 0$ . Jednak zgodnie z ustaleniami paragrafu 2 rozdziału 15, dotyczącymi obiektu klasycznego, w przypadku ortogonalnych stanów  $|\Psi_0\rangle$  i  $|\Psi_1\rangle$  wektor  $\lambda_0|\Psi_0\rangle + \lambda_1|\Psi_1\rangle$  z  $\lambda_0, \lambda_1 \neq 0$  reprezentuje mieszany stan urządzenia, dlatego proces  $\mathcal{J}$  zwiększa entropię układu do wartości większej od zera, tzn. nie jest to proces kwantowy.

Powyższe twierdzenie ma charakter dualny do twierdzenia o niemożności klonowania strategii (rozd. 18 §2). Warto jeszcze zauważyć, że rozważane w tych twierdzeniach hipotetyczne operacje nie są wzajemnie odwrotne,  $\mathcal{J} \neq \mathcal{K}^{-1}$ .

#### § 4. Asymptotyka natężenia zysku



W dobie gwałtownego rozwoju aukcji internetowych, gdy ich dostępność stała się nieograniczona i w których robot dokonuje automatycznej analizy danych, wydaje się interesującym pytanie o maksymalne natężenie zysku z  $q$ -aukcji angielskiej, prowadzonej dla dużej liczby licytujących się uczestników, tj. gdy  $N \gg 100$ . Wtedy stosowanie przybliżenia w postaci funkcji  $0.21 \log N + 0.3$  zawodzi. Okazuje się jednak, że asymptotę funkcji  $\max_{p'}\{\rho_N(p')\}$  można wyznaczyć w sposób dokładny. W tym celu wystarczy zbadać zachowanie asymptotyczne zmiennej losowej

$$(19.11) \quad a_N \mathfrak{q}' + b_N,$$

gdzie ciągi  $a_N$  i  $b_N$  dane są odpowiednio wzorami:

$$a_N := \sqrt{2 \ln N} \text{ i } b_N := \frac{1}{2}(\ln 4\pi + \ln \ln N) - 2 \ln N.$$

W sytuacjach, gdy  $\eta(q)$  jest standaryzowanym rozkładem normalnym, dystrybuanta zmiennej losowej (19.11), będącej przeskalowanym logarytmem ceny dobiecia targu, zmierza w granicy  $N \rightarrow \infty$  do dystrybuanty Gumbela (zwanej także dystrybuantą podwójnie wykładniczą) [Enc97]

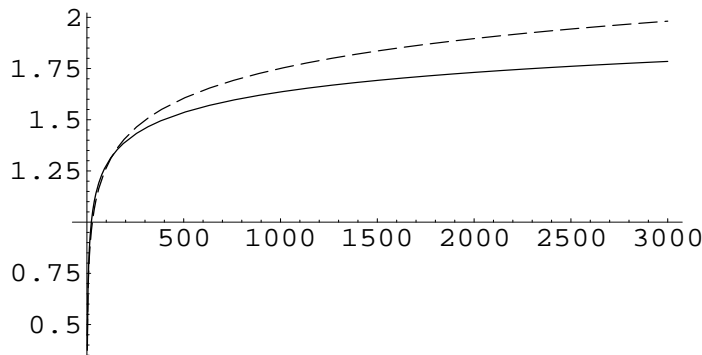
$$P(a_n \mathfrak{q}' + b_n \leq x) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} e^{-e^{-x}}.$$

<sup>5</sup>urządzenie przed operacją redukcji gracza nie mogło znać jego strategii  $|\psi\rangle$

Wartość oczekiwana zmiennej losowej o gęstości prawdopodobieństwa równej  $e^{-e^{-x}-x}dx$  jest stałą Eulera  $\gamma := \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} - \ln N \simeq 0.5772$ , więc w konsekwencji, po elementarnych przekształceniach, otrzymamy następującą postać asymptoty dla maksymalnej wartości funkcji natężenia zysku  $\max_{p'} \{\rho_N(p')\}$  przy  $N \rightarrow \infty$ :

$$\sqrt{\frac{\ln N}{2}} + \frac{2\gamma - \ln 4\pi - \ln \ln N}{4\sqrt{2 \ln N}}.$$

Różnicę pomiędzy tą funkcją a wykresem podanej wcześniej interpolacji logarytmicznej przedstawia rysunek 19.3



Rysunek 19.3. Wykresy funkcji  $\sqrt{\frac{\ln N}{2}} + \frac{2\gamma - \ln 4\pi - \ln \ln N}{4\sqrt{2 \ln N}}$  oraz  $0.21 \log N + 0.3$  (linia przerywana).

Szersza dyskusja zbieżności tej aproksymacji znajduje się w książce Craméra [Cra58].

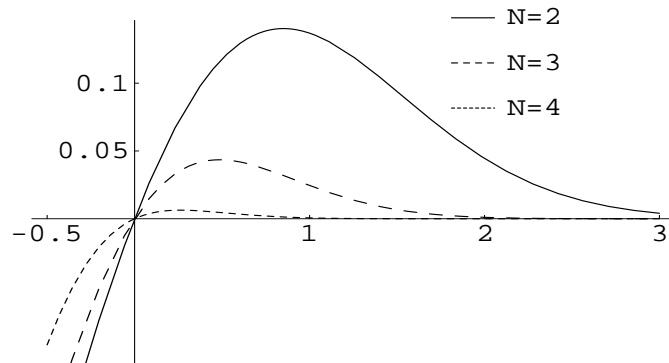
## § 5. Zysk uczestnika licytacji

Jako kolejny przykład  $q$ -aukcji angielskiej rozważymy jej wariant, w którym, tak jak w wariacie omówionym w paragrafie 3, gracz -1 przyjmuje jednoznacznie określoną cenę rezygnacji, a gracze o numerach  $k=1, \dots, k'-1, k'+1, \dots, N$  mają jednakowe strategie, implikujące rozkłady gaussowskie. Jednak tym razem założymy, że gracz  $k'$  stosuje strategię o zdeterminowanej cenie rezygnacji  $e^{-q'}$ , określoną miarą Diraca  $\delta(q_{k'} - q')dq_{k'}$ . Przypomnijmy (patrz rozdział 15), że wtedy, w kwantowej teorii, logarytm ceny ewentualnej odsprzedaży dobra nabywanego w aukcji jest dla tego gracza w pełni nieokreślony, więc  $E(p_{k'}) = 0$ .

W tej sytuacji natężenie zysku gracza  $k'$  wyraża się formułą

$$(19.12) \quad \rho_{k'}(q') = \frac{[q' + p' \leq 0] q'}{1 + \left( \int_{q'}^{\infty} \eta(q) dq \right)^{1-N}}.$$

Rysunek 19.4 przedstawia kształt funkcji natężenia zysku dla trzech najmniejszych wartości  $N$ , gdy  $p' \rightarrow -\infty$  oraz gdy funkcja  $\eta(q)$  jest równa standaryzowanemu rozkładowi normalnemu.



Rysunek 19.4. Wykresy zależności natężenia zysku licytującego gracza od jego deterministycznie określonej ceny rezygnacji.

W przypadku  $N=1$  mielibyśmy do czynienia ze zwykłym  $q$ -targiem, w którym wykres byłby prostą określoną równaniem  $\rho_{k'}(q') = \frac{1}{2}q'$ . Już przy kilku uczestnikach licytacji możliwości osiągnięcia przez gracza  $k'$  dodatniego zysku stają się znikome. Jeśli, mimo to, chce on podjąć próbę zakupu licytowanego dobra przy zminimalizowanych stratach, to będzie próbował odgadnąć cenę rezygnacji  $e^{p'}$ , by złożyć ofertę o możliwie najwyższej wartości  $q'$ , jednak takiej, która nie przewyższy  $-p'$ .

W tym miejscu warto zwrócić uwagę, że teoria kwantowa umożliwia zwielokrotnienie dodatnich zysków licytującego (które w pojedynczej  $q$ -aukcji jeśli są, to są mizerne). Zakaz Pauliego nie zabrania mu bowiem jednoczesnego zwycięstwa w innej aukcji, jeśli tylko jego strategia (czysta) jedynie tam pokonała rywali w licytacji (lecz niekoniecznie doprowadziła do zakupu dobra, gdyż mogła napotkać zbyt wysoką cenę rezygnacji sprzedającego). Możliwość natychmiastowej teleportacji stanu (strategii) [BBC<sup>+</sup>93] czyni efektywnymi takie techniki rynkowe. Naturalne konsekwencje niepowielalności strategii (niepodzielności uwagi), wynikające z kwantowomechanicznego zakazu klonowania stanu [WZ82], w modelach klasycznych są niewyjaśnialne. Stosowanie w dowolnej ilości miejsc jednocześnie skutecznie tej samej strategii umożliwia zwielokrotnianie natężenia zysku do dowolnie dużych rozmiarów. Ten paradoks klasycznej teorii powinien skłaniać nas ku badaniom gier kwantowych. Zakaz klonowania może

także tłumaczyć naszą nieznajomość (nieświadomość) naszych, bądź cudzych, stanów-strategii. Wiedza o nich oznaczałaby ich sklonowanie.

### § 6. Zyski a posteriori

Przedstawione w ostatnich trzech paragrafach rachunki ulegną modyfikacji, gdy założymy że gracze przystępują do aukcji w okolicznościach, gdy licytującym znane są ceny  $e^{p_k}$ , po jakich będą mogli zbyć kupowane na aukcji dobro, zaś sprzedający wcześniej nabył owe dobro za cenę  $e^{-q_1}$ . Zwolennik teorii użyteczności może przyjąć, że parametry  $q_1, p_1, \dots, p_N$  odpowiadają użytecznościom licytowanego dobra, które charakteryzują odpowiadających tym parametrom graczy. Wszyscy uczestnicy aukcji mają teraz informację o wartości (ogólnie różnej dla każdego gracza) dobra stanowiącego przedmiot targu. W tej sytuacji, we wzorze (19.3) powinniśmy kwadraty modułów amplitud zamienić odpowiadającymi im funkcjami Wignera<sup>6</sup>:

$$(19.13) \quad \begin{aligned} |\langle p | \psi_{-1} \rangle|^2 &\longrightarrow W_{-1}(p_{-1}, q_{-1}), \\ |\langle q | \psi_k \rangle|^2 &\longrightarrow W_k(p_k, q_k), \end{aligned}$$

więc, po uwzględnieniu strategii mieszanych (wypukłych kombinacji funkcji Wignera)  $\eta_k(p_k, q_k)$ , charakteryzujących uczestników aukcji, zamiast miary (19.3) mamy następujące wyrażenie

$$(19.14) \quad dq_k \eta_k(p_k, q_k) \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^N \int_{-\infty}^{\infty} dq_m \eta_m(p_m, q_m) \int_{-\infty}^{\infty} dp_{-1} \eta_{-1}(p_{-1}, q_{-1}) [q_k = \min_{n=1, \dots, N} \{q_n\}] [q_k + p_{-1} \leq 0].$$

Przedstawione na jednakowej dziedzinie  $\ln c = p = -q$  dystrybuanty

$$\int_{-\infty}^p \eta_k(p_k, q_k = \text{constans}) dp_k \quad \text{i} \quad \int_{-\infty}^q \eta_k(p_k = \text{constans}, q_k) dq_k$$

mają naturalną interpretację<sup>7</sup> krzywych podaży i popytu gracza  $k$ .

Przeprowadzona wcześniej analiza maksymalnego natężenia zysku pozostanie prawdziwa jedynie dla przypadków gdy  $p_1 = \dots = p_N$  (z wyjątkiem  $p_k$  w paragrafie 5) i gdy strategię wszystkich graczy nie będą giffenami, bowiem teza twierdzenia o maksimum funkcji natężenia zysku w jej punkcie stałym<sup>8</sup> wymaga przyjęcia założenia o dodatniej określoności miary prawdopodobieństwa.

<sup>6</sup>patrz rozdział 15

<sup>7</sup>por. rozdział 15

<sup>8</sup>patrz str. 219

Fascynująca klasa  $q$ -aukcji angielskich, w których pojawiają się strategie-giffeny wymaga dokładnego zbadania.

---

### § 7. *Ku pełnej teorii $q$ -aukcji*

Analiza  $q$ -aukcji angielskiej, której celem jest kupno dobra, a oferty sprzedaży zgłaszają licytujący się gracze będzie wyglądała analogicznie jak wyżej przeprowadzona. Z nową sytuacją będziemy mieć do czynienia, gdy ulegnie zmianie polaryzacja  $q$ -aukcji na  $|I\rangle_{-1}|0\rangle_1$ , czyli wtedy, gdy gracz  $-1$  ujawni cenę rezygnacji, a gracz  $1$  zaakceptuje, bądź nie, tą ofertę, akceptując jednocześnie ceny rezygnacji pozostałych licytujących. Tego typu znana z praktyki rynkowej aukcja nosi nazwę *aukcji Vickrey'a* (lub aukcji drugiej ceny). Jej zwycięzca musi zapłacić drugą (w porządku malejącym) cenę spośród wszystkich ofert (i ceny rezygnacji gracza  $-1$ ), zgłoszonych w tym przetargu. W kwantowym ujęciu aukcja angielska i aukcja Vickrey'a to jedynie dwie strony tego samego medalu, którym jest  $q$ -aukcja. W ogólnym przypadku, podobnie jak w  $q$ -targach, obydwa kwadraty modułów amplitud  $|\langle 0_{-1}I_1|0_{-1}I_1\rangle|^2$  i  $|\langle I_{-1}0_1|I_{-1}0_1\rangle|^2$  są różne od zera, więc z takimi prawdopodobieństwami musimy uwzględnić odpowiadające im typy aukcji. Strategie uczestników  $q$ -aukcji mogą być splecione. Przykładem niech będzie polaryzacyjny stan czysty  $|0\rangle_1|0\rangle_2 + |I\rangle_1|I\rangle_2$ , który wymyka się formalizmowi klasycznej teorii gier. Na istniejących rynkach tak uogólniona  $q$ -aukcja nie ma jeszcze swojego odpowiednika. Pasjonującym zagadnieniem będzie analiza *motywacyjnych własności  $q$ -aukcji*, polegająca na ustaleniu warunków, w których najkorzystniejszą strategią graczy jest stosowanie strategii zgodnych z własną oceną wartości licytowanego dobra. Popularność aukcji Vickrey'a wynika z jej motywacyjnego charakteru<sup>9</sup>.

Gdy rozważamy jedynie dodatnio określone miary prawdopodobieństw, to licytujący w aukcji Vickrey'a osiągają najwyższe zyski stosując strategie ujawniające własną ocenę wartości licytowanego dobra [Kle99]. Jednak, w przypadku strategii-giffenów tak być nie musi, gdyż w dowodach na motywacyjny charakter aukcji Vickrey'a wykorzystuje się własność dodatniej określoności miar. Obecność giffenów na rynku nie dotyczy jedynie futurystycznych wizji, w których maklerzy posługują się wyrafinowanymi urządzeniami, zapewniającymi możliwość stosowania strategii kwantowych. Kapitan Robert Giffen wskazaładdywną miarę, nie spełniającą warunku dodatniej określoności, która istniała realnie na rynku, jeszcze w latach czterdziestych XIX w. [Sti47], wyprzedzając tym pierwsze dokonywane przez fizyków obserwacje zjawisk kwantowych. Wyrażona opisem przyczyn odstępstw od prawa popytu interpretacja tego braku

---

<sup>9</sup>patrz uzasadnienie Nagrody Nobla z 1996 roku z ekonomii

dotatniej określoności miary nie sprawia poważnych trudności nawet młodym adeptom ekonomii. Zaś pracodawcy chyba zawsze uważali, że podaż pracy, jako funkcja wynagrodzenia, rzadko kiedy cechuje się monotonicznością.

Wyróżnione ustaleniem polaryzacji aukcje pierwszej i drugiej ceny znajdują swoje odpowiedniki w rozwiązaniu Knastera problemu pragmatycznego podziału, tj. połączonego z opłatami kompensacyjnymi przydziału niepodzielnych części majątku [LR64, Pio99a]. Ów dualizm można byłoby odnaleźć nawet wśród różnych systemów wyborczych, które, podobnie jak aukcje, stanowią procedury rozwiązywania zagadnień sprawiedliwego podziału [BT96]. Może społeczne frustracje, związane z ułomnościami ordynacji wyborczych, są sygnałem świadczącym o aktualności podejmowania takiego tematu.

## Komputer kwantowy instrumentem gry rynkowej

Tradycyjne dewizy postępowania osób rozsądnych skłaniają je do kierowania się analizą wcześniej już poznanych sytuacji. Poddanie się tej zasadzie skutkuje czynami, które retrospekcja wyróżnia, spośród innych możliwych działań, jako niosące szczególne korzyści. Nauki ścisłe (i sztuka wojenna) wypracowały jeszcze jeden, niekonserwatywny schemat postępowania, pozwalający odkrywać nowe możliwości. Polega on na rozważaniu napotkanego problemu z perspektywy odwrotnej chronologii niż w tradycyjnej metodzie. Poddaje rewizji przyjęte aksjomaty czy decyzje pod kątem określonych celów do jakich mogą one prowadzić. Czy powinniśmy tkwić w przekonaniu, że graczom operującym na przyszlých rynkach, którzy będą mogli korzystać z osiągnięć kwantowej technologii, wystarczy klasyczna wiedza, klasyczny komputer i intuicja oparta na klasycznych nawykach? Przedstawione niżej wywody zawierają omówienie wybranych aspektów funkcjonowania kwantowego rynku, umożliwiającego osiągnięcie unikalnych zysków z transakcji. Zmieniając niektóre przyzwyczajenia możemy znaleźć w instrumentarium odkrytym przez badaczy elementarnych zjawisk natury metody skuteczniejszego prowadzenia gier, bez których niewyobrażalne jest funkcjonowanie naszej cywilizacji. Takie nowe gry same nie są w stanie kreować cudownych efektów w postaci pomnażania dóbr handlowych, jednak dynamizując transakcje zwiększają efektywność rynku i tempo przepływu kapitału w kierunku skuteczniej działających graczy (podmiotów rynkowych). Organizacja rynku kwantowego nie oznacza konieczności stosowania powstających dopiero technologii. Z pewnością dla celów poznawczych wystarczyłyby symulacje. Przecież fizycy potrafią niezwykle precyzyjnie przewidzieć rezultaty eksperymentów dotyczących zjawisk kwantowych, choć sądzimy, że stosują do tego narzędzia rachunkowe podlegające regułom świata klasycznego. Dla osób żądnych nowych doznań samo doskonalenie nietrywialnych umiejętności posługiwania się strategiami kwantowymi może stać się unikalną atrakcją. Nie muszą one czekać na ewolucyjne zmiany procedur transakcji rynkowych. Im wystarczy automat do gry hazardowej o nazwie „rynek kwantowy”.



### § 1. Interferencje decyzji kupieckich

Rozważmy handel pewnym dobrem  $\mathfrak{G}$  prowadzony według możliwie najprostszych kwantowych reguł decyzyjnych. Nie jest naszym celem określanie technicznych sposobów realizacji takiej gry rynkowej, wystarczy więc stwierdzić, że stosując elementarne i dobrze znane fizykom technologie, niewątpliwie niżej analizowaną grę można toczyć już obecnie. Zaczniemy od przedstawienia formalizmu koniecznego do opisu najprostszego wariantu kwantowej gry rynkowej. Niech strategia  $|0\rangle$  oznacza, że gracz sprzedając dobro  $\mathfrak{G}$  zaakceptuje jego niską cenę, zaś  $|I\rangle$  – że sprzedając zgodzi się na wysoką cenę i niech  $z \in \overline{\mathbb{C}}$ . Rodzina  $\{|z\rangle\}$  wektorów zespolonych  $|z\rangle := |0\rangle + z|I\rangle$  (wraz ze strategią  $|\pm\infty\rangle := |I\rangle$ ), sparametryzowana współrzędnymi niejednorodnymi przestrzeni rzutowej  $\mathbb{C}P^1$ , reprezentuje wszystkie kwantowe strategie gracza rozpięte przez  $|0\rangle$  i  $|I\rangle$ . Współrzędne wektora  $|z\rangle$  ( $q$ -bitu) w bazie  $(|0\rangle, |I\rangle)$ , po unormowaniu, są amplitudami prawdopodobieństw podjęcia przez gracza odpowiednich decyzji o sprzedaży, korzystnej dla niego bądź nie. Wygodne jest parametryzowanie strategii  $|z\rangle$  punktami sfery  $S_2 \simeq \overline{\mathbb{C}}$ . Wtedy kąt  $\varphi := \arg z$  i kąt  $\theta := \arctg |z|$  pomiędzy pionem, a prostą łączącą biegun północny z punktem na płaszczyźnie  $\overline{\mathbb{C}}$ , podpierającej sferę  $S_2$  w rzucie stereograficznym, stanowią współrzędne geograficzne  $(\varphi, \theta)$  na sferze.

Zgodnie z opisanym w rozdziale 15 kwantowym modelem rynku, ta sama strategia  $|z\rangle$  przedstawiona w nowej bazie  $(|0'\rangle, |I'\rangle)$  będącej fourierowskim obrazem bazy  $(|0\rangle, |I\rangle)$ <sup>1</sup>

$$(20.1) \quad |z\rangle = |0\rangle + z|I\rangle = |0'\rangle + \frac{1-z}{1+z}|I'\rangle$$

opisuje decyzje gracza dotyczące kupna dobra  $\mathfrak{G}$ . W tym sensie kwantowe decyzje popytowe kupca stanowią fourierowski obraz jego preferencji podaźowych, Inwolutywna homografia  $\mathcal{F} : |n\rangle \rightarrow |n'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{m=0}^I (-1)^{\langle n|m\rangle} |m\rangle$ ,  $n=0, I$ , w bazach  $(|0\rangle, |I\rangle)$  i  $(|0'\rangle, |I'\rangle)$  jednakowo określona macierzą Hadamarda  $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ , jest odpowiednikiem transformacji Fouriera dla dwuwymiarowej przestrzeni wektorowej. Wektor bazowy  $|0'\rangle$  oznacza akceptację przez gracza wysokiej ceny dobra  $\mathfrak{G}$  przy jego kupnie (czyli przy sprzedaży jednostek pieniężnych po, tym razem wyrażonej w jednostkach dobra, niskiej cenie), a  $|I'\rangle$  zgodę kupującego na niską cenę  $\mathfrak{G}$ . Jak wyżej już wspomniano, kwadrat modułu liczby  $z$  parametryzującej strategię gracza

$$|z\rangle = |0\rangle + |z| e^{i\arg(z)} |I\rangle$$

<sup>1</sup>bazy  $(|0\rangle, |I\rangle)$  i  $(|0'\rangle, |I'\rangle)$  są przykładem tzw. *baz sprzężonych*, których definicja odwołuje się do jednocześnie skrajnie niemierzalnych obserwabli na skończenie wymiarowych przestrzeniach Hilberta, zob. [Wie83]

posiada interpretację mającą swój odpowiednik w tradycyjnych (niekwantowych) modelach stochastycznych w postaci wagi (miary) zdarzenia polegającego na akceptacji sprzedaży dobra  $\mathcal{G}$  po cenie wysokiej, przy przyjęciu z wagą jednostkową decyzji alternatywnej gracza (polegającej na akceptacji sprzedaży po niskiej cenie). Faza  $\varphi := \arg(z)$  parametru  $z$  jest jednak specyficzną własnością modelu kwantowego. Dla  $\varphi = 0$  moduł wyrażenia  $\frac{1-z}{1+z}$  osiąga wartość najmniejszą, równą  $\frac{1-|z|}{1+|z|}$ , zaś dla  $\varphi = \pi$  — największą, równą odwrotności tamtego minimum. W dwóch innych wartościach fazy  $\varphi = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$  moduł czynnika  $\frac{1-z}{1+z}$  przyjmuje wartość jednostkową (odpowiada to jednokowym prawdopodobieństwom  $\frac{|(z|0')|^2}{(z|z)}$  i  $\frac{|(z|I')|^2}{(z|z)}$ ). Zmiana fazy  $\varphi$ , choć nie zmieni



prawdopodobieństw tego, że kupiec zaakceptuje tanią bądź drogą sprzedaż  $\mathcal{G}$ , to jednak pozwala w szerokim zakresie zmieniać prawdopodobieństwa jego aprobaty dla drogiego i taniego kupna tego dobra. Alternatywne preferencje cenowe zbywającego dobro  $\mathcal{G}$  kupca interferując na różne sposoby wyznaczają odmienne jego zachowania w roli kupującego. Podobne spostrzeżenia, tym razem wskazujące na modyfikacje zachowań poda-

zowych, dotyczą fazy współrzędnej niejednorodnej strategii  $|z\rangle$ , przedstawionej w bazie  $(|0'\rangle, |I'\rangle)$ . W taki sposób jedna kwantowa strategia może być niewiele mniej użyteczna niż dwie, niezależne jedna od drugiej, strategię klasyczne. Mechanizm ten pozwala uzyskać nieosiągalne w modelach klasycznych korzyści z handlowania. Pamiętać jednak należy, że istnieją inne dogodności preferujące używanie strategii kwantowych. Warto tu wspomnieć cechę charakterystyczną dla transakcji opartych na przeliczalnie wymiarowych przestrzeniach Hilberta. Jest nią osiąganie maksymalnego zysku w punkcie stałym taktyki, co daje kupcowi prostą i szybką metodę dostosowywania się do zmieniającego się rynku [Pio03].

---

## §2. Niekolektywne taktyki kwantowe

Elementarnymi taktykami kupca są inwersje jego zachowania. Decyduje on wtedy o diametralnej zmianie strategii: akceptację sprzedaży (czy kupna) dobra  $\mathcal{G}$  po cenie niskiej zastępuje on akceptacją sprzedaży (kupna)  $\mathcal{G}$  po cenie wysokiej i *vice versa*. W bazie  $(|0\rangle, |I\rangle)$  takiej zmianie strategii sprzedaży  $\mathcal{X}$

odpowiada macierz Pauliego  $\sigma_1$ ,

$$\mathcal{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$\mathcal{X}^2 = I$ . Analogiczną inwersję strategii kupna powoduje taktyka (macierz Pauliego  $\sigma_3$ )

$$\mathcal{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

gdyż  $\mathcal{X}' = \mathcal{F}\mathcal{X}\mathcal{F}$ . Ponieważ  $\mathcal{X}$  i  $\mathcal{X}'$  są wzajemnie transformatami Fouriera, więc ich suma winna być niezmiennikiem tego przekształcenia. Ów niezmiennik reprezentuje w obydwu bazach macierz Hadamarda, bowiem  $\mathcal{F} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathcal{X} + \mathcal{X}')$ . Oznacza to, że dla ustalonych amplitud prawdopodobieństw akceptacji transakcji zamiana podaży z popytem  $\mathcal{F}$  jest taktyką<sup>2</sup>.

Dla przedstawienia znaczenia i przydatności symetrii podaży-popytowej taktyk  $\mathcal{X}$  i  $\mathcal{X}'$  rozważmy zmianę strategii  $|z\rangle$  związaną z jedną z czterech funkcji  $g_k: \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$ ,  $k=0, \dots, 3$ , której celem jest ustalenie, czy ta nierozpoznana wcześniej funkcja  $g_?$  jest stała. Aby osiągnąć taki zamiar wystarczy poprzestać na taktykach  $\mathcal{G}_?$  odpowiednio zmieniających znaki współrzędnych jednorodnych strategii  $|z\rangle$  np. w bazie podażyowej

$$\mathcal{G}_k|z\rangle := (-1)^{g_k(0)}|0\rangle + (-1)^{g_k(1)}z|1\rangle.$$

Owymi inwolucjami są: trywialna taktyka tożsamościowa  $\mathcal{G}_0 = \mathcal{G}_1 = I$  dla funkcji stałych  $g_0(0) = g_0(1) = 0$  i  $g_1(0) = g_1(1) = 1$  oraz inwersja strategii kupna  $\mathcal{G}_2 = \mathcal{G}_3 = \mathcal{X}'$  dla pozostałych dwóch funkcji  $g_2(0) = g_3(1) = 0$  i  $g_3(0) = g_2(1) = 1$ . Trzeba więc zmierzyć, czy po użyciu taktyki  $\mathcal{F}\mathcal{G}_k\mathcal{F}$  (równej  $I$  dla  $k=0, 1$ , bądź  $\mathcal{X}$  dla  $k=2, 3$ ) zmieni się podażyowa strategia gracza, która pierwotnie ma postać  $|0\rangle$  (lub  $|1\rangle$ ). Ten prosty sposób rozstrzygnięcia o stałości funkcji  $g_?$  poprzez jednoczesne operowanie taktyką  $\mathcal{G}_?$  na superpozycji dwóch (podażyowych) strategii bazowych, w naszym wariacie mającej postać  $\mathcal{F}|0\rangle = |0'\rangle = |0\rangle + |1\rangle$ , zwany jest wyrocznią Deutscha<sup>3</sup>. Choć raczej akademicki, jest on jednak godny szczególnej uwagi, gdyż dobrze obrazuje unikalny mechanizm kwantowych rachunków równoległych. Przeprowadzenie strategii  $\mathcal{G}_?$  wymaga czasu potrzebnego do wyznaczenia tylko jednej wartości funkcji  $g_?$ , gdyż  $\mathcal{G}_?$  operuje na pozostałych w interferencji everettowskich światach równoległych [Deu98]. Może się wydawać, że równie szybka jest niekwantowa metoda identyfikacji, polegająca na odczycie starszego bitu indeksu  $k$  funkcji  $g_k$ , jednakże wymaga ona wcześniejszego skatalogowania (więc poznania, zmierzenia) wszystkich funkcji  $g_0, g_1, g_2, g_3$ .

<sup>2</sup>we wzorze (20.1) mieliśmy do czynienia z transformacją *alias*, a tu  $\mathcal{F}$  jest transformacją *alibi*, zob. rozdz. 1 cz. 1 tej monografii

<sup>3</sup>przedstawiona metoda orzekania jest wariantem pierwszego algorytmu kwantowego, zaproponowanego w 1985 roku przez Davida Deutscha [DEL00]

Posługując się taktykami  $\mathcal{X}$  i  $\mathcal{X}'$  możemy skonstruować dowolną niekolektywną taktykę kwantową<sup>4</sup>, gdyż brakująca do kompletu generatorów algebry Liego  $\mathfrak{su}(2)$  macierz Pauliego  $\sigma_2$  reprezentuje taktykę  $i\mathcal{X}\mathcal{X}'$  w bazie  $(|0\rangle, |1\rangle)$ . Odwrotność rzutu stereograficznego  $\overline{\mathbb{C}} \rightarrow S_2$  zadaje formuła  $S_2 \ni (x_1, x_2, x_3) = E_z(\vec{\sigma})$ , gdzie wektor  $E_z(\vec{\sigma}) = \frac{\langle z|\vec{\sigma}|z\rangle}{\langle z|z\rangle}$  jest wartością oczekiwaną wektora macierzy (taktyk) Pauliego  $\vec{\sigma} := (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  dla strategii  $|z\rangle$ . Dzięki tej zależności tworzące grupę  $SU(2)$   $q$ -bitowe taktyki, reprezentowane macierzami o jednostkowym wyznaczniku, można sparametryzować elementem  $\overline{\mathbb{C}}$  (podobnie jak strategię) oraz kątem  $\alpha \in [0, \pi]$ :

$$(20.2) \quad SU(2) \ni \mathcal{U}_{z,\alpha} = e^{i\alpha\vec{\sigma}\cdot E_z(\vec{\sigma})} = I \cos \alpha + i \vec{\sigma} \cdot E_z(\vec{\sigma}) \sin \alpha.$$

Współrzędne  $(\cos \alpha, E_z(\vec{\sigma}) \sin \alpha) \in \mathbb{R}^4$  pokrywają jednokrotnie trójwymiarową sferę  $S_3$  ( $\cos^2 \alpha + E_z^2(\vec{\sigma}) \sin^2 \alpha = 1$ ). Zmianę postaci taktyki  $\mathcal{U}_{z,\alpha}$  przy przejściu z obrazu podaźowego do popytowego wyznacza homografia (20.1):

$$(20.3) \quad \mathcal{U}'_{z,\alpha} := \mathcal{F} \mathcal{U}_{z,\alpha} \mathcal{F} = \mathcal{U}_{\frac{1-z}{1+z}, \alpha}.$$

Własność (20.3) wyróżnia współrzędne  $(z, \alpha)$  transakcyjnej taktyki  $q$ -bitowej spośród innych parametryzacji sfery  $S_3$ .

Powyższa rynkowa interpretacja grupy  $SU(2)$  może zostać odczytana jako adaptacja dla opisu procesu transakcji logiki falowej [Orl82, CK02], sugerowanej przez więzionego w obozie na Uralu Jurija Orłowa do modelowania stanów mentalnych. Warto więc zwrócić uwagę na istotną różnicę między tymi podejściami. W opisującej stan świadomości logice falowej operator  $\mathcal{X}'$  dotyczy subiektywnych wątpliwości pojedynczej osoby o prawdziwości bądź fałszywości stwierdzenia, dla którego logika klasyczna (zewnątrzna) reprezentowana jest pewną ortogonalną bazą przestrzeni  $\mathbb{C}^2$  współrzędnych jednorodnych  $q$ -bitu. Zaproponowana tu interpretacja eksponuje operacyjne własności  $\mathcal{X}'$  (czy dualnego doń odwzorowania  $\mathcal{X}$ ) pozwalające całkowicie odmienić reakcje popytowe gracza, przy jednoczesnym zachowaniu niezmiennego sposobu sprzedaży. Prowadzi ona raczej do opartej na grach kwantowych konstrukcji logiki transakcyjnej, w której wartości prawdy lub fałszu byłyby oceną użyteczności strategii na podstawie osiągniętych za jej pomocą wypłat. Taki utylitarny relatywizm logiczny wydaje się zgodny ze sposobem postrzegania nauki (w tym matematyki) przedstawionym przez Davida Deutscha [Deu98].

<sup>4</sup>czyli przekształcającą pojedynczą strategię ( $q$ -bit) liniową operację unitarną (zachowującą miarę prawdopodobieństwa), w teorii układów obliczeniowych zwaną bramką  $q$ -bitową

## § 3. Funkcja Wignera jednej strategii

W rozważaniach skuteczności kwantowej gry rynkowej prowadzonych w następnym paragrafie ograniczamy się do najkorzystniejszej dla gracza polaryzacji targów<sup>5</sup>. Jest to gra z niekwantowym rynkiem, oferującym jednolitą cenę kupna i sprzedaży. Poza tym uwzględniamy jedynie przypadek, gdy transakcje kupna i sprzedaży zachodzą z jednakową intensywnością (gdyż wtedy efekty kwantowe są największe). Oznacza to, że typ transakcji (kupno, bądź sprzedaż) określa pomiar strategii gracza, który polega np. na jednakowo prawdopodobnym sprawdzeniu czy znajduje się ona w stanie  $|0\rangle$ , czy w stanie  $|0'\rangle$ . Łatwo można uogólnić prezentowane tu wyniki na dowolne intensywności transakcji kupna i sprzedaży, o których powinien decydować grający. Interesującą metodę uwzględnienia różnych intensywności kupna i sprzedaży, jak i bezpośrednio związany z tym zagadnieniem sposób identyfikacji funkcji Wignera, oferuje tomografia kwantowa<sup>6</sup>. Dla prostoty rachunkowej założymy, że na rynku mogą wystąpić jedynie dwa poziomy cenowe: cena niska i cena wysoka, a także przyjmijmy, że korzystne transakcje przynoszą graczowi wygraną (wypłatę) równą 1, niekorzystne zaś wypłatę  $-1$ . Niedojście transakcji do skutku to zerowa wartość wygranej. Przykładowo: w sytuacji niskiej ceny  $\mathcal{G}$  gracz akceptujący tanią

	00'	01'	10'	11'
niska cena	$-1 + 1 = 0$	$-1 + 1 = 0$	$0 + 1 = 1$	$0 + 1 = 1$
wysoka cena	$1 - 1 = 0$	$1 + 0 = 1$	$1 - 1 = 0$	$1 + 0 = 1$

Tabela 20.1. Macierz wypłat (wygranych kupca).

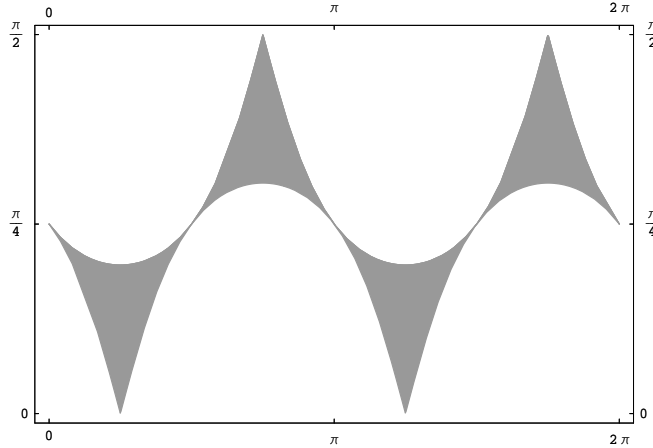
sprzedaż ( $|0\rangle$ ) i kupno po cenie wysokiej ( $|0'\rangle$ ) straci na sprzedaży (wygrana  $-1$ ) lecz zyska na kupnie (wygrana 1), bowiem akceptując cenę wysoką  $\mathcal{G}$  tym chętniej zakupi to dobro po cenie niskiej. Jego sumaryczna wygrana wyniesie  $-1+1=0$ . Pełną macierz  $M$  wypłat gracza przedstawia tabela 20.1. W przypadku klasycznych strategii optymalna metoda gry jest oczywista. Należy stosować dwie niezależne strategie: kupować tanio i sprzedawać drogo. Dla kupca grającego klasycznie optymalny sposób gry daje wygraną w wysokości  $\frac{1}{2}$  na jedną strategię (gdyż cena nie może być jednocześnie wysoka i niska). Jaki sposób gry optymalizuje przeciętną wygraną w przypadku strategii kwantowych? By odpowiedzieć na to pytanie należy wyznaczyć miarę (tzw. funkcję Wignera) z jaką, obliczając wartość oczekiwaną macierzy wypłat, powinniśmy uwzględnić

<sup>5</sup>zob. rozdz. 18<sup>6</sup>technika ta, wykorzystująca transformację Radona [Leo96], w wariacie przeliczalnie wymiarowych przestrzeni strategii była omówiona w rozdziale 17

wszystkie warianty koniunkcji zachowań gracza, polegających na akceptacji ceny niskiej (wysokiej) sprzedaży i ceny niskiej (wysokiej) kupna. Funkcja Wignera dla strategii kupieckiej  $|z\rangle$  ma postać macierzy  $2 \times 2$  o elementach [MLI01]

$$W_{km'}(e^{i\varphi} \text{tg } \theta) = \frac{1}{4} \left( 1 + (-1)^k \cos 2\theta + (-1)^{m'} \sqrt{2} \sin 2\theta \cos \left( \varphi - (-1)^k \frac{\pi}{4} \right) \right),$$

$k, m' = 0, 1$ . Wielkość  $W_{km'}(z)$  stanowi miarę<sup>7</sup> uwzględniania stanu kwantowego  $|z\rangle$  tak, jak gdyby znajdował się on jednocześnie w stanie  $(1-k)|0\rangle + k|\mathbf{I}\rangle$  oraz w stanie  $(1-m')|0'\rangle + m'|\mathbf{I}'\rangle$ . Sumy elementów kolumn czy wierszy macie-



Rysunek 20.1. Geograficzna projekcja kwantowych strategii kupca. Górna krzywa, odpowiadająca dwóm okręgom stykającym się w północnym biegunie sfery, zadana jest funkcją  $\theta(\varphi) = \frac{1}{2} \arccos \frac{\sin 2\varphi}{2 + \sin 2\varphi}$ .

rzy  $W(z)$ , zgodnie z jej własnościami, są odpowiednio prawdopodobieństwami zaobserwowania kupca posługującego się strategią  $|z\rangle$  w stanach  $|0\rangle$ ,  $|\mathbf{I}\rangle$ ,  $|0'\rangle$ ,  $|\mathbf{I}'\rangle$ :

$$W_{00}(z) + W_{01}(z) = \frac{|\langle z|0\rangle|^2}{\langle z|z\rangle}, \quad W_{10}(z) + W_{11}(z) = \frac{|\langle z|\mathbf{I}\rangle|^2}{\langle z|z\rangle},$$

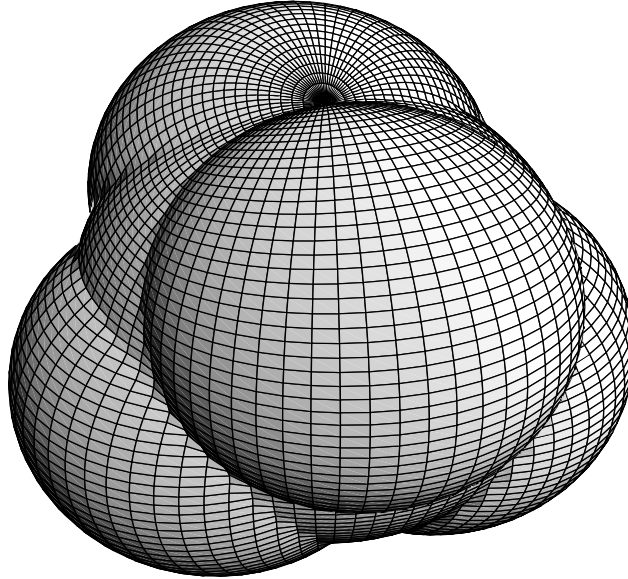
$$W_{00}(z) + W_{10}(z) = \frac{|\langle z|0'\rangle|^2}{\langle z|z\rangle}, \quad W_{01}(z) + W_{11}(z) = \frac{|\langle z|\mathbf{I}'\rangle|^2}{\langle z|z\rangle}.$$

Powyższe sumy, bezpośrednio wyznaczalne przez pomiar, muszą być dodatkowo określone. Analogiczne spostrzeżenie dotyczy sum diagonalnych elementów macierzy  $W(z)$ , gdyż są one prawdopodobieństwami zarejestrowania strategii  $|z\rangle$  w stanach  $|i\rangle$  oraz  $|-i\rangle$ :

$$(20.4) \quad W_{00}(z) + W_{11}(z) = \frac{|\langle z|i\rangle|^2}{\langle z|z\rangle \langle i|i\rangle}, \quad W_{10}(z) + W_{01}(z) = \frac{|\langle z|-i\rangle|^2}{\langle z|z\rangle \langle -i|-i\rangle}.$$

<sup>7</sup>niekoniecznie dodatnio określoną

Pomiaru wielkości (20.4) można dokonać badając popyt lub podaż strategii po uprzedniej jej transformacji za pomocą odpowiedniej taktyki. Reasumując, zauważyliśmy nieujemność sumy dowolnych dwóch elementów macierzy  $W(z)$ . Stąd wniosek, że dla ustalonej wartości parametru  $z$  tylko jeden element ma-



Rysunek 20.2. Sfera strategii  $S_2$ , której promień został zdeformowany o wielkość odstępstwa od dodatniej określoności funkcji Wignera strategii. Jest ono największe dla strategii  $z = \pm \left( \frac{\sqrt{3}-1}{2} (1 - i) \right)^{\pm 1}$ .

cierzy  $W(z)$  może przyjmować wartość ujemną. Sposób na osiągnięcie sukcesów nieznanymi strategiami klasycznym jest prosty. Należy interesować się strategiami kwantowymi  $|z\rangle$ , dla których ujemny element macierzy  $W(z)$  odpowiada najmniejszemu elementowi macierzy wypłat. Rysunek 20.1 przedstawia mapę obszarów sfery  $S_2$  niedostępnych żadnym strategiom klasycznym. Białe, ciasno rozmieszczone na powierzchni sfery koliste plamy, to cztery strefy w których macierz  $W(e^{i\varphi} \text{tg } \theta)$  nie jest dodatnio określona. Wyznaczające je graniczne okręgi są czterema rodzinami strategii  $z(\phi) = \pm(1 + (1 - i) \text{tg } \frac{\phi}{2})$  i  $z(\phi) = \pm \frac{1}{2}(\sqrt{2} e^{i\phi} + 1 - i)$ ,  $\phi \in [-\pi, \pi)$ . Przyjmując na  $S_2$  miarę niezmienniczą względem  $q$ -bitowych taktyk stwierdzamy, że klasycznie niedostępne obszary zajmują powierzchnię sfery największą, jaką tylko mogłyby zajmować. W tym sensie teoria kwantowa jest propozycją ekstremalną.

Warto jest zobrazować odstępstwo  $\kappa$  funkcji Wignera od dodatniej określoności, właściwej klasycznym gęstościom prawdopodobieństw. Wielkość  $\kappa$

decyduje o atrakcyjności strategii kwantowych. Wyraźmy ją najmniejszym elementem macierzy  $W(z)$ , czyli  $\kappa(\varphi, \theta) := -\min_{k,l} W_{kl}(\varphi, \theta)$ , w obszarze parametrów strategii, gdzie  $W(z)$  nie jest dodatnio określona (w obszarach o dodatnio określonej macierzy  $W(z)$  niech  $\kappa(\varphi, \theta) := 0$ ). Rysunek 20.2 przedstawia sferę strategii kupieckich o promieniu  $r$  zdeformowaną przy pomocy tej funkcji współrzędnych geograficznych ( $r \rightarrow (1 + 2\kappa(\varphi, \theta))r$ ).

#### § 4. Niekolektywne gra z rynkiem proponującym ceny

Niech z prawdopodobieństwem  $p$  rynek oferuje wysoką cenę  $\mathfrak{G}$ , zaś cenę niską z prawdopodobieństwem  $1-p$ . Gdy macierz wypłat  $M$  przyjmuje wartości zawarte w tabeli 20.1, to przeciętna wygrana kupca wynosi

$$w(p, z) := E(M) = (1-p)(W_{10'} + W_{11'}) + p(W_{01'} + W_{11'}) = \\ p(W_{01'} - W_{10'}) + W_{10'} + W_{11'} = \frac{p(1-z)(1-\bar{z}) + 2(1-p)|z|^2}{1+|z|^2}.$$

Strategia maksymalizująca wartość oczekiwaną wygranej  $w(p, z)$  jest, z wyjątkiem skrajnych przypadków  $p = 0, 1$ , giffenem<sup>8</sup>:

$$z_{\max}(p) = \frac{1-p}{p} - \sqrt{1 + \left(\frac{1-p}{p}\right)^2}.$$

Na sferze  $S_2$  rodzina ta wypełnia ćwiartkę wielkiego okręgu  $\varphi = \pi$ ,  $\theta \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ , a w połowie tego łuku znajduje się optymalna strategia dla  $p = \frac{1}{2}$  (o największej pośród strategii optymalnych dewiacji  $\kappa$ ), której macierz Wignera ma postać

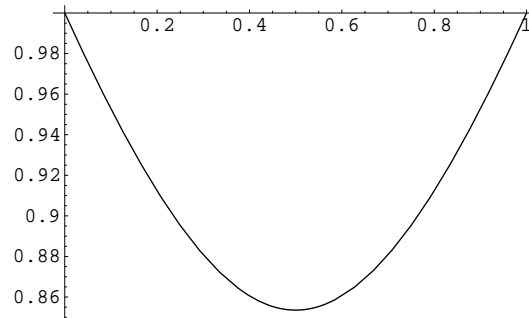
$$W(\pi, \frac{3}{8}\pi) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{2} & 1 \\ 1 & 1 + \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

i odpowiada strategii będącej punktem stałym taktyki  $\mathcal{X}\mathcal{X}'\mathcal{F}\mathcal{X}'\mathcal{X}$ . Interesujące jest, że przy  $p = \frac{1}{2}$  najgorszą dla kupca strategią kwantową, przynoszącą zysk  $\frac{2-\sqrt{2}}{4}$ , jest punkt stały taktyki  $\mathcal{F}$  równy  $z = \sqrt{2} - 1$ , czyli strategia jednakowa w interpretacjach podaźowej i popytowej. Także i wtedy uzyskany w grze wynik jest lepszy od najgorszego rezultatu osiągalnego klasycznie.

Omaowaną grę da się w prosty sposób uogólnić na realistyczną sytuację dowolnych cen rynkowych dobra  $\mathfrak{G}$ . Taki kwantowy rynek możemy postrzegać

<sup>8</sup>W rozdziale 15 odnajdziemy definicję giffena jako strategii, której nie odpowiada żadna dodatnio określona gęstość prawdopodobieństwa. Co prawda odpowiadająca funkcji Wignera skumulowana warunkowa funkcja podaży (bądź popytu) jest w tym przypadku zgodna z prawem podaży (popytu), jednak nie może być ona bezpośrednio mierzalna (pojawiają się wartości miary warunkowej większe niż 1).





Rysunek 20.3. Wykres maksymalnego zysku jako funkcji intensywności  $p$  występowania ceny wysokiej,  $w_{\max} = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{8} + \frac{1}{2}(p - \frac{1}{2})^2}$  (największy zysk w grze klasycznej to  $\frac{1}{2}$ ).

jako sumę (z punktu widzenia wygranej) gier  $q$ -bitowymi strategiami, prowadzonych przez gracza o każdą cyfrę (*cena niska*  $\rightarrow 0$ , *cena wysoka*  $\rightarrow 1$ ) rozwinięcia binarnego logarytmu ceny  $\mathfrak{G}$ . Użycie funkcji logarytm uniezależnia grę od stosowanych jednostek pieniężnych, czy jednostek miary dobra  $\mathfrak{G}$ .

## § 5. Alianse

Przejdźmy do rozważań dotyczących gier z rynkiem klasycznym, w których dopuszczamy by strategie  $N$  graczy mogły oddziaływać wzajemnie na siebie.  $N$ - $q$ -bitowy stan gry (możemy go interpretować jako kolektywną, kwantowo splątaną strategię gry z rynkiem<sup>9</sup>) jest teraz elementem przestrzeni  $\mathbb{C}P^{2^N-1}$ . Jego współrzędne jednorodnie stanowią element iloczynu tensorowego współrzędnych jednorodnych  $q$ -bitowych przestrzeni strategii kwantowych poszczególnych graczy.

Badając własności unitarnych transformacji tych przestrzeni opracowano sposoby efektywnego otrzymywania wyników w problemach trudnych obliczeniowo na maszynie Turinga, więc nie nadających się efektywnie realizować na klasycznych komputerach [NC00], dlatego układy te zwykle się nazywają komputerami kwantowymi<sup>10</sup>. W przypadku kwantowych gier rynkowych dowolna  $N$ - $q$ -bitowa transformacja unitarna wydaje się akceptowalna jako taktyka kolektywna graczy, gdyż posiada naturalną realizację w postaci zaskakująco

<sup>9</sup>rynek klasyczny może być np. wystarczająco dużym zespołem statystycznym strategii kolektywnych, uzupełnionym o wykonującą pomiary podaż i popytu izbę rachunkową, która wyznacza optymalne wartości cen, zob. rozdz. 15

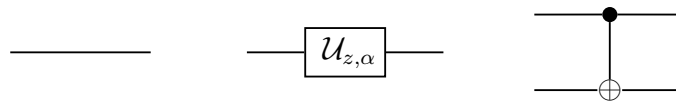
prostych operacji, zadawanych w jednoznaczny sposób przez poszczególnych graczy, bądź przez ich pary. Dla jej przedstawienia wystarczy wprowadzić dwu- $q$ -bitową inwolutywną bramkę  $\mathcal{C}$ , która nietożsamościowo działa jedynie na podprzestrzeni strategii dowolnie wybranych dwóch graczy i ma tam następującą postać:

$$(20.5) \quad \mathcal{C} := \frac{1}{2}(I + \mathcal{X}') \otimes I + \frac{1}{2}(I - \mathcal{X}') \otimes \mathcal{X}.$$

Jeśli pierwszy z graczy sprzedając  $\mathfrak{G}$  akceptuje wysoką cenę (gra strategią  $|I\rangle$ ), to w wyniku operacji  $\mathcal{C}$  strategia drugiego gracza dozna inwersji, a nie ulegnie zmianie, gdy pierwszy gracz godzi się na sprzedaż po niskiej cenie. W interpretacji rynkowej nazwiemy bramkę  $\mathcal{C}$  aliansem<sup>11</sup>. Jeżeli rozważamy efekty aliansu  $\mathcal{C}$  po stronie operacji kupna (baza ( $|0'\rangle$ ),  $|I'\rangle$ )), to okazuje się wtedy, że role graczy ulegają odwróceniu, co wynika z następującego rachunku:

$$(20.6) \quad \mathcal{C}' = (\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}) \left( \frac{1}{2}(I + \mathcal{X}') \otimes I + \frac{1}{2}(I - \mathcal{X}') \otimes \mathcal{X} \right) (\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}) = I \otimes \frac{1}{2}(I + \mathcal{X}') + \mathcal{X} \otimes \frac{1}{2}(I - \mathcal{X}').$$

Rozróżnienie kto kim manipuluje podlega transpozycji w zależności od podażowego czy popytowego kontekstu.



Rysunek 20.4. Elementy składowe układu kwantowego: strategia gracza (z lewej),  $q$ -bitowa taktyka (środkowy), alianse  $\mathcal{C}$  (z prawej).

Prawie wszystkie bramki dwu- $q$ -bitowe posiadają własność uniwersalności, tzn. przy użyciu prawie każdej z nich można zbudować dowolną transformację unitarną kolektywnej strategii [DBE95]. Jednak w przypadku kwantowych gier rynkowych szczególnie przejrzystym interpretacyjnie zabiegiem jest przedstawianie taktyki kolektywnej  $N$  graczy jako układu złożonego z sekwencji różnych operacji  $\mathcal{U}_{z,\alpha}$  w jednowymiarowych  $q$ -bitowych podprzestrzeniach strategii graczy oraz z alianсів  $\mathcal{C}$  pomiędzy nimi<sup>12</sup>. Dlatego alianse można traktować jako jedyny mechanizm służący do zawiązywania gier kolektywnych. Wszystkie

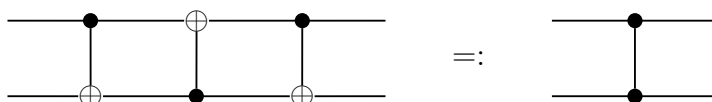
<sup>10</sup>skonstruowany w oparciu o współczesną nam technologię komputer kwantowy może w zasadzie składać się z wielu kwantowych układów liczących i części pomocniczych (takich jak urządzenia stabilizujące jego pracę, korektory błędów, interfejsy itp.), jednak jakościowa przewaga możliwych do uruchomienia na takiej maszynierii algorytmów wynika z unikalnych własności układu kwantowego

<sup>11</sup>w literaturze przyjęła się dla tej bramki nazwa *controlled-NOT*, jednak (nawiązując do definicji klasycznego odpowiednika) sugeruje ona niesymetryczne efekty takiej operacji wywołane kontrolą drugiego z graczy przez pierwszego, co w świetle dalszych uwag nie znajduje uzasadnienia

<sup>12</sup>możliwość konstruowania dowolnego elementu grupy  $SU(2^N)$  tylko z takich bramek została wykazana w pracy [BBC<sup>+</sup>95]

elementy potrzebne do zbudowania kwantowego układu gry odnajdziemy na rysunku 20.4. Uogólnienia gry na dowolne wartości cen czy większą ilość dóbr transakcyjnych jedynie powiększają złożoność takich układów.

Nie tylko wrażenie kontrolowania strategii podlega transpozycji. Gracze mogą wymieniać się swoimi strategiami (a w konsekwencji może dochodzić do dowolnej permutacji strategii). Wystarczy zauważyć, że wymianą taką skutkuje odpowiednie złożenie trzech aliansów  $\mathcal{T} = \mathcal{C}\mathcal{C}'\mathcal{C}$ , patrz rys. 20.5. Tak więc wzór (20.6) ma postać  $\mathcal{C}' = \mathcal{T}\mathcal{C}\mathcal{T}$ . W sytuacji gdy sprzedający akceptuje niską cenę



Rysunek 20.5. Taktyka wymiany strategii  $\mathcal{T}$  jako wynik trzech aliansów.

alians  $\mathcal{C}$  pozwala innemu graczowi zmienić strategię tamtego, w pełni korelując ją z własną, tzn. doprowadzając do zgodnej z własną dwu- $q$ -bitowej strategii splątanej:

$$(20.7) \quad \mathcal{C}|z\rangle|0\rangle = \mathcal{C}|0\rangle|0\rangle + z\mathcal{C}|I\rangle|0\rangle = |0\rangle|0\rangle + z|I\rangle|I\rangle.$$

Strategię sprzedaży przy cenie wysokiej alians sprowadza do antykorelowanej strategii splątanej:

$$\mathcal{C}|z\rangle|I\rangle = |0\rangle|I\rangle + z|I\rangle|0\rangle.$$

Analogiczne (transponowane względem powyższych) manipulacje zachodzą w kontekście popytowym.

## § 6. Alianse a pomiar i interferencja

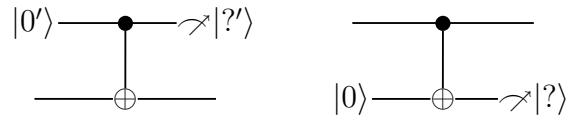
Alians jest transformacją pozwalającą graczowi rynkowemu poznać stan popytowy lub podażyowy innego gracza na podstawie pomiaru stanu własnej, przekształconej po zawartym aliansie, strategii. Wynika to z następujących własności aliansu<sup>13</sup>

$$\mathcal{C}|0'\rangle|m'\rangle = |m'\rangle|m'\rangle, \quad \mathcal{C}|m\rangle|0\rangle = |m\rangle|m\rangle,$$

gdzie  $m = 0, I$ , które kolejno zobrazowane są przez diagramy znajdujące się na rysunku 20.6. Warto tu zauważyć, że lewy diagram przedstawia pomiar obserwabli  $\mathcal{X}$ , a prawy — obserwabli  $\mathcal{X}'$ .

Ze względu na istniejące głębokie analogie z tematyką bieżącego rozdziału warto w tym miejscu uczynić dygresję o zaproponowanej w 1970 roku przez

<sup>13</sup>będących szczególnymi przypadkami własności (20.7) w kontekście popytu i podaży



Rysunek 20.6. Alians jako sposób poznawania strategii innego gracza w kontekstach popytu i podaży. Znak „ $\diagup$ ” na prawym końcu linii  $q$ -bitu symbolizuje odpowiedni pomiar.

Stephena Wiesnera idei wytwarzania niemożliwych do podrobienia pieniędzy [Wie83]. Ta pierwsza konstrukcja myślowa funkcji jednokierunkowej opiera się na fundamentalnej właściwości  $q$ -bitu, dlatego, w przeciwieństwie do swych matematycznych odpowiedników [Sch95a], jest niekwestionowalna. Wyprzedza ona o trzy lata pomysł Clifforda Cocks<sup>14</sup> zastosowania trudnej do odwrócenia operacji na liczbach i pozwoliła w 1984 roku Charlesowi Bennettowi i Gillesowi Brassardowi wynaleźć całkowicie bezpieczną kryptografię kwantową, która w przeciwieństwie do popularnych obecnie rozwiązań opartych na kluczu publicznym odporna jest na ataki z użyciem komputera kwantowego. Niepodrabialny banknot Wiesnera<sup>15</sup> opatrzony jest parą numerów, z których jeden jest tajny. Każda z cyfr tajnego numeru (podanych w systemie czwórkowym) zakodowana jest  $q$ -bitem wybranym odpowiednio spośród elementów ciągu ( $|0\rangle$ ,  $|I\rangle$ ,  $|0'\rangle$ ,  $|I'\rangle$ ). Znajomość sekwencji cyfr tajnego numeru umożliwia nieniszczącą weryfikację autentyczności takiego banknotu, gdyż pozwala określić właściwą metodę ich odczytu, stanowiącą zapadnię (tajne drzwi) w jednokierunkowej funkcji Wiesnera. Formalny kontekst popytowy bądź podażowy cyfry zakodowanej w  $q$ -bicie dyktuje konieczność wyboru sposobu pomiaru przedstawionego odpowiednio na lewej bądź na prawej części rysunku 20.6. W historii rozwoju teorii informacji pomysł Wiesnera okazał się być zbyt wczesny, o czym świadczą kłopoty z jego publikacją, a przecież jest niezwykle prosty i mógłby się pojawić nawet kilkadziesiąt lat wcześniej — stan wiedzy fizycznej pozwalał na to.

Przeprowadzenie pomiaru niszczy ewentualne splątania strategii graczy. Dlatego splątania te mogą utrzymywać się jedynie dzięki nieświadomości graczy co do postaci własnych strategii. Interesująca jest odmiana gier kwantowych z uczestnikami o umysłach kwantowych (czy z obsługującymi grę samoświadomymi automatami kwantowymi [Alb83]). W ramach interpretacji wielu światów<sup>16</sup> [Deu98] gracz taki ma świadomość własnej strategii w każdym z interferujących ze sobą światów. Jeśli owe światy nie rozdzielą się, a stan ten zostanie poddany ewentualnym kolejnym transformacjom (taktykom) i w końcu pomiar

<sup>14</sup>w 1975 roku wraz z Jamsem Ellisem i Malcolmem Williamsem opracował kryptografię z kluczem publicznym. Szyfr RSA powstał niezależnie w 1977 roku. Te i inne informacje dotyczące historii kryptografii odnajdziemy w książce [Sin01]

<sup>15</sup>współczesna technologia nie pozwala na ich odpowiednio tanią emisję

<sup>16</sup>polskie słowo *wszechświat* mogłoby być synonimem wielu światów

strategii gracza zostanie przeprowadzony w odmienny sposób, to wtedy taki kwantowy umysł będzie charakteryzowała amnezja odnośnie tamtych odmiennych stanów świadomości. Umysł kwantowy, chcący pozostawać na poziomie unitarnej (więc zdeterminowanej) ewolucji kwantowej, jest bezwolny, bo w pełni na nią skazany<sup>17</sup>. Mógłby próbować doprowadzić do modyfikacji dalszej ewolucji stosując taktykę korzystną z punktu widzenia tego składnika interferujących strategii, którego jest właśnie świadom. Operacja taka komunikowałaby informację o jego stanie, więc byłaby równoważna z pomiarem niweczącym wszelkie korzyści wynikające z pozostawania w interferencji z innymi światami. Jednakże sama możliwość zniszczenia, bądź pozostania w interferencji, którą mógłby posiadać świadomy stanu swej strategii umysł kwantowy, dawałaby mu przewagę nad umysłem klasycznym. Tylko jego bierne pozostawanie w interferencji na skutek koniecznej amnezji wymknęło by się jego późniejszej ocenie co do tego, czy zachował się utylitarnie, czy altruistycznie. W zależności od przyjmowanej interpretacji teorii kwantowej wnioski z takich rozważań mogą się nieco różnić pomiędzy sobą. W każdym razie uczestnicy gier kwantowych muszą zachowywać ostrożność w kontrolowaniu własnych strategii, zaś sama procedura dozwolonych pomiarów winna stanowić istotną część zasad prowadzenia gry. Ograniczona znajomość własnych strategii gracza wchodzącego w alianse musi skutkować charakterystyczną dla kwantowej rozgrywki spontanicznością.

Uwzględniając następujące tożsamości:

$$(20.8) \quad \begin{aligned} (I \otimes \mathcal{X})\mathcal{C} &= \mathcal{C}(I \otimes \mathcal{X}), \\ (\mathcal{X}' \otimes I)\mathcal{C} &= \mathcal{C}(\mathcal{X}' \otimes I), \\ (\mathcal{X} \otimes I)\mathcal{C} &= \mathcal{C}(\mathcal{X} \otimes \mathcal{X}'), \\ (I \otimes \mathcal{X}')\mathcal{C} &= \mathcal{C}(\mathcal{X}' \otimes \mathcal{X}') \end{aligned}$$

oraz, zgodnie z formułą (20.2), postrzegając  $q$ -bitowe taktyki  $\mathcal{U}_{z,\alpha}$  jako transformacje złożone z inwersji podaży  $\mathcal{X}$  i popytu  $\mathcal{X}'$  dochodzimy do wniosku, że każdą grę (strategię kolektywną) możemy rozważać jako superpozycję pewnych prostych strategii kolektywnych, z których każda powstała w dwóch odrębnych etapach<sup>18</sup>: najpierw gracze zawarli stosowne alianse, a potem niektórzy z nich wykonali pojedyncze inwersje podaży  $\mathcal{X}$  lub popytu  $\mathcal{X}'$  lub obydwie te operacje  $\mathcal{X}\mathcal{X}'$ . Przystawianie aliansów z  $q$ -bitowymi inwersjami w zależności od ich usytuowania nic nie zmienia, bądź skutkuje klonowaniem tych ostatnich<sup>19</sup>.

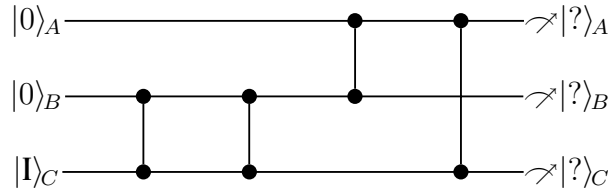
<sup>17</sup>por. zagadnienie wolnego wyboru w omówionym w następnym rozdziale paradoksie Newcomba

<sup>18</sup>etapy te mogą występować także w odwrotnej chronologii

<sup>19</sup>jest interesujące, że takie same efekty pojawiają się przy przestawianiu aliansów tak na lewo, jak i na prawo; prawe odpowiedniki tożsamości (20.8) otrzymamy mnożąc występujące w (20.8) wyrażenia przez  $\mathcal{C}$  z lewej i z prawej strony

### § 7. Uwagi o rynkowych grach kolektywnych

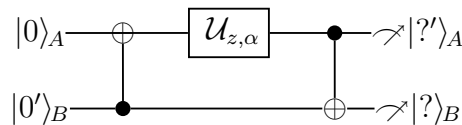
Grę prowadzoną jedynie z użyciem taktów  $\mathcal{T}$  (więc pozbawioną własności nieznanych w grach klasycznych) zwykliśmy wykorzystywać do losowania wygranej w sytuacjach, gdy nie dysponujemy stosownym instrumentem losującym [Gar66]. Polega ona na tym, że osoba przeprowadzająca losowanie<sup>20</sup> rysuje



Rysunek 20.7. Losowanie bez przyrządu losującego — układ zbudowany wyłącznie z transpozycji  $\mathcal{T}$ .

na kartce poziome linie odpowiadające osobom biorącym udział w losowaniu, znaczy lewy koniec jednej z linii i zagina kartkę tak, by pozostali nie widzieli lewych końcówek. Wtedy reszta uczestników dorysowuje dowolną liczbę pionowych kresek, z których każda łączy dwie linie poziome. Rozstrzygnięcie losowania polega na wspólnym odnalezieniu osoby na linii której znajdowałyby się wyjście z labiryntu zbudowanego zgodnie z rysunkiem, gdyby przechodzący labirynt wszedł weń z lewej strony w zaznaczonym miejscu, wchodził w każdy napotkany pionowy korytarz, nigdy nie szedł w lewo i nie cofał się. Układ przedstawiony na rysunku 20.7 daje wygraną Alicji (A). Przeprowadzane zgodnie z powyższym przepisem losowania są sprawiedliwe, gdyż uczestnicy wybierają permutację, złożoną z transpozycji zadanych przez nich zupełnie przypadkowo.

Rozważmy prosty przykład gry kolektywnej, dla której nie istnieje klasyczny odpowiednik. Naszą grę rozpoczynają: Alicja (A) — gotowa na sprzedaż dobra  $\mathcal{G}$  po niskiej cenie i Bill (B) mający ochotę drogo kupić  $\mathcal{G}$ . Jednak, zamiast



Rysunek 20.8. Gra „mistrz i uczeń” (supergęste kodowanie).

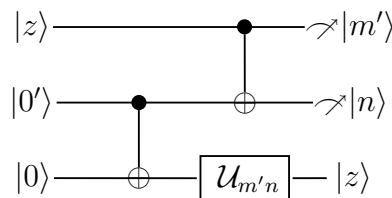
przystąpić od razu do transakcji (odpowiedniego pomiaru strategii graczy), Bill zawiera alians z Alicją, po czym ona zmienia swoją strategię  $q$ -bitową taktynką

<sup>20</sup>może ona uczestniczyć w losowaniu, bądź nie

(20.2) i zawiera alians z Billem. W wyniku tej przedstawionej na rysunku 20.8 gry powstaje splątany stan kwantowy  $|z, \alpha\rangle_{AB} \in \mathbb{R}P^3 \subset \mathbb{C}P^3$ :

$$(20.9) \quad |z, \alpha\rangle_{AB} := \mathcal{C}(\mathcal{U}_{z,\alpha} \otimes I) \mathcal{C}' |0\rangle_A |0'\rangle_B = \\ \cos(\alpha) |0'\rangle_A |0\rangle_B + i \sin(\alpha) (E_z(\mathcal{X}) |0'\rangle_A |I\rangle_B + E_z(\mathcal{X}') |I'\rangle_A |0\rangle_B + E_z(\mathcal{X}\mathcal{X}') |I'\rangle_A |I\rangle_B).$$

Chociaż Bill nie może naśladować taktyki Alicji  $\mathcal{U}_{z,\alpha}$  klonując jej strategię, to przez obserwację stanu (20.9) w sytuacjach gdy Alicja kupuje, a on sprzedaje, wiele dowie się o jej taktyce, gdyż pozna względne proporcje składających się na nią transformacji  $I$ ,  $\mathcal{X}$ ,  $\mathcal{X}'$  i  $\mathcal{X}\mathcal{X}'$ . Dla Alicji gra także jest interesująca, bo pozwala na, stosowne do jej celów, skorelowanie strategii jej i Billa. Ze względu na znaczenie omawianej gry dla teorii informacji nazywamy ją supergęstym kodowaniem [RP00]. Jeśli Alicja i Bill są oddaleni od siebie i dysponują stanem splątany  $|0\rangle_A |0\rangle_B + |I\rangle_A |I\rangle_B$  (jest to kolektywna strategia Alicji i Billa przed przekształceniem  $\mathcal{U}_{z,\alpha} \otimes I$ ) to np. Alicja wybierając jedną z czterech taktyk  $I$ ,  $\mathcal{X}$ ,  $\mathcal{X}'$ ,  $\mathcal{X}\mathcal{X}'$  jest w stanie przekazać Billowi wiadomość o swym wyborze (2 bity informacji) przesyłając mu tylko swój pojedynczy  $q$ -bit w celu wykonania na nim (wraz z  $q$ -bitem Billa) stosownych pomiarów. W czterech rzutowaniach na stany ortogonalne  $|0'\rangle_A |0\rangle_B$ ,  $|0'\rangle_A |I\rangle_B$ ,  $|I'\rangle_A |0\rangle_B$  i  $|I'\rangle_A |I\rangle_B$  tylko jeden z pomiarów da Billowi wynik pozytywny, będący treścią przekazanej wiadomości<sup>21</sup>. Przekaz ten posiada gęstość informacyjną nieosiągalną w klasycznych protokołach transmisji danych i zapewnia doskonałą poufność, gdyż każdy podsłuch nieodwracalnie niszczy jego spójność kwantową.



Rysunek 20.9. Teleportacja strategii  $|z\rangle$ , polegająca na pomiarze własności taktyki  $\mathcal{U}_{m'n} := \mathcal{X}^{[n=I]} \mathcal{X}'^{[m'=I]}$ .

Jeśli gracz wejdzie w alians z drugim (patrz rys. 20.9), który wcześniej zawarł alians z innym graczem, wtedy ten trzeci, korzystając z odpowiednich pomiarów strategii pierwszego i drugiego gracza, może w oparciu o te dwa bity informacji tak przekształcić swoją strategię, że będzie ona identyczna z pierwotną strategią gracza pierwszego. Takie przejęcie strategii przez pomiar dwóch innych nazywane jest teleportacją [BBC<sup>+</sup>93, SJJ00]. Powyższa właściwość jest

<sup>21</sup>odpowiedzi na dwa pytania: „czy Alicja kupi drogo?” i „czy Bill sprzeda tanio?” odkodują treść wiadomości od Alicji

konsekwencją następującej, łatwej do sprawdzenia tożsamości<sup>22</sup>:

$$2(\mathcal{C} \otimes I)(I \otimes \mathcal{C})|z\rangle|0'\rangle|0\rangle = |0'\rangle|0\rangle|z\rangle + |0'\rangle|I\rangle\mathcal{X}|z\rangle + |I'\rangle|0\rangle\mathcal{X}'|z\rangle + |I'\rangle|I\rangle\mathcal{X}\mathcal{X}'|z\rangle.$$

Przypomnijmy, że gracze nie mogą rozmnażać strategii<sup>23</sup>, lecz jeśli już istnieje kilka strategii jednakowych, to w grze kwantowej nie sposób jest pomniejszyć ich ilość za pomocą jakiegokolwiek przyrządu klasycznego<sup>24</sup>.

Analizowany w paragrafie 4 najskuteczniejszy sposób prowadzenia niekolektywnej kwantowej gry rynkowej jest oczywisty — w zależności od przyjętej za warunek brzegowy strategii gry należy dobrać odpowiednią taktykę  $q$ -bitową, która w rezultacie doprowadzi nas do wyznaczonej strategii  $|z_{\max}(p)\rangle$  o najwyższym zysku. W grze kolektywnej powinniśmy ustalić sposób decydowania o postaci taktyki graczy. Wydaje się, że całą konstrukcję kwantowego układu gry powinni przeprowadzać sami gracze. Można np. przyjąć, że każdemu z graczy wolno operować na własnym  $q$ -bicie i zawiązywać określoną liczbę aliansów z innymi, przy czym poszczególne alianse mogą być tajne (wiadome jedynie parze graczy pozostającej w aliansie), bądź nie. Dla rozważania takiej gry jako autonomicznego rynku wystarczy uwzględnić izbę rozrachunkową, która oprócz mierzenia taktyk graczy obciąża ich kosztami gry, pomniejszając wypłaty wszystkich graczy jednakowo tak, że suma wypłat jest zawsze zerowa.

Rynkowa kolektywna gra kwantowa może być wykorzystywana do pożądanego rozlokowania prawa dysponowania dobrem  $\mathfrak{G}$  (czy pieniądzem). Wtedy bezpośrednim celem gracza nie jest maksymalizacja wygranej, lecz jedynie odpowiednie kwantowe splątanie za pomocą aliansów swej taktyki z taktykami innych graczy. Dla uniknięcia rywalizacji o wyższą wygraną można wprowadzić reguły gwarantujące bezzawisność. Z powodu operacyjnej i informacyjnej przewagi, jaką ma alians wstawiany w schemat kwantowy w dalszej kolejności (po aliansach zawartych już przez innych graczy), gwarancja taka może polegać na pozostawieniu graczom, którzy zrezygnowali już z zawierania aliansów, prawa do wymiany strategii ( $\mathcal{C}'\mathcal{C}$ ), na zasadach zgodnych z procedurą Banacha-Knastera [BT96, Pio99a]. Dla  $N=2$  takie rozwiązanie występuje w popularnej metodzie sprawiedliwego podziału: jeden dzieli, drugi wybiera<sup>25</sup>.

<sup>22</sup>gdym się pamięta, że elementarne taktyki  $\mathcal{X}$ ,  $\mathcal{X}'$ ,  $\mathcal{X}\mathcal{X}'$  są inwolucjami

<sup>23</sup>zakaz klonowania, rozdz.18 §2

<sup>24</sup>twierdzenie o nieredukowalności, rozdz. 19

<sup>25</sup>cywilizacje Morza Śródziemnego stosują tą metodę już przynajmniej 2800 lat [BT96]. W grach towarzyskich prawdopodobnie pojawiła się na Dalekim Wschodzie (zob. np. gra renju, <http://www.playsite.com>), współcześnie występuje także jako „swap rule” w grze *hex*, którą wymyślił w 1942 roku duński poeta i matematyk Piet Hein, a ponownie odkrył John Nash[Pij92] — ekonomista intrygujący twórców swym umysłem (dla gry tej Vadim Anshelevich opracował niezwykle skuteczny algorytm efektywny, który sprowadza rozwiązanie problemu najlepszego ruchu gracza do znalezienia odpowiedniego układu Kirchhoffa o ekstremalnym przepływie prądu elektrycznego [Ans02], co nasuwa interesujące skojarzenia z rozważanymi tu układami kwantowymi).



Stopień niepełności informacji posiadanej przez poszczególnych graczy o topologii zawartych aliansów rzutuje na sposób poszukiwania optymalnej taktyki gracza i na jej postać. Badanie skutecznych metod rozgrywania kolektywnych kwantowych gier rynkowych, nawet w ich najprostszyc wariantach, wykracza poza ograniczone ramy książkowego rozdziału.

## Kwantowe rozwiązanie paradoksu Newcomba

### § 1. *Newcombmania*

Wśród specjalistów badających mechanizmy funkcjonowania mózgu przeważa pogląd, że charakterystyczne rozmiary interesujących ich zjawisk wykluczają istotny w nich udział efektów kwantowych [Sco99]. Jednak ostatnio przeprowadzone eksperymenty wykazują, że np. właściwe jedynie teorii kwantowej zjawisko istnienia stanów splątanych może zachodzić w temperaturze pokojowej pomiędzy oddalonymi obiektami wielkości piłek golfowych [Col02]. Fizycy z powodzeniem stosują mechanikę kwantową do opisu *in gremio* wielu złożonych obiektów, o w zasadzie dowolnych rozmiarach, nie stroniąc z używaniem formalizmu kwantowego także przy badaniu tych ekstremalnie wielkich, jak czarne dziury i wszechświat. Czy modele zjawisk dotyczących świadomości, łącznie z zachowaniami społecznymi, powinny być oparte na teorii kwantowej? Na takie pytanie będziemy potrafili odpowiedzieć dopiero po zbadaniu własności i po eksperymentalnej weryfikacji stosownych modeli kwantowych. Poniżej rozważymy skrajnie proste w opisie zagadnienie, które umożliwia próbę poznania, jakie rozwiązania może proponować teoria kwantów dla wzorcowego problemu teorii gier.

W 1960 roku fizyk William Newcomb zaintrygował filozofa Roberta Nozicka [Noz69] stwierdzeniem, że w przypadku elementarnej gry scharakteryzowanej macierzą  $M$ , wyrażającą wysokość wygranych gracza 1 we wszystkich możliwych sytuacjach,

$$(21.1) \quad M := \begin{pmatrix} 1000 \$ & 1\,001\,000 \$ \\ 0 & 1\,000\,000 \$ \end{pmatrix},$$

(której wiersze odpowiadają kolejno jego strategiom: żeńskiej  $|0\rangle_1$  i męskiej<sup>1</sup>  $|1\rangle_1$ , a kolumny — strategiom przeciwnika  $|0\rangle_2, |1\rangle_2$ ) nie jest on w stanie określić preferowanej przez siebie strategii nie znając miary zachodzenia *a posteriori*

<sup>1</sup> zasadność wprowadzenia takich przymiotników dla określenia charakteru odpowiednich strategii poznamy w §3 tego rozdziału

poszczególnych czterech zdarzeń. Jest tak, mimo iż strategia żeńska  $|0\rangle_1$  dominuje nad  $|1\rangle_1$ , oferując przy każdej strategii przeciwnika wyższą wygraną. Wybór strategii męskiej  $|1\rangle_1$  okazuje się korzystniejszy np. w sytuacji, gdy zdarzenia odpowiadające niediagonalnym elementom macierzy  $M$  nie zachodzą, a zdarzenia odpowiadające elementom diagonalnym zachodzą ze zbliżonymi do siebie wartościami prawdopodobieństw. Sytuacja taka może mieć miejsce wtedy, gdy przeciwnik jest w stanie przewidzieć posunięcia gracza 1. Z powodu tej paradoksalnej własności gra powyższa, z niedoprecyzowaną miarą zachodzenia zdarzeń, jest wdzięcznym tematem spekulacji dotyczących wolnej woli, intrygujących ekonomistów, filozofów i teologów [Str01, Noz69, Cra87]. Toczące się dysputy określono już mianem *newcombmanii* [Lev82], dlatego warto przyjrzeć się grze Newcomba w kontekście gier kwantowych, co też uczynimy w bieżącym rozdziale. Historia teorii prawdopodobieństwa odnotowała wiele znamiennych przykładów, gdy niedoprecyzowanie w badanym modelu probabilistycznej miary prowadziło do intrygujących sprzeczności. Wystarczy wspomnieć sławne paradoksy Bertranda [KM63], czy Banacha-Tarskiego [BT24]. Niepomni wpływających stąd wniosków kolejni uczeni w podobnych okolicznościach zajmują się filozoficznymi spekulacjami, jednocześnie ignorując potrzebę zadania probabilistycznej miary dla omawianego przez siebie modelu, albo wyrażając zdumienie w oczywistych sytuacjach, gdy różne miary prowadzą do odmiennych wyników.

---

## § 2. Kwantowy opis gry

Stany  $\mathcal{W}$ , które mierzą gęstość stosowanych strategii graczy 1 i 2 są, w rozpiętej przez nie dwu- $q$ -bitowej przestrzeni  $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ , dodatnio określonymi operatorami hermitowskimi o śladzie równym 1. Te ze stanów gry, które w ramach klasycznej teorii gier mają swój równoważny opis w języku strategii mieszanych, reprezentowane są diagonalną postacią operatora gęstości  $\mathcal{W}$

$$\mathcal{W} = \sum_{r,s=1}^2 W_{rs} |r-1\rangle_1 |s-1\rangle_2 \langle r-1|_2 \langle s-1|_1$$

gdzie  $(W_{rs})$  jest macierzą nieujemnych elementów o sumie równej 1, a wyrażenia  $|r\rangle_1 |s\rangle_2 \langle r|_2 \langle s|_1$ ,  $r, s \in \{0, 1\}$ , są operatorami rzutowymi na stany gry  $|r\rangle_1 |s\rangle_2 \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ . Niediagonalne stany  $\mathcal{W}$  opisują sytuacje gry, których nie sposób uwzględnić w ramach klasycznej teorii.

Uogólniając w naturalny sposób opis klasyczny przyjmujemy, że obserwabłą wypłat jest operator hermitowski  $\mathcal{M}$  zdefiniowany przy pomocy macierzy

(21.1):

$$\mathcal{M} := \sum_{r,s=1}^2 M_{rs} |r-1\rangle_1 |s-1\rangle_2 \langle r-1|_2 \langle s-1|_1.$$

Wtedy, zgodnie z klasyczną interpretacją gry, oczekiwana wygrana gracza 1 jest sumą elementów diagonalnych iloczynu macierzy  $M$  i macierzy transponowanej do  $W$

$$E(\mathcal{M}) := \text{Tr} \mathcal{M} \mathcal{W} = \sum_{rs} M_{rs} W_{rs} = \text{Tr} M W^T.$$

### § 3. *Paradoks Newcomba*

Dla przedstawienia paradoksu Newcomba posłużmy się dowcipnym opisem gry reprezentowanej macierzą wypłat (21.1), zaczerpniętym z książki Martina Gardnera [Gar82]. Otóż gracz 2 imieniem Omega, będący wszytkowiedzącym przedstawicielem obcej cywilizacji proponuje kolejno napotkanym Ziemianom wybór pomiędzy zawartością dwóch pudełek (z których jedno jest przezroczyste, a druga nie), a zawartością nieprzezroczystego pudełka. W przezroczystym pojemniku znajduje się tysiąc dolarów, zaś Omega twierdzi, że do nieprzezroczystego uprzednio włożył milion dolarów (strategia  $|I\rangle_2$ ), lecz jedynie wówczas, gdy Ziemianin zdecyduje się wybrać jedynie zawartość tego pudełka (strategia  $|I\rangle_1$ ). Podejmując decyzję mężczyzna rozważa: skoro Omega wie co zrobię, to wybieram pomiędzy tysiącem a milionem, gdyż wolę więc milion dolarów (strategia  $|I\rangle_1$ ). Dokonująca wyboru kobieta myśli odmiennie: ponieważ chciałam wybrać jedynie nieprzezroczyste pudełko i omega umieścił tam już milion dolarów, cóż przeszkadza mi wziąć więcej — przeto wybieram zawartość obydwu pudełek (strategia  $|0\rangle_1$ ).

Który z Ziemian: kobieta czy mężczyzna wybrał korzystniejsze rozwiązanie? Bez precyzyjnego ustalenia miary zdarzeń skutkujących wypłatami tworzącymi macierz (21.1) nie sposób jednoznacznie odpowiedzieć na to pytanie. Poniższe rozważania ograniczają się jedynie do pewnej klasy sytuacji dotyczących tego paradoksu, które wyróżnić możemy w ramach podejścia proponowanego przez kwantową teorię gier.

---

 § 4. *Taktyki Ziemiań i Omegi*

W paradoksie Newcomba Omega jest graczem reprezentującym cywilizację znajdującą się na znacznie wyższym poziomie rozwoju niż nasza, więc na pewno nieobce mu są wszelakie, dla nas ciągle pełne tajemnic, kwantowe właściwości otaczającego nas świata. Poza tym pudełka w których oferuje on wygraną ewidentnie posiadają mechanizmy sprzęgające ich działanie — to oczywiste, zważywszy, że Ziemiańin nie może dokonać wyboru polegającego jedynie na wzięciu z przezroczystego pudełka tysiąca dolarów. W przeciwieństwie do rozumowania cechującego mężczyznę, u podłoża sposobu myślenia kobiety leży sceptycyzm, sprowadzający się do wątpienia w możliwość realizacji przewidzianego przez Omegę scenariusza wydarzeń. Uważa ona, że decydując się z początku na strategię męską spowoduje, że Omega umieści milion dolarów w nieprzezroczystym pudełku, a gdy on to zrobi, to cóż jej przeszkodzi wziąć najwyższą wygraną z obydwu pudełek? W artykule [Mey99] Meyer przedstawił taktykę, która zaadoptowana do potrzeb Omegi pozwala mu zrealizować przewidywany wcześniej scenariusz. Zwróćmy przy tym uwagę, że tak tu, jak i w książce Gardnera [Gar82], Omega nie musi posiadać umiejętności przewidywania przyszłości. Wystarczy, aby niezależnie od woli Ziemiańin, potrafił rozpoznawać ich zamiary. Utrudnia mu to wynikający z teorii kwantowej zakaz klonowania<sup>2</sup>, jednak może go obejść przy pomocy mechanizmu teleportacji [Mil00], przejmując i zwracając z powrotem strategię Ziemiańin. Niżej przedstawione unitarne manipulacje na  $q$ -bitach, prowadzące w efekcie do zniweczenia skutków zmiany decyzji Ziemiańin, są dostępne w ramach poznanych już technologii. Oto szczegóły przebiegu gry, który wynika z taktyk stosowanych przez Ziemiańin i wzorowanej na pomysłach Meyera taktyki Omegi. Startowy stan gry, skonstruowany z zamierzonej przez Ziemiańin strategii oraz strategii Omegi (która wynika z jego wnikienia w zamiary Ziemiańin), opisuje określony na  $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$  operator gęstości  $\mathcal{W}$ . Od tego momentu gra musi być prowadzona według prawideł kwantowych, tj. gracze mogą zmieniać stan gry za pomocą taktyk będących unitarnymi operacjami na  $\mathcal{W}$ , przy czym brak umiejętności wnikienia w zamiary Omegi pozwala Ziemiańinom operować jedynie w przestrzeni ich  $q$ -bitu  $\mathcal{H}_1$ , a taktyka Omegi nie może zależeć od tego, jaką taktykę gry wybrał Ziemiańin (kosmita może być wtedy nieświadom taktyki Ziemiańin, bo jego posunięcie zrealizuje automat sprzęgający pudełka). Scenariusz Meyera przebiega następująco:

- (1) przed wykonaniem decyzji Ziemiańin Omega przekazuje swą wiedzę o stanie gry do automatu mieszczącego się w pudełkach, który następnie realizuje taktykę  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{I}$ , gdzie  $\mathcal{I}$  jest przekształceniem tożsamościowym

---

<sup>2</sup>zob. rozdz. 18

(zobowiązał się do nie zmieniania własnej decyzji), a  $\mathcal{F}$  to popularne w konstruowaniu algorytmów kwantowych przekształcenie Hadamarda, określone na przestrzeni wektorowej  $q$ -bitu macierzą

$$(21.2) \quad F := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

- (2) realizujący swą decyzję Ziemiańin z prawdopodobieństwem  $w$  stosuje taktykę żeńską  $\mathcal{N} \otimes \mathcal{I}$ , gdzie  $\mathcal{N}$  jest operatorem negacji<sup>3</sup>, a z prawdopodobieństwem  $1-w$  taktykę męską  $\mathcal{I} \otimes \mathcal{I}$ ,
- (3) w trakcie otwierania pudełka wbudowany w nie mechanizm, niezależnie od rodzaju taktyki Ziemiańina, realizuje ponownie transformację  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{I}$ .

### § 5. Przebieg gry i jej wyniki

Prześledźmy jak w trakcie gry ewoluował operator gęstości  $\mathcal{W}$ . Ponieważ stosowane taktyki zmieniały stan gry jedynie w ramach podprzestrzeni pierwszego  $q$ -bitu  $\mathcal{H}_1$ , więc zmiany wystarczy wyznaczyć dla strategii Ziemiańina. Dla ogólności rozważań założymy, że Ziemiańin wybrał strategię mieszaną: z prawdopodobieństwem  $v$  strategię żeńską, a z prawdopodobieństwem  $1-v$  męską. Jednak, dla zobrazowania kolejnych etapów gry, wygodnie jest prześledzić je rozważając jedynie skrajne wartości parametru  $v$ . Jeżeli Ziemiańin kierował się strategią żeńską ( $v=1$ ), to poniższy rachunek przedstawia macierz  $W_0$ , która zawiera niezerowe elementy operatora gęstości  $\mathcal{W}_0$ , mającego wtedy postać

$$\mathcal{W}_0 = \sum_{r,s=1}^2 W_{0rs} |r-1\rangle_1 |0\rangle_{21} \langle s-1|_2 \langle 0|.$$

Jeśli zaś Ziemiańin zastosował strategię męską ( $v=0$ ), to prezentowane niżej obliczenia dotyczą operatora gęstości  $\mathcal{W}_1$  o postaci

$$\mathcal{W}_1 = \sum_{r,s=1}^2 W_{1rs} |r-1\rangle_1 |1\rangle_{21} \langle s-1|_2 \langle 1|.$$

W tak wybranej notacji kolejne etapy gry mają następujący przebieg:

<sup>3</sup> $\mathcal{N}|0\rangle = |1\rangle, \mathcal{N}|1\rangle = |0\rangle$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & 1-v \end{pmatrix} &\longrightarrow \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & 1-v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 2v-1 \\ 2v-1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \\ \frac{w}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2v-1 \\ 2v-1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1-w}{2} \begin{pmatrix} 1 & 2v-1 \\ 2v-1 & 1 \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 2v-1 \\ 2v-1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \\ \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2v-1 \\ 2v-1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & 1-v \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Niezależnie więc od rodzaju taktyki Ziemanina jego strategia po ostatnim etapie przybrała swą początkową postać. W przypadku strategii mieszanej Ziemanina przebieg gry opisuje operator

$$\mathcal{W} = v \mathcal{W}_0 + (1-v) \mathcal{W}_1$$

k który, tak na początku, jak i na końcu gry, ma jednakową postać diagonalną:

$$\mathcal{W} = v |0\rangle_1 |0\rangle_2 \langle 0|_2 \langle 0| + (1-v) |1\rangle_1 |1\rangle_2 \langle 1|_2 \langle 1|.$$

Przeto, przy dowolnej strategii Ziemanina, zmiana jego decyzji za pomocą taktyki żeńskiej nie może mu przynieść żadnych dodatkowych korzyści. Jeśli Ziemanin używający taktyki żeńskiej rozpocznie grę także żeńską strategią, to nieprzezroczyście pudełko zostanie puste i nie podejmie pieniędzy z otwierającego się pudełka przezroczyściego, osiągając najniższą możliwą wygraną. Gdy postąpi przeciwnie, tj. rozpocznie ją strategią męską, to pudełko przezroczyście nie będzie się dało otworzyć, jednak i tak zdobędzie najwyższą możliwą wygraną w wysokości miliona dolarów (która go także czeka jeśli wybierze męską strategię i taktykę). Jedynie rozpoczęcie gry strategią żeńską i zastosowanie taktyki męskiej doprowadzi do otwarcia przezroczyściego pudełka. Stosując się do wymogów klasycznej teorii gier<sup>4</sup> Omega mógłby wypełnić swoje zobowiązanie jedynie blokując na początku gry możliwości zmiany decyzji Ziemanina. W kwantowej teorii wypłata  $M_{21}$  (strategia i taktyka żeńska) staje się możliwa, więc fraza *la donna mobile* nie jest pozbawionym uzasadnienia czczym frazesem: Ziemanin odzyskuje możliwość realizowania swojego wolnego wyboru, jednak musi przy tym pamiętać, że Omega dysponuje środkami, które umożliwiają mu wywiązanie się z wcześniej złożonej obietnicy, czy, jak kto woli, pozbawiają Ziemanina ewentualnych profitów, które chciałby wyciągnąć ze zmiany własnej decyzji. W ten oto sposób, podobnie jak w przypadkach znanych problemów fizycznych, spopularyzowanych legendarnymi sporami Bohra z Einsteinem [Ein01], dopiero kwantowy opis rzeczywistości usuwa paradoksalne własności racjonalnie określonego dylematu.

Można rozważać gry oferujące Ziemanom szerszą alternatywę wyborów, w których odpowiednio większe macierze wypłat pozwalają doszukiwać się paradoksów powielających spostrzeżenie Newcomba. Jednak i wtedy istnieje

<sup>4</sup>naiwne i groteskowe wydaje się sytuowanie Omegi pośród zasad właściwych sentymentalnym dla Zieman klasycznym teoriom

metoda, oparta na rozwiązaniach przedstawionych w artykule [WKO00], prowadząca do pełnej realizacji obietnic Omegi.

### § 6. Rynkowa interpretacja gry

Jest oczywiste, że przedstawiony wyżej scenariusz gry nie musi się spełnić w sytuacjach, w których warunki gry będą różne od wywnioskowanych z obietnic Omegi. Jeśli np. Omega nie potrafi odczytać naszych zamiarów, czy w sposób odmienny niż to wynika z translacji jego słów na język Ziemiaków rozumie spełnienie warunków gry. Może np. obiecał on grać taką samą strategią jak Ziemiak, co w wydedukowanej po prostu przez ziemianina interpretacji odpowiada po prostu posunięciu  $|0\rangle_2$  w odpowiedzi na  $|0\rangle_1$  i  $|I\rangle_2$  w odpowiedzi na  $|I\rangle_1$ . Scenariuszy wynikających z rozważań na temat „co Omega miał na myśli?” jest wiele, więc nic dziwnego, że mogą one prowadzić do niekończących się polemik. Jednym z takich wariantów, polegającym na grze przez kosmitę tą samą strategią, gdzie określenie „tą samą” występuje w kontekście kwantowych gier rynkowych, zakończymy omawianie paradoksu Newcoma.

W kwantowej grze rynkowej gracz używa swojej strategii raz będąc kupującym, a innym razem sprzedającym podmiotem rynku. Reprezentacja popytowa jego strategii jest transformacją Fouriera jego strategii stosowanej w jej w aspekcie podaży<sup>5</sup>. Liczne, zaskakująco pożądane właściwości rynkowych strategii kwantowych odnajdziemy w całej trzeciej części tej książki. Gdy rozważymy uproszczony obraz rynku, który tworzą strategie graczy będące elementami zaledwie skończonego wymiarowego przestrzeni Hilberta, wtedy powinniśmy posługiwać się *dyskretną transformacją Fouriera*, która strategii w reprezentacji popytowej, będącej  $m$ -elementowym ciągiem  $\langle d|\psi\rangle$  liczb zespolonych<sup>6</sup>, przyporządkowuje jej reprezentację podaży  $\langle s|\psi\rangle$  zadaną wzorem

$$(21.3) \quad \langle s|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{d=0}^{m-1} e^{\frac{2\pi i}{m}sd} \langle d|\psi\rangle.$$

W najprostszym przypadku  $m=2$  transformacja Fouriera jest przekształceniem Hadamarda  $\mathcal{F}$ , z którym zetknęliśmy się już wcześniej, w trakcie omawiania mechanizmu niwelującego skutki działania taktyki żeńskiej. Odwzorowuje ono strategie zlokalizowane na strategii maksymalnie nieokreślone<sup>7</sup> i vice versa, np.

<sup>5</sup>patrz rozdz. 15

<sup>6</sup>kwadraty modułów tych amplitud mają taką samą interpretację probabilistyczną jak w przypadku nieskończonego wymiarowego przestrzeni Hilberta, zob. rozdz. 15

<sup>7</sup>nieokreśloność dotyczy tu stanów czystych i ma sens jedynie w kontekście konkretnej bazy przestrzeni Hilberta



$$\langle d|\psi\rangle = [d=0] \xrightarrow{\mathcal{F}} \langle s|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

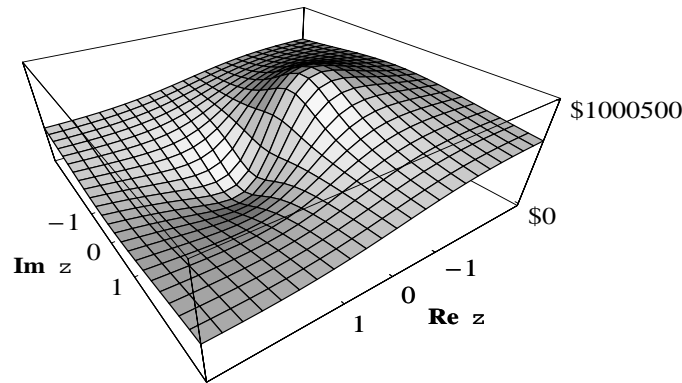
Strategię każdego z uczestników naszego kwantowego wariantu gry reprezentujemy parametryzowanym współrzędną niejednorodną<sup>8</sup>  $z \in \overline{\mathbb{C}}$   $q$ -bitem

$$\mathcal{H} \ni |\psi_z\rangle := |0\rangle + z|I\rangle.$$

Jeżeli „kupujący” Ziemianin zdecyduje się na strategię  $|\psi_z\rangle_1$ , a będący drugą stroną tego targu Omega, chcąc grać w znaczeniu rynkowym identycznie, przyjmie podaźową reprezentację takiej strategii, ustalając wartość swojego  $q$ -bitu gry na  $\mathcal{F}(|0\rangle_2 + z|I\rangle_2) = |0\rangle_2 + \frac{1-z}{1+z}|I\rangle_2$ , to stan takiej gry ma następującą postać<sup>9</sup>

$$\mathcal{W}_z = \frac{(1+z)(1+\bar{z})}{2(1+z\bar{z})^2} (|0\rangle_1 + z|I\rangle_1) ({}_1\langle 0| + \bar{z}{}_1\langle I|) (|0\rangle_2 + \frac{1-z}{1+z}|I\rangle_2) ({}_2\langle 0| + \frac{1-\bar{z}}{1+\bar{z}}{}_2\langle I|).$$

Podobnie jak w poprzednim wariantcie gry stosowanie taktyki żeńskiej nie wpływa na wysokość wypłat. Rysunek 21.1 przedstawia wartość oczekiwaną wygra-



Rysunek 21.1. Przeciętna wygrana Ziemianina  $\text{Tr} \mathcal{M} \mathcal{W}_z$  w rynkowym wariantcie kwantowej gry Newcomba.

nej Ziemianina  $\text{Tr} \mathcal{M} \mathcal{W}_z$ , jako funkcję przyjętej przez niego strategii kwantowej. Jest ona najwyższa dla superpozycji strategii żeńskiej i męskiej z fazami przesuniętymi o  $\pi$  (tj. dla  $z = -1$ ). Taka wygrana przewyższa osiągnięcia Ziemian z poprzedniego wariantu gry, gdyż wynosi milion pięćset dolarów. Jednak Ziemianin musi uważać, gdyż zrównanie faz składników superpozycji ( $z = 1$ ), nie

<sup>8</sup>patrz rozdz. 18

<sup>9</sup>warto w tym miejscu uczynić dygresję dotyczącą rynku, gdzie badanie analogicznych gier, w powyższym sensie prowadzonych de facto „z samym sobą”, ma szczególne znaczenie, bowiem, rozważając popyt czy podaź rynkową, wszystkich graczy uczestniczących w transakcjach traktujemy en bloc jako resztę świata, której strategię, na skutek permanentnej rywalizacji ekonomicznej, są samouzgadniającymi się stanami

zmieniające prawdopodobieństwem znalezienia go w strategiach żeńskiej i męskiej, prowadzi do skrajnie niekorzystnych dla niego wygranych, o wartości przeciętnej wynoszącej zaledwie pięćset dolarów. Klasyczne strategie Ziemiaków (na które jednak Omega nie reaguje klasycznie) odpowiadają wartościom argumentu<sup>10</sup>  $z=0$  i  $z=\pm\infty$ .

Entuzjaści newcombmanii na pewno znajdą dalsze ciekawe rozwiązania kwantowego wariantu gry Newcomba.



Dwadzieścia lat temu Richard P. Feynman [**Fey82**] zauważył, że z pomocą klasycznego komputera nigdy nie będziemy mogli symulować zjawisk kwantowych. Obecnie, w czasach gdy odnoszenie teorii kwantów jedynie do zjawisk mikroświata jest nieporozumieniem (splciony stan kwantowy potrafimy wytwarzać na kilkudziesięciokilometrowych odległościach [**HBK+97**]), częściej niż kiedykolwiek wcześniej stykamy się z poglądem, że to ta teoria stanowi podstawę opisu otaczającej nas rzeczywistości, we wszelkich jej złożonych aspektach. Stąd pojawia się naturalne pytanie: co stanowi przyczynę takiej, ciągle dla wielu badaczy osobliwej, własności otaczającego nas świata.



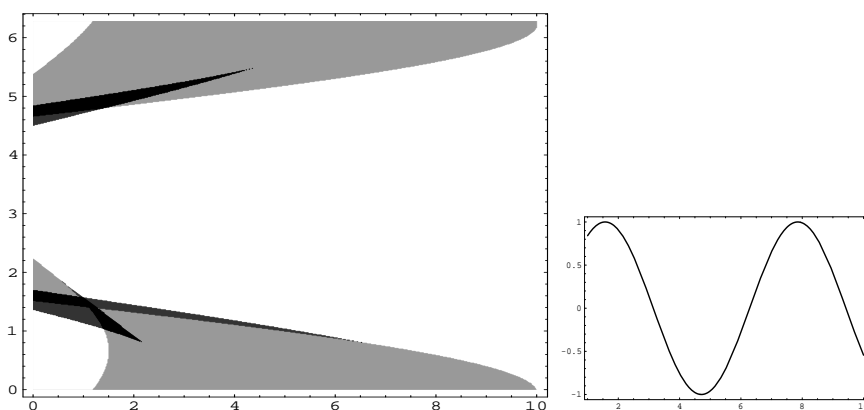
W ramach zjawisk rynkowych propozycją odpowiedzi na nie jest popularna wśród kosmologów zasada antropiczna: *nas by nie było, gdyby rzeczywistość była inna*. To bowiem model kwantowy np. oferuje stymulującą rozwój handlu taktykę kupiecką, nie wymagającą zawiłych rachunków do osiągnięcia stabilnego optimum, gdy zakładane zyski pokrywają się z osiągalnymi, czy gwarantuje unikalność eksperta zakazem klonowania jego strategii. Mechanizm ewolucyjny, opierając się na zastanych kwantowych własnościach przyrody, mógł rozwinąć niezwykle skuteczne systemy obliczeń kwantowych. Dzięki odkryciom algorytmów kwantowych, zapoczątkowanym w 1994 roku przez Petera W. Shora [**Sho94**], przekonaliśmy się, że klasyczne urządzenia liczące, wzorujące się na architekturze maszyny Turinga, nie będą stanowić żadnej konkurencji dla systemów opartych na algorytmach kwantowych. Z konieczności jeszcze prymitywne, pierwsze prototypy takich sztucznych konstrukcji już działają, rysując nowe horyzonty naszym możliwościom.

<sup>10</sup>są to kolejno strategia żeńska i męska

## Uzupełnienia

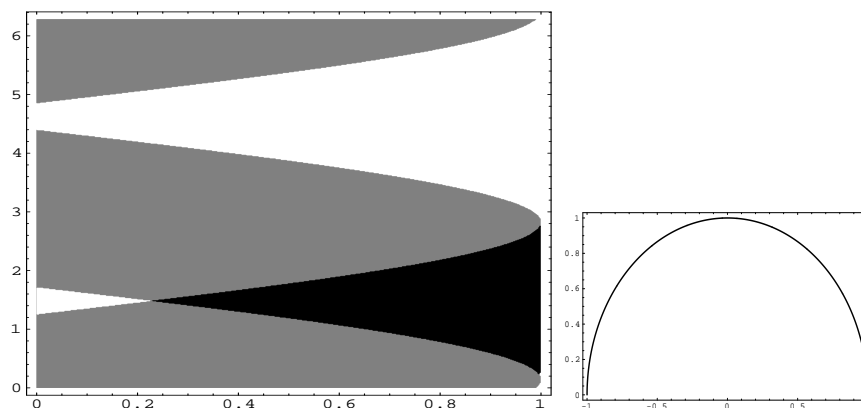
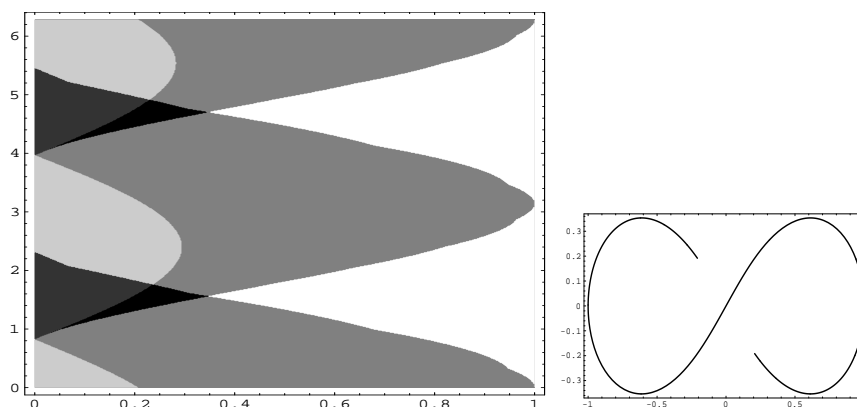
### § 1. Obrazy krzywych na rurze Croftona

Na kolejnych rysunkach zamieszczono obrazy trzech popularnych krzywych we współrzędnych croftonowskich  $(q, \varphi)$ . Są nimi kolejno portrety funkcji:  $y = \sin t$ ,  $y = \sqrt{1 - t^2}$  i lemniskata. Każdy taki portret uzupełniono z prawej tradycyjnym wykresem krzywej sporządzonym w jej pierwotnych współrzędnych  $(t, y)$ . Widniejące na croftonowskich portretach ciemniejsze obszary powstały na skutek uwzględnienia wielokrotnych przecięć analizowanej krzywej z prostymi, które reprezentowane są punktami naniesionymi na rurę Croftona. Prawe



Rysunek i. Obraz funkcji  $y = \sin t$ .

krawędzie croftonowskich portretów są wynikiem obcięcia rury Croftona do jej części, w której leżą wszystkie punkty reprezentujące proste przecinające odpowiednią krzywą. Górne krawędzie tych rysunków należy utożsamić z dolnymi. Np. na tak sklejonej rurze Croftona przedstawionej na drugim rysunku można dostrzec obszary odpowiadające prostym przecinającym funkcję  $y = \sin t$  jedno-, dwu-, trzy- i czterokrotnie.

Rysunek ii. Obraz funkcji  $y = \sqrt{1 - t^2}$ .

Rysunek iii. Obraz lemniskaty.

Czytelnicy, chętni samodzielnie przeglądać obrazy różnych krzywych we współrzędnych coftonowskich, mogą skorzystać z poniższego kodu programu napisanego w języku *Mathematica*, który generuje zaprezentowane rysunki.

```
Crofton[r_, phi_, table_] :=
Module[{count = 0, sn = Sin[phi], cs = Cos[phi], side = 1,
  lastside = Sign[ cs table[[1,1]] + sn table[[1,2]] - r]},
Do[ side = Sign[ cs table[[m+1,1]] +
  sn table[[m+1,2]] - r ] ;
If[lastside != side, count = count + 1];
lastside = side;
, {m, Length[table]-1}]; count]

CroftonPlot[f_] := Module[{n = 50, delta=0., table={}},
  delta = If[Length[f]==2, N[(f[[2, 2]] - f[[2, 1]])/n],
  N[(f[[3]] - f[[2]])/n] ];
```

```

x = If[Length[f]==2,f[[2, 1]],f[[2]]];
Do[table = Append[table,If[Length[f]==2,{x, N[f[[1]][x]]},
  {N[f[[1]][x][[1]],N[f[[1]][x][[2]]}] }]];
x = x + delta, {n + 1}];
ContourPlot[Crofton[r,phi,table],
{r,0,N[Sqrt[Apply[Max,Map[#[[1]]^2+#[[2]]^2]&, table]]]}],
{phi,0,2 Pi},
PlotPoints -> 500,
ColorFunction -> (GrayLevel[1-#]&), ContourLines->False]]

Display["curve1.ps",CroftonPlot[{Sin, {1, 10}}],"EPS"];
fx[x_] := Sqrt[1 - x^2]

Display["curve2.ps",CroftonPlot[{fx, {-0.99, 0.99}}],"EPS"];

lemniscate[t_] := {t(1+t^2)/(t^4+1), t(1-t^2)/(t^4+1)}
Display["curve3.ps",CroftonPlot[{lemniscate, -5, 5}], "EPS"];

```

---

## § 2. Wyznaczanie temperatury portfela

Poniżej zamieszczono kod implementacji programu napisanego w dialekcie języka *basic*, stosowanym w jednym z najpopularniejszych kalkulatorów programowalnych. Program ten pozwala wyznaczać temperaturę zrównoważonego portfela trójskładnikowego ( $N=2$ ) dla osiągniętej przez niego wartości  $-c_{00}$  przy zadanym względnym wzroście cen rynkowych  $\bar{c}_1$  oraz  $\bar{c}_2$ . Przez uwzględnienie kolejnych parametrów cenowych w początkowym fragmencie programu (gdzie pojawiają się zmienne  $D$  i  $E$  odpowiadające wczytywanym cenom) można łatwo poszerzyć zakres jego stosowania na sektor rynkowy dowolnego rozmiaru. Użyty algorytm wyznaczania wartości odpowiedniej funkcji odwrotnej opiera się na technice „dziel i rządź” [GKP96]. Przy posługiwaniu się programem należy pamiętać o wpisywaniu takich wartości portfela  $-c_{00}$ , które należą do przedziału  $(\min(1, \bar{c}_1, \dots, \bar{c}_N), \max(1, \bar{c}_1, \dots, \bar{c}_N))$ . Algorytm w tempie jednostajnym zwiększa ilość cyfr znaczących wyniku, a najwolniejsze z istniejących w kalkulatorach procesory wykonują go w ciągu kilku sekund. Czas wykonania programu można skrócić jeszcze co najmniej o połowę (czego autor nie uczynił dla zachowania większej czytelności). Ustalenie temperatury inwestora nie powinno więc sprawiać żadnych trudności.

```

Lbl 0↓
- .999 → A : .999 → B : 20 → N : 0 → V ↓
Norm : ClrText : Green " - c00 = "? → C ↓
Orange " c1 = "? → D : Orange " c2 = "? → E ↓
Goto 1 ↓
Lbl 2 ↓
 $\tanh^{-1}A \rightarrow Y : eY \rightarrow Y : (Y + D \times Y^D + E \times Y^E) \div (Y + Y^D + Y^E) - C \rightarrow Y \downarrow$ 
V = 0 ⇒ Goto 3 ↓
Goto 4 ↓
Lbl 1 ↓
Goto 2 ↓
Lbl 3 ↓
1 → V ↓
If Y > 0 : Then A → Y : B → A : Y → B : IfEnd ↓
Lbl 5 ↓
A → Z : .5(A + B) → A ↓
Goto 2 ↓
Lbl 4 ↓
If Y > 0 : Then A → B : Z → A : IfEnd ↓
Dsz N : Goto 5 ↓
.5(A + B) → A ↓
Green " " : Locate 1, 7, "T = " ↓
Locate 3, 7, 1 ÷  $\tanh^{-1}A \downarrow$ 
0 → A : While A = 0 : Getkey → A : WhileEnd : Goto 0

```

### § 3. Wyznaczanie stóp w reprezentacji Bernoulliego

Poniższy tekst przedstawia wydruk kodu programu napisanego w języku *Mathematica*, generującego rysunek 9.1, oraz stopy procentowe dwóch pierwszych rzędów, omówione na stronie 160.

```
a=0; b=10; r=.2;
```

```

ModelFunction[x_] := Exp[r(x - a)]

TaylorFunction[x_, r1_, r2_] := 1 + r1(x - a) + (1/2) r2 (x - a)^2

procedure[function_] := Module[{temp,r1,r2,minimum},
  r1 := (temp/.Solve[ModelFunction[b] == function[b,temp, r2],
    temp])[1];
  r2 = r2/.(FindMinimum[Integrate[(ModelFunction[x] -
    function[x, r1, r2])^2,{x,a, b}],{r2,{-1,5}}])[2];
  Plot[{ModelFunction[x],function[x,r1,r2],
    1+(ModelFunction[b]-1)(x-a)/(b-a)},{x,a,b},
    PlotPoints -> 500,
    PlotStyle -> {{GrayLevel[0],Dashing[{0.01]}},
      {GrayLevel[0],Dashing[{0.0]}},
      {GrayLevel[0],Dashing[ {.005} ]}}};
  {r1,r2}]

procedure[TaylorFunction]

```

#### § 4. Postać całkowa wielomianów Hermita

Formuła wyrażająca wielomian Hermita  $H_n(t)$  przez uśrednioną po rozkładzie normalnym  $n$ -krotną całkę iterowaną znajduje się w pracy [Vis86]. Brak tam jednak chociażby sugestii dotyczącej jej dowodu, bądź odwołania do stosownego źródła. Zanim wykażemy ten związek przypomnijmy wzór na parzysty moment rozkładu normalnego (wszystkie nieparzyste momenty oczywiście znikają). Mamy

$$E(\eta^{2k}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \eta^{2k} e^{-\frac{\eta^2}{2}} = \frac{(-2)^k}{\sqrt{2\pi}} \frac{d^k}{dx^k} \int_{-\infty}^{\infty} d\eta e^{-\frac{x\eta^2}{2}} \Big|_{x=1},$$

a po zamianie zmiennych  $\eta\sqrt{x} \rightarrow \tau$  i skorzystaniu z unormowania rozkładu normalnego otrzymamy

$$(22.1) \quad E(\eta^{2k}) = (-2)^k \frac{d^k}{dx^k} x^{-\frac{1}{2}} \Big|_{x=1} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1) = \frac{(2k)!}{2^k k!}.$$

Funkcja tworząca momentów  $E(e^{\eta \cdot x})$  ma postać

$$E(e^{\eta \cdot x}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} E(\eta^k) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^{2l}}{(2l)!} \frac{(2l)!}{2^l l!} = e^{\frac{x^2}{2}}.$$

Przejdźmy do wykazania równości

$$(22.2) \quad n! s^n 1 = H_n(t).$$

Dowód. Dla  $n = 1$  lewa strona (22.2) ma postać  $E \int_{\eta}^t d\tau = E(-\eta) = t$  i jest równa prawej stronie równości, bowiem  $H_1(t) = E(t + i\eta) = t$ . Stosując wnioskowanie indukcyjne rozpatrzmy postać prawej strony (22.2) dla  $n \rightarrow n+1$ . Mamy

$$(n+1)! s^{n+1} 1 = (n+1) s H_n(t) = (n+1) E \int_{\eta}^t d\tau (\tau + i\eta_1)^n,$$

gdzie zgodnie z przyjętą konwencją operator  $E$  uśrednia wszystkie zmienne losowe znajdujące się po jego prawej stronie. Obliczając całkę względem zmiennej  $\tau$  otrzymamy

$$(n+1)! s^{n+1} 1 = E((t + i\eta_1)^{n+1} - (\eta + i\eta_1)^{n+1}) = H_{n+1}(t) - E(H_{n+1}(\eta)).$$

Dla zakończenia całości dowodu należy wykazać, że dla  $n > 0$  średnia wartość wielomianu Hermita  $H_n(\eta)$  jest równa zero. Równość  $E(H_{2n+1}(\eta)) = 0$  jest oczywista, gdyż wielomian  $H_{2n+1}(\eta)$  zależy jedynie od nieparzystych potęg zmiennej  $\eta$ , więc uśredniony z parzystą funkcją rozkładu daje w wyniku zero. Wystarczy już tylko pokazać, że wyrażenie  $\int_{-\infty}^{\infty} dL(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} dL(\eta) (\tau + i\eta)^{2n}$  jest równe zero. Wykorzystując dwumian Newtona i wzór (22.1) otrzymujemy

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} i^k \int_{-\infty}^{\infty} dL(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} dL(\eta) \eta^k \tau^{2n-k} = \\ & = \sum_{r=0}^n \frac{(2n)!}{(2r)! (2n-2r)!} (-1)^r \frac{(2r)! (2n-2r)!}{2^r r! 2^{n-r} (n-r)!} = \frac{(2n)!}{n!} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)^n = 0 \end{aligned}$$

□

## § 5. Równoważność konwencji kredytowych

Konsekwencją poniższych dwóch twierdzeń jest algebraiczna równoważność różnych konwencji kredytowych, opisanych w rozdziale 8.

Niech  $M(a_l)$  oznacza macierz górnotrójkątną, nad pierścieniem  $R$  (niekończenie przemiennym), o elementach

$$M(a_l)_{r,s} := [r=s] a_r + [r < s] (a_r - a_{r+1}),$$

gdzie  $(a_l)_{l=1,\dots,n} \in R^n$ .



Twierdzenie o istnieniu izomorfizmu. *Zbiór macierzy postaci  $M(a_l)$  jest izomorficzny z pierścieniem macierzy diagonalnych.*

Dowód. Wzajemna jednoznaczność odwzorowania:

$$M(a_l)_{r,s} \longrightarrow [r=s] a_r$$

oraz własność

$$M(a_l) + M(b_l) = M(a_l + b_l)$$

są oczywiste. Pozostaje jedynie wykazać, że takie odwzorowanie zachowuje własność mnożenia.

$$\begin{aligned} & (M(a_l) M(b_l))_{r,s} = \\ &= \sum_{m=1}^n ([r=m] a_r + [r < m] (a_r - a_{r+1})) ([m=s] b_m + [m < s] (b_m - b_{m+1})) = \\ &= [r=s] a_s b_s + [r < s] a_r (b_r - b_{r+1}) + [r < s] (a_r - a_{r+1}) b_s + \\ &\quad + (a_r - a_{r+1}) \sum_{m=1}^n [r < m < s] (b_m - b_{m+1}) = [r=s] a_s b_s + \\ &+ [r < s] (a_r b_r - a_r b_{r+1} + a_r b_s - a_{r+1} b_s) + (a_r - a_{r+1}) [r < s] (b_{r+1} - b_s) = \\ &= [r=s] a_s b_s + [r < s] (a_r b_r - a_r b_{r+1} + a_r b_s - a_{r+1} b_s + \\ &\quad + a_r b_{r+1} - a_r b_s - a_{r+1} b_{r+1} + a_{r+1} b_s) = \\ &= [r=s] a_s b_s + [r < s] (a_r b_r - a_{r+1} b_{r+1}), \end{aligned}$$

czyli

$$M(a_l) M(b_l) = M(a_l b_l)$$

□

Twierdzenie o postaci izomorfizmu. *Macierz zerojedynkowa o elementach  $[r \leq s]$  jest macierzą przejścia do przestrzeni, w której macierze  $M(a_l)$  przybierają formę diagonalną.*

*Odwrotną do macierzy  $([r \leq s])$  jest macierz  $([r=s] - [r+1=s])$ .*

Dowód. Najpierw udowodnimy drugą część twierdzenia.

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^n ([r=m] - [r+1=m]) [m \leq s] = \\ &= \sum_{m=1}^n [r=m] [m \leq s] - \sum_{m=1}^n [r+1=m] [m \leq s] = \\ &= [r \leq s] - [r+1 \leq s] = [r=s]. \end{aligned}$$

Wystarczy teraz pokazać, że iloczyn odpowiednich trzech macierzy jest macierzą diagonalną.

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=1}^n \sum_{p=1}^n [r \leq m] M(a_l)_{m,p} ([p=s] - [p+1=s]) = \\
& = \sum_{m=1}^n \sum_{p=1}^n [r \leq m] [m=p] a_m ([p=s] - [p+1=s]) + \\
& + \sum_{m=1}^n \sum_{p=1}^n [r \leq m] [m < p] (a_m - a_{m+1}) ([p=s] - [p+1=s]) = \\
& = ([r \leq s] a_s - [r < s] a_{s-1}) + \\
& + \sum_{m=1}^n [r \leq m] (a_m - a_{m+1}) ([m < s] - [m < s-1]) = \\
& = ([r=s] a_r + [r < s] (a_s - a_{s-1})) + [r < s] (a_{s-1} - a_s) = \\
& = [r=s] a_r
\end{aligned}$$

□


## Zestaw niektórych oznaczeń

Poniższy spis m.in. pomija standardowe symbole matematyczne.

- $\square$  – wektor, element przestrzeni liniowej  $\mathbb{R}^{N+1}$ ,  
np. koszyk  $p$ ,
- $\square_\mu$  –  $\mu$ -ta współrzędna wektora, nie wykluczając pieniężnej,  
 $\mu \in \{0, \dots, N\}$ , np.  $p_\mu$  to ilość jednostek  $\mu$ -tego dobra w koszyku; dobrem może być pieniądz, gdyż symbol posiada indeks grecki,
- $\square_0$  – wartość współrzędnej pieniężnej, np.  $p_0$  to ilość pieniądza w koszyku, wyznaczona przy ustalonej jednostce pieniężnej,
- $\square_k$  –  $k$ -ta współrzędna niepieniężna wektora,  $k \in \{1, \dots, N\}$ ,  
np.  $p_k$  jest ilością jednostek  $k$ -tego niepieniężnego dobra w koszyku; obecność indeksu łacińskiego wskazuje, że nie jest nim pieniądz,
- $\square_\mu^*$  – wartość początkowa  $\mu$ -tej współrzędnej wektora, np.  $p_\mu^*$  oznacza początkową ilość jednostek  $\mu$ -tego dobra w koszyku,
- $\underline{\square}$  – punkt (lub hiperpłaszczyzna), element przestrzeni rzutowej  $\mathbb{R}P^N$ , np. portfel  $\underline{p}$ ,
- $\underline{\square}_\mu$  –  $\mu$ -ta współrzędna jednorodna punktu przestrzeni rzutowej, np.  $\underline{p}_\mu$  to  $\mu$ -ty składnik portfela; można go przeskalować jednolicie z pozostałymi składnikami,
- $\mathbf{v}$  – małe czcionki fraktury oznaczają zmienne losowe przyjmujące wartości symbolizowane odpowiednimi literami antykwy (tu  $v$ ),  
 $E(\mathbf{v})$  – wartość oczekiwana zmiennej losowej  $\mathbf{v}$ ,  
 $\text{var}(\mathbf{v}) := \sqrt{E((\mathbf{v} - E(\mathbf{v}))^2)}$  – wariancja zmiennej losowej  $\mathbf{v}$ ,  
 $\mathfrak{g}_\mu$  – jednostkowa ilość dobra rynkowego o numerze  $\mu$ . W tym znaczeniu także używane są popularne symbole walut: €, \$, ¥, bądź litera ₤.

Autor przyjął anglosaską konwencję zapisu ułamków dziesiętnych, z kropką separującą ich części całkowite.

Symbol  $[zdanie]$  oznacza funkcję równą 1 w przypadku gdy  $zdanie$  jest prawdziwe, a 0 gdy tak nie jest.

Pojawiająca się na marginesie tekstu rączka  wskazuje zdaniem autora

szczególnie istotny fragment tekstu. Oczko  widniejące na marginesie za

tytułem paragrafu informuje, że analiza objętych paragrafem treści może okazać się trudniejsza niż zwykle i można je pominąć przy pierwszym czytaniu.



## Bibliografia

- [Ago96] *A survey of auctions*, <http://www.agorics.com>, Agorics Inc., 1996. 217
- [Agu01] A. Aguilar, *How to study consciousness: three paradigms for psychology*, Rev. Latinoamer. Psicol. **33** (2001), 11–21. 262
- [Alb83] D. Z. Albert, *On quantum-mechanical automata*, Phys. Lett. **98A** (1983), 249–252. 302
- [Ans78] A. I. Anselm, *Podstawy fizyki statystycznej i termodynamiki*, PWN, Warszawa, 1978. 74, 85
- [Ans02] V. V. Anshelevich, *A hierarchical approach to computer hex*, Artificial Intelligence **134** (2002), 101–120. 306
- [Ant69] J. Antoniewicz, *Tablice funkcji dla inżynierów*, PWN, Warszawa, 1969. 179
- [Arn75] W. I. Arnold, *Równania różniczkowe zwyczajne*, PWN, Warszawa, 1975. 121, 129
- [Arn81] ———, *Metody matematyczne mechaniki klasycznej*, PWN, Warszawa, 1981. 69, 75
- [Arr79] K. J. Arrow, *Eseje z teorii ryzyka*, PWN, Warszawa, 1979. 55
- [BB74] A. Białynicki-Birula, *Algebra liniowa z geometrią*, PWN, Warszawa, 1974. 120
- [BBBB74] I. Białynicki-Birula, Z. Białynicka-Birula, *Elektrodynamika kwantowa*, PWN, Warszawa, 1974. 151, 158
- [BBC<sup>+</sup>93] C. Bennett, G. Brassard, C. Crepeau, R. Jozsa, A. Peres, W. Wootters, *Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels*, Phys. Rev. Lett. **70** (1993), 1895–1898. 286, 305
- [BBC<sup>+</sup>95] A. Barenco, C. Bennett, R. Cleve, D. P. DiVincenzo, N. Margolus, P. Shor, T. Sleator, J. A. Smolin, H. Weinfurter, *Elementary gates for quantum computation*, Phys. Rev. A **52** (1995), 3457–3467. 300
- [BBCK91] I. Białynicki-Birula, M. Cieplak, J. Kamiński, *Teoria kwantów*, PWN, Warszawa, 1991. 225
- [BBFF02] F. A. Barone, H. Boschi-Filho, C. Farina, *Three methods for computing the feynman propagator*, arXiv:quant-ph/0205085 (2002). 256
- [BE81] J. Beem, P. Erlich, *Global lorentzian geometry*, Dekker, New York, 1981. 69
- [Ber77] M. Berger, *Géométrie*, CEDIC, Paris, 1977. 29, 39
- [Ber96] A. Berthiaume, *Quantum computation*, Complexity theory retrospective II (Alan L. Selman, red.), t. 2, Springer-Verlag, 1996. 263
- [Ber97] P. L. Bernstein, *Przeciw bogom. Niezwykłe dzieje ryzyka*, WIG-Press, Warszawa, 1997. 30
- [Ber99] J. Bernstein, *Teoria wszystkiego*, Prószyński i S-ka, Warszawa, 1999. 41, 230
- [BF75] F. W. Byron, R. W. Fuller, *Matematyka w fizyce klasycznej i kwantowej*, t. 1, 2, PWN, Warszawa, 1975. 132, 187, 192, 229, 234, 235, 266
- [Bil87] P. Billingsley, *Prawdopodobieństwo i miara*, PWN, Warszawa, 1987. 216
- [Biu01] *Biuletyn SIP*, Ottawa, 01/05 2001. 96
- [BK53] H. Busemann, P. J. Kelly, *Projective geometry and projective metrics*, Academic Press, New York, 1953. 29, 34, 39, 46

- [Bla80] A. Blaquiere, *Wave mechanics as a two-player game*, Dynamical systems and microphysics (New York), Springer-Verlag, 1980, str. 33–69. 224
- [Bla94] M. Blaug, *Teoria ekonomii. Ujęcie retrospektywne*, PWN, Warszawa, 1994. 4, 5, 222
- [Bla95] ———, *Metodologia ekonomii*, PWN, Warszawa, 1995. 4, 5
- [Bla99] E. Blankmeyer, *The Heisenberg principle in economics*, <http://econwpa.wustl.edu:8089/eps/get/papers/9904/9904004.html>, 1999. 262
- [Bor63] E. Borel, *Prawdopodobieństwo i pewność*, PWN, Warszawa, 1963. 224
- [Bor76] K. Borsuk, *Geometria analityczna wielowymiarowa*, PWN, Warszawa, 1976. 29, 32
- [Bre93] M. Brett, *Świat finansów, Zarządzanie i Bankowość*, Warszawa, 1993. 14
- [Bro96] J. Brockman (red.), *Trzecia kultura*, Warszawa, CIS, 1996. 277
- [BT24] S. Banach, A. Tarski, *Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruents*, Fund. Math. 6 (1924), 244–277. 309
- [BT96] S. J. Brams, A. D. Taylor, *Fair division. From cake-cutting to dispute resolution*, Cambridge University Press, 1996. 276, 289, 306
- [CG99] J. H. Conway, R. K. Guy, *Księga liczb*, WNT, Warszawa, 1999. 195
- [Chi94] A. C. Chiang, *Podstawy ekonomii matematycznej*, PWE, Warszawa, 1994. 74, 83, 102
- [Cho95] G. C. Chow, *Ekonometria*, PWN, Warszawa, 1995. 92
- [CK02] T. L. Clarke, D. J. Kaup, *Quantum algorithms for modeling and simulation: A grand challenge for modeling and simulation*, 2002. i, 27, 294
- [CLR97] T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest, *Wprowadzenie do algorytmów*, WN-T, Warszawa, 1997. 96
- [Col02] G. P. Collins, *Bliźniacze biliony*, Świat Nauki 2 (2002), 13–13. 308
- [com01] *Complexity Digest nr 27*, 2 VII 20001. 214
- [CR98] R. Courant, H. Robins, *Co to jest matematyka?*, Prószyński i S-ka, Warszawa, 1998. 29, 195
- [Cra58] H. Cramér, *Metody matematyczne w statystyce*, PWN, Warszawa, 1958. 280, 285
- [Cra86] J. G. Cramer, *The transactional interpretation of quantum mechanics*, Reviews of Modern Physics 58 (1986), 647–688. 238
- [Cra87] W. L. Craig, *Divine foreknowledge and Newcomb's Paradox*, Philosophia 17 (1987), 331–350. 309
- [DBE95] D. Deutsch, A. Barenco, A. Ekert, *Universality in quantum computation*, Proc. R. Soc. London A 449 (1995), 669–677. 300
- [DeG81] M. H. DeGroot, *Optymalne decyzje statystyczne*, PWN, Warszawa, 1981. 260
- [DEL00] D. Deutsch, A. Ekert, R. Lupacchini, *Machines, logic and quantum physics*, The Bulletin of Symbolic Logic 6 (2000), 265–283. 293
- [Deu98] D. Deutsch, *The fabric of reality*, Penguin, London, 1998. 4, 16, 118, 249, 293, 294, 302
- [Deu99] ———, *Quantum theory of probability and decisions*, Proc. R. Soc. Lond. A455 (1999), 3129–3137. 231
- [Dir64] P. A. M. Dirac, *The principles of quantum mechanics*, Belfer Graduate School of Science, Yeshiva University New York, 1964. 225, 263
- [DKM80] V. V. Dodonov, E. V. Kurmyshev, V. I. Man'ko, *Generalized uncertainty relation and correlated coherent states*, Phys. Lett. 79A (1980), 150–152. 236
- [Don] <http://info.fuw.edu.pl/donosy/archiwum/>. 110
- [Dor69] W. Doroszewski (red.), *Słownik języka polskiego*, Warszawa, PWN, przedruk elektroniczny, 1963–1969. 60

- [DS96] M. Dobija, E. Smaga, *Podstawy matematyki finansowej i ubezpieczeniowej*, PWN, Warszawa - Kraków, 1996. 119, 123, 139
- [EG98] E. J. Elton, M. J. Gruber, *Nowoczesna teoria portfelowa i analiza papierów wartościowych*, WIG-Press, Warszawa, 1998. 16, 86, 235
- [Ein01] A. Einstein, *Pisma filozoficzne*, De Agostini, Warszawa, 2001. 230, 313
- [Enc32] *Wielka ilustrowana encyklopedia powszechna*, t. I, Wydawnictwo Gutenberga, Kraków, 1932. 14
- [Enc97] *Encyclopaedia of mathematics on cd-rom*, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 1997. 56, 71, 93, 151, 157, 158, 179, 180, 182, 187, 191, 193, 200, 257, 263, 284
- [EWL99] J. Eisert, M. Wilkens, M. Lewenstein, *Quantum games and quantum strategies*, Phys. Rev. Lett. **83** (1999), 3077–3080. 262
- [Fey80] R. P. Feynman, *Wykłady z mechaniki statystycznej*, PWN, Warszawa, 1980. 69, 95, 237
- [Fey82] ———, *Simulating physics with computers*, Int. J. Theor. Phys. **21/6-7** (1982), 467–488. 316
- [Fey87] ———, *Negative probabilities*, Quantum implications (London) (B. J. Hiley, F. D. Peat, red.), Routledge & Kegan Paul, 1987. 223
- [FGM+00] P. Facchi, V. Gorini, G. Marmo, S. Pascazio, E.C.G. Sudarshan, *Quantum Zeno dynamics*, Phys. Lett. A **275** (2000), 12–24. 233
- [Fic72] G. M. Fichtenholz, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, t. I, PWN, Warszawa, 1972. 93
- [Fri94] M. Friedman, *Intrygujący pieniądz*, Wydawnictwo Łódzkie, Łódź, 1994. 27
- [Gar66] M. Gardner, *New mathematical diversions from Scientific American*, Gorge Allen & Unin Ltd, London, 1966. 304
- [Gar82] ———, *Aha! Gotcha. Paradoxes to puzzle and delight*, W. H. Freeman & Co., San Francisco, 1982. 310, 311
- [Gar97] ———, *Nauka, pseudonauka, szarlataneria*, Wydawnictwo Pandora, 1997. 5
- [Gąs91] A. Gąsiorowski, *Art B - dzieje cybernetyki biznesu*, Firma (1991), nr 10, 25–28. 110
- [Gel59] A. O. Gelfond, *Isčislenie konečnych raznostej*, Fizmatgiz, Moskwa, 1959. 165, 166
- [Gib78] J. W. Gibbs, *On the equilibrium of heterogeneous substances*, Trans. Connect. Acad. **3** (1876, 1878), 108–248, ibid. 343–524. 102
- [Gil00] R. Gilmore, *Alicja w krainie kwantów. Alegoria fizyki kwantowej*, Prószyński i S-ka, Warszawa, 2000. 225
- [GJ81] J. Glimm, A. Jaffe, *Quantum physics. a functional integral point of view*, Springer-Verlag, New York, 1981. 256, 258
- [GKP96] L. R. Graham, D. E. Knuth, O. Patashnik, *Matematyka konkretna*, PWN, Warszawa, 1996. 126, 140, 156, 163, 164, 170, 207, 319
- [Gol57] H. Goldstein, *Classical mechanics*, Addison-Wesley, New York, 1957. 71
- [Gro85] A. Grothendieck, *Récoltes et Semailles: réflexions et témoignage sur un passé de mathématicien*, Université des Sciences et Techniques de Languedoc, Montpellier, 1985. 226
- [Hal06] G. B. Halsted, *Synthetic projective geometry*, John Wiley & Sons, New York, 1906. 29
- [Har97] G. H. Hardy, *Apologia matematyka*, Prószyński i (S-ka), Warszawa, 1997. 4
- [Hav02] E. E. Haven, *A discussion on embedding the black-scholes option pricing model in a quantum physics setting*, Physica A (w druku) (2002). 261
- [HBK+97] R. J. Hughes, W. T. Buttler, P. G. Kwiat, G. G. Luther, G. L. Morgan, J. E. Nordholt, C. G. Peterson, C. M. Simmons, *Secure communications using quantum cryptography*, Photonic Quantum Computing, 3076 (S. P. Hotaling, A. R. Pirich, red.), 1997, str. 2–11. 316



- [HCV56] D. Hilbert, S. Cohn-Vossen, *Geometria pogładowa*, PWN, Warszawa, 1956. 2
- [Hel80] S. Helgason, *The Radon transform*, Birkhäuser, Stuttgart, 1980. 252
- [HHDS03] M. Horodecki, R. Horodecki, A. Sen De., U. Sen, *No-deleting and no-cloning principles as consequences of conservation of quantum information*, arXiv:quant-ph/0306044 (2003). 13
- [Hic78] J. R. Hicks, *Kapitał i wzrost*, PWN, Warszawa, 1978. 7
- [Hua78] K. Huang, *Mechanika statystyczna*, PWN, Warszawa, 1978. 95, 101, 102
- [Hud74] R. L. Hudson, *When is the Wigner quasi-probability density non-negative?*, Rept. Math. Phys. 6 (1974), 249–252. 236
- [Hul97] J. Hull, *Kontrakty terminowe i opcje. Wprowadzenie*, Wig Press, Warszawa, 1997. 237
- [Isi71] A. Isihara, *Statistical physics*, Academic Press, New York, 1971. 87, 95, 96
- [IT01] A. Iqbal, A. H. Toor, *Quantum mechanics gives stability to a nash equilibrium*, arXiv:quant-ph/0104091 (2001). 267
- [JO96] Z. Jacyna-Onyszkiewicz, *Zasady termodynamiki kwantowej*, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań, 1996. 103
- [Jus75] A. P. Juskiewicz (red.), *Historia matematyki*, t. 1, PWN, Warszawa, 1975. 211
- [Jus76] A. P. Juskiewicz (red.), *Historia matematyki*, t. 2, PWN, Warszawa, 1976. 157
- [Kac61] M. Kac, *Kilka zagadnień stochastycznych fizyki i matematyki*, PWN, Warszawa, 1961. 258
- [Kak41] S. Kakutani, *A generalization of Brouwer's fixed point theorem*, Duke Mathematical Journal 8 (1941), 457–458. 222
- [KG01] J. Kowalski-Glikman, *Przestrzeń i czas, rozważania o kocie Konfucjusza*, Rzeczpospolita, 7 IV 2001. 225
- [Khi53] A. Ya. Khinchin, *Ponjatje entropii v teorii verojatnostej*, Uspekhi Mat. Nauk 8 (1953), 3–30. 92
- [Kho80] A. S. Kholevo, *Verojatnostnye i statističeskie aspekty kvantovoj teorii*, Nauka, Moskwa, 1980. 264, 267
- [Kle95] H. Kleinert, *Path integrals in quantum mechanics, statistics, and polymer physics*, World Scientific, Singapore, 1995. 258
- [Kle99] P. Klemperer, *Auction theory: a guide to the literature*, J. Ec Surveys 13 (1999), 295–399. 288
- [KM63] M. G. Kendall, P. A. P. Moran, *Geometric probability*, Griffin, London, 1963. 56, 309
- [KP95] A. Karpio, E. W. Piotrowski, *Odsetki zamiast pseudoodsetek*, Penetrator – Wiadomości Gospodarcze 11 (1995), 29–31. 134
- [KP99] ———, *Chwilowa stopa procentowa*, Przegląd Statystyczny 46 (1999), 67–78. 38, 82, 122, 127, 136, 139, 173
- [KT81] W. Kopczyński, A. Trautman, *Czasoprzestrzeń i grawitacja*, PWN, Warszawa, 1981. 52, 53
- [Kuh68] T. S. Kuhn, *Struktura rewolucji naukowych*, PWN, Warszawa, 1968. 4
- [Lam00] L. Lambertini, *Quantum mechanics and mathematical economics are isomorphic*, <http://www.spbo.unibo.it/gopher/DSEC/370.pdf>, 2000. 262
- [Lan61] O. Lange, *Wstęp do ekonometrii*, PWN, Warszawa, 1961. 6, 14, 222
- [Leo96] U. Leonhardt, *Discrete Wigner function and quantum-state tomography*, Phys. Rev. A 53 (1996), 2998–3013. 295
- [Lev82] I. Levi, *A note on Newcombmania*, Journal of Philosophy 79 (1982), 337–342. 309
- [ŁP69] J. Łopuszański, A. Pawlikowski, *Fizyka statystyczna*, PWN, Warszawa, 1969. 12
- [LR64] R. D. Luce, H. Raiffa, *Gry i decyzje*, PWN, Warszawa, 1964. 226, 289
- [Man99] V. I. Man'ko, *Conventional quantum mechanics without wave function and density matrix*, Latin-American School of Physics XXXI ELAF: New perspectives

- on quantum mechanics (Woodburry) (S. Hacyan i inni, red.), AIP, 1999, str. 191–220. [253](#)
- [Mar88] W. Marciszewski (red.), *Mała encyklopedia logiki*, Wrocław, ZNiO-Wydawnictwo, 1988. [196](#)
- [Mau74] K. Maurin, *Analiza*, t. 1, PWN, Warszawa, 1974. [122](#), [128](#)
- [MB86] Z. Messner, B. Binkowski, *Podstawy rachunkowości*, t. wyd. II zmienione, PWE, Warszawa, 1986. [20](#)
- [Mey99] D. A. Meyer, *Quantum strategies*, Phys. Rev. Lett. **82** (1999), 1052–1055. [311](#)
- [Mik57] J. Mikusiński, *Rachunek operatorów*, PWN, Warszawa, 1957. [194](#), [196](#), [197](#), [203](#), [204](#)
- [Mil00] G.J. Milburn, *Procesor Feynmana*, CiS, Warszawa, 2000. [27](#), [238](#), [311](#)
- [MLI01] A. Miranowicz, W. Leonski, N. Imoto, *Quantum-optical states in finite-dimensional Hilbert space. i. General formalism*, Modern Nonlinear Optics, Adv. Chem. Phys. 119 (I) (M. W. Evans, red.), Wiley, New York, 2001, str. 155–193. [296](#)
- [MM99] V. I. Man'ko, R. V. Mendes, *Non-commutative time-frequency tomography*, Phys. Lett. A **263** (1999), 53–61. [253](#)
- [Mor15] A. De Morgan, *A budget of paradoxes*, t. 2, The Open Court Publishing Co., Chicago, 1915. [6](#)
- [MP65] A. P. Mišina, I. V. Proskurjakov, *Vysšaja algebra*, Nauka, Moskwa, 1965. [131](#)
- [MP01] J. Masoliver, J. Perelló, *Option pricing and perfect hedging on correlated stocks*, arXiv:cond-mat/0012014 (2001). [261](#)
- [MS01] R. N. Mantegna, H. E. Stanley, *Ekonofizyka. wprowadzenie*, PWN, Warszawa, 2001. [11](#), [55](#), [261](#)
- [MW00] L. Marinatto, T. Weber, *A quantum approach to static games of complete information*, Phys. Lett. A **272** (2000), 291. [221](#), [270](#)
- [MWS97] M. Malawski, A. Wieczorek, H. Sosnowska, *Konkurencja i kooperacja. Teoria gier w ekonomii i naukach społecznych*, PWN, Warszawa, 1997. [226](#)
- [Nal76] W. Nalimow, *Probabilistyczny model języka*, PWN, Warszawa, 1976. [4](#), [17](#)
- [NC00] M. A. Nielsen, I. L. Chuang, *Quantum computation and quantum information*, University Press, Cambridge, 2000. [11](#), [261](#), [299](#)
- [Now02] S. Nowak, *Podstawy rachunkowości i system finansowo księgowy*, Wydawnictwo Wyższej Szkoły Bankowej, Poznań, 2002. [20](#)
- [Noz69] R. Nozick, *Newcomb's problem and two principles of choice*, Essays in Honor of Carl G. Hempel (Dordrecht) (N. Rescher i inni, red.), D. Reidel, 1969, str. 114–146. [308](#), [309](#)
- [Orl82] Y. F. Orlov, *The wave logic of consciousness: a hypothesis*, International Journal of Theoretical Physics **21/1** (1982), 37–53. [294](#)
- [Par88] K. H. Parshall, *The art of algebra from al-khwarizmi to viète: a study in the natural selection of ideas*, History of Science **72** (1988), 129–164. [30](#)
- [Pau21] W. Pauli, *Relativitätstheorie*, Encyklopädie der mathematischen wissenschaften, t. 19 (Leipzig), B.G.Teuber, 1921. [41](#), [48](#), [52](#)
- [PB00] A. K. Pati, S. L. Braunstein, *Impossibility of deleting an unknown quantum state*, Nature **404** (2000), 164–165. [283](#)
- [Pen00] R. Penrose, *Cienie umysłu*, Zysk i S-ka, Poznań, 2000. [27](#), [228](#), [238](#), [276](#)
- [Per58] J. Perkal, *O długości krzywych empirycznych*, Zastosowania Matematyki **3** (1958), 258–284. [65](#), [66](#)
- [Pij92] L. Pijanowski, *Przewodnik gier*, Lacpress, Warszawa, 1992. [306](#)
- [Pio83] E. W. Piotrowski, *Spin systems in contact with thermostat — kinetic model*, Physica **121A 121A** (1983), 135–142. [275](#)
- [Pio95] ———, *O logarytmie*, Penetrator – Wiadomości Gospodarcze **12** (1995), 34–36. [38](#), [85](#), [95](#)

- [Pio97] ———, *Paradoks równowagi cen, a optymalna asekuracja kapitału*, Instrumenty pochodne (Kraków), Universitas, 1997. 43, 45, 104, 149, 217, 260
- [Pio99a] ———, *Podział kapitału, czyli o cenie rezygnacji i sile pieniądza*, Optimum 3 (1999), 163–178. 90, 289, 306
- [Pio99b] ———, *Zapomniany pierwowzór definicji ryzyka kapitałowego*, Modelowanie preferencji a ryzyko '99, t.1 (Katowice) (T. Trzaskalik, red.), AE, 1999, str. 337–353. 49, 55, 71, 95
- [Pio00] ———, *Dylematy osła i kota*, RePEc:sla:eakjkl:110PL, 2000. 268
- [Pio03] ———, *Fixed point theorem for simple quantum strategies in quantum market games*, przyjęte do druku w Physica A (2003). 292
- [Pop77] K. R. Popper, *Logika odkrycia naukowego*, PWN, Warszawa, 1977. 4, 247
- [PR85] R. Penrose, W. Rindler, *Spinors and space-time*, t. 1, Cambridge U. Press, Cambridge, 1985. 264, 265
- [Pri98] H. Price, *Strzałka czasu i punkt Archimedes*, Amber, Warszawa, 1998. 158
- [PS01] E. W. Piotrowski, J. Śładkowski, *Quantum-like approach to financial risk: quantum anthropic principle*, Acta Phys. Pol. B 32 (2001), 3873–3879. 17
- [PS02] ———, *Quantum market games*, Physica A 312 (2002), 208–216. 10, 11
- [PS03] ———, *Ryzyko arbitrażu wynikające z kosztów transakcyjnych*, Modelowanie preferencji a ryzyko '03 (Katowice) (T. Trzaskalik, red.), <http://ideas.repec.org/p/sla/eakjkl/119pl.html>, AE, 2003. 13
- [PS04] ———, *Arbitrage risk induced by transaction costs*, Physica A 331 (2004), 233. 27
- [PW00] J. Przystawa, M. Wolf, *Violation of interest-rate parity: a Polish example*, Physica A 285 (2000), 220–226. 107, 108, 109, 110, 111, 112
- [Rob51] J. Robinson, *An iterative method of solving a game*, Annals of Mathematics 54 (1951), 296–301. 222
- [Roc92] *Rocznik statystyczny*, Warszawa, ZWS, 1992. 110
- [RP00] E. Rieffel, W. Polak, *Introduction to quantum computing for nonphysicists*, ACM Computing Surveys 32 (2000), nr 3. 305
- [Sch81] E. F. Schumacher, *Małe jest piękne*, PIW, Warszawa, 1981. 3
- [Sch95a] B. Schneier, *Kryptografia dla praktyków*, WN-T, Warszawa, 1995. 10, 302
- [Sch95b] H.G. Schuster, *Chaos deterministyczny*, PWN, Warszawa, 1995. 220
- [Sch96] P. Schaal, *Pieniądz i polityka pieniężna*, PWE, Warszawa, 1996. 27
- [Sco99] A. Scott, *Schody do umysłu*, WNT, Warszawa, 1999. 308
- [Sha48] C. E. Shannon, *A mathematical theory of communication*, Bell System Techn. J. 27 (1948), 379–423, ibid. 623–656. 91
- [Sho94] P. W. Shor, *Algorithms for quantum computation: discrete logarithms and factoring*, IEEE Symposium on Foundations of Computer Science, XI 1994, str. 124–134. 316
- [Sin01] S. Singh, *Księga szyfrów*, Wydawnictwo Albatros, Warszawa, 2001. 302
- [SIL00] Jr. S. J. Lomonaco, *A Rosetta stone for quantum mechanics with an introduction to quantum computation*, arXiv:quant-ph/0007045, 17 VII 2000. 305
- [slo98] *Słownik wyrazów bliskoznacznych*, Warszawa, Wiedza Powszechna, 1998. 60
- [Smi49] A. Smith, *Badania nad naturą i przyczynami bogactwa narodów, rozdz. vi, Wartość i cena* (E. Lipiński, red.), Wydawnictwo Kazimierza Rutkiego, Warszawa, 1949. 13
- [Smo76] J. Smorodinski, *Lobačevski i fizyka*, Kvant 2 (1976), 22–26. 52
- [SN89] P. A. Samuelson, W. D. Nordhaus, *Microeconomics*, McGraw-Hill, New York, 1989. 5, 233
- [Sło85] *Słownik matematyki i cybernetyki ekonomicznej*, Warszawa, PWE, 1985. 95, 205
- [Sło95] *Słownik wyrazów obcych. Wydanie nowe*, Warszawa, PWN, 1995. ii

- [Som17] W. Sombart, *Der moderne kapitalismus*, t. II, Duncker & Humblot, Leipzig, 1917. **ii**
- [Ste53] H. Steinhaus, *Podstawy kontroli statystycznej*, Zastosowania Matematyki **1** (1953), 4-27. **99**
- [Ste54] ———, *Length, shape and area*, Colloquium Mathematicum **3** (1954), 1-13. **65, 66, 67**
- [Ste59] ———, *Gry*, Wiadomości Matematyczne **III** (1959), 107-120. **16**
- [Ste69] ———, *O grach (swobodnie)*, Studia Filozoficzne **5/55** (1969), 3-13. **226**
- [Ste71] H. Steinhaus (red.), *Elementy nowoczesnej matematyki dla inżynierów*, Wrocław, PWN, 1971. **127, 176, 178, 191, 193**
- [Ste73] ———, *Autobiografia*, Wiadomości Matematyczne **17** (1973), 3-11. **55**
- [Ste89] ———, *Kalejdoskop matematyczny*, WSiP, Warszawa, 1989. **65, 66**
- [Ste00] ———, *Między duchem a materią pośredniczy matematyka*, PWN, Warszawa-Wrocław, 2000. **ii**
- [Sti47] G. J. Stigler, *Notes on the history of the giffen paradox*, Journal of Political Economy **55** (1947), 152-156. **224, 238, 288**
- [Sti98] G. Stix, *Rachunek ryzyka*, Świat Nauki **7** (1998), 70-76. **45**
- [Str01] P. D. Straffin, *Teoria gier*, Wydawnictwo Naukowe Scholar, Warszawa, 2001. **309**
- [Sub74] M. Subotowicz, *Elementy astronautyki*, WSiP, Warszawa, 1974. **69**
- [Szp90] J. Szpotański, *Zebrane utwory poetyckie*, Puls, London, 1990. **88**
- [Szu23] T. Szulborski, *Słownik handlowy*, Księgarnia F. Hoesicka, Warszawa, 1923. **14**
- [Tat78] W. Tatariewicz, *Historia filozofii*, PWN, Warszawa, 1978. **224**
- [Tat83] V. I. Tatarski, *Vignerovskoe predstavlenie kvantovoj mechaniki*, Usp. Fiz. Nauk **139** (1983), 587-619. **232, 236, 237**
- [Tay95] M. P. Taylor, *The economics of exchange rates*, Journ. of Econ. Lit. **33** (1995), 13-47. **260**
- [TW72] E. F. Taylor, J. A. Wheeler, *Fizyka czasoprzestrzeni*, PWN, Warszawa, 1972. **52**
- [TW01] M. Tegmark, J. A. Wheeler, *Stulecie kwantowych zagadek*, Świat Nauki **4** (2001), 54-62. **7**
- [Var95] H. R. Varian, *Mikroekonomia*, PWN, Warszawa, 1995. **83, 223**
- [Veb33] O. Veblen, *Projektive relativitätstheorie*, Springer, Berlin, 1933. **48**
- [Vis86] O. V. Viskov, *Nekomutativnyj podchod k klasičeskim zadačam analiza*, Tr. MIAN **177** (1986), 21-32. **152, 321**
- [vK90] N. G. van Kampen, *Procesy stochastyczne w fizyce i w chemii*, PWN, Warszawa, 1990. **255**
- [vN32] J. von Neumann, *Mathematische grundlagen der quantenmechanik*, Springer, Berlin, 1932. **236**
- [vNM53] J. von Neumann, O. Morgenstern, *Theory of games and economic behavior*, Princeton University Press, Princeton, 1953. **10, 134, 236**
- [VY46] O. Veblen, J. W. Young, *Projective geometry*, Blaisdell, New York, 1946. **29, 34, 41, 46, 50, 52**
- [Wai02] S. Waite, *Quantum investing*, Texere Publishing, London, 2002. **i**
- [Wei99] S. Weinberg, *Teoria pól kwantowych*, t. 1, PWN, Warszawa, 1999. **232**
- [Wel97] S. Welisz, *Gdy brak pełnej informacji*, Wiedza i Życie **2** (1997), CD-ROM 1999. **90**
- [Wie83] S. Wiesner, *Conjugate coding*, SIGACT News **15/1** (1983), 78-88; złożone do druku w 1970 w IEEE, Information Theory; <http://kh.bu.edu/qcl/pdf/wiesners198316024137.pdf>. **291, 302**
- [Wie00] *Wielki multimedialny słownik Władysława Kopalińskiego*, Warszawa, PWN, 2000. **6, 21**

- [WKO00] X.-B. Wang, L.C. Kwek,, C.H. Oh, *Quantum roulette: an extended quantum strategy*, Phys. Lett. A **278** (2000), 44–46. 314
- [WW98] A. Weron, R. Weron, *Inżynieria finansowa*, WN-T, Warszawa, 1998. 45
- [WZ82] W. K. Wootters, W. H. Zurek, *A single quantum cannot be cloned*, Nature **299** (28 X 1982), nr 5886, 802–803. 265, 286
- [Yos84] K. Yosida, *Operatoinal calculus*, Springer-Verlag, New York, 1984. 191, 193
- [Zal78] K. Zalewski, *Wykłady z termodynamiki fenomenologicznej i statystycznej*, PWN, Warszawa, 1978. 95, 96, 98, 99

## Skorowidz

- światy Everetta, 4, 293  
łysenkizm, 20
- a capitale*, ii  
addytywność stopy przedziałowej, 42  
akcje śmieciowe, 248  
algebra Heisenberga–Weyla, 151  
algorytm  
  „dziel i rządź”, 319  
  małpy, 13  
algorytmy inwestycyjne  
  deterministyczne, 95  
  stochastyczne, 95  
alians, 300  
amplituda prawdopodobieństwa, 228–230  
antynomia  
  „łysina”, 224  
  „stos ziarna”, 224  
arbitraż, 255, 259  
arbitraż cenowy, 47  
  a spekulacja, 19  
arbitraż cenowy, 13–14, 107–115  
arbitrażer, 14, 107  
*Art B*, 110  
aukcja  
  angielska (pierwszej ceny), 278  
  Vickrey’a (drugiej ceny), 288
- $\beta$  mnożnik Lagrange’a, 96, 113, 274  
Bachelier, Louis, 45, 255  
bankructwo, 28  
bessa, 61  
bilans, 30  
  handlowy, 17  
  materiałowy, 17  
  płatniczy, 17  
  przepływów, 73  
  rezerwuarów, 73
- bit, 264  
Blacka–Scholesa formuła, 237  
Bonaparte, Napoleon I, 6  
bramka kwantowa, 294  
brzytwa Ockhama, 6, 20
- całki po trajektoriach, 69, 237, 258  
Cardano, Gerolamo, ii  
cena, 9  
  dezinformacji, 98  
  jednolita, 9  
  monopolisty, 234  
  równowagi rynkowej, 223  
  rezerwacji, 279  
  rezygnacji, 204, 216, 227, 241, 278  
  rynkowa, 9  
  transakcyjna, 8  
  wywoławcza, 279  
cennik, 77  
cisi, 87  
cząstka  
  Brown, 255  
  Rayleigha, 255  
czas wzorcowy, 57, 134  
czasoprzestrzeń Minkowskiego, 264
- Dürer, Albrecht, ii  
dźwignia finansowa, 269  
dług niespłacany, 145  
deficyt bilansowy, 79  
Dirac, Paul, 193  
dobro  
  Giffena, 223  
  niewymienialne, 28  
  rynkowe, 9, 25  
dominacja polaryzacji, 267  
dryf logarytmu ceny, 45  
dualizm korpuskularno–falowy, iii

- dwoistość  
 kredytów, 80  
 dwustosunek, 22, 216  
 dychotomia obserwujący-obszewanane, 225  
 dyfuzja logarytmu ceny, 45  
 dyskretna transformacja Fouriera, 254, 314  
 dystrybuanta Gumbela, 284  
 dzierżawa wieczysta, 144  
 dźwignia finansowa, ii, 107, 110
- Einstein, Albert, 230  
 eksperyment EPR, 230  
 energia, 235  
 wewnętrzna, 98  
 entalpia, 102  
 swobodna, 102  
 entropia, 90  
 dźwigni finansowej, 114  
 ewolucja kwantowa, 228
- falsyfikowalność teorii, 7  
 fei, 27  
 fermion, 265, 278  
 Feynman, Richard Phillips, 316  
 formuła Feynmana-Kaca, 258  
 foton, 269  
 funkcja  
 (dystrybucja) delta Diraca, 178, 187, 193,  
 203–204, 234, 252, 279  
 CES, 83, 102  
 Cobba-Douglasa, 83, 102  
 falowa, 230  
 Hermita, 182  
 jednokierunkowa, 302  
 Laplace'a, 176  
 pieniądza, jako miernika wartości, 27  
 podaży, 222  
 popytu, 222  
 tworząca, 96  
 użyteczności, 58, 74, 135  
 Wignera, 192, 223, 232, 246, 253, 274
- gęstość prawdopodobieństwa  
 ujemna, 223  
 Gibbs, Josiah Willard, 102  
 giffen, 192, 233–237, 271, 298  
 Giffen, Robert, 224  
 globalizacja, 11  
 gra Newcomba, 308  
 gra papier, kamień, nożyce (RSP), 267
- gracz rynkowy, 38, 88  
 grupa  
 Euklidesa, 61  
 Lorentza, 41, 264  
 Lorentza, właściwa, 264
- hardware, 20  
 Hezjod, 276  
 hiperfunkcja, 191  
 hiperpowierzchnia stanu równowagi, 82  
 hiperstopa, 68, 204  
 hossa, 61
- iloczyn skalarny, 227  
 infinitesimalna stopa zwrotu, 81  
 instrument wzorcowy, 56  
 intensywność przepływu, 78  
 interferencja strategii, 239–250, 291, 303  
 interwał czasoprzestrzenny, 264  
 inwersja czasu wzorcowego, 57  
 inwestor, 8  
 involucja Legendre'a, 80, 100  
 izba rozrachunkowa, 230, 299, 306  
 izokwanta, 101  
 izoterma, 101
- jednorodność funkcji zysku, 43  
 jednostka pieniężna, 47
- kanoniczny zespół statystyczny, 95  
 kapitał  
 ludzki, 9  
 trwały, 9  
 klika, 12  
 klonowanie, 286, 311, 316  
 polaryzacji, 265  
 strategii, 268
- kod  
 Huffmana, 96  
 komputer kwantowy, 300  
 komutator, 151  
 koncentracja kapitału, 11  
 konkurencja, 10  
 konsumpcja, 11  
 konwencja  
 alias, 41  
 alibi, 41  
 archimedesowa, 158  
 bez kapitalizacji, 144  
 Cournota, 222–223  
 Marshalla, 222–223

- Sierpińskiego, 195
- z kapitalizacją, 144
- konwencje opisywania kredytów, 149
- koszyk, 24, 77
  - współrzędne, 25
- koszyki
  - ortogonalne, 94
- krańcowa produktywność
  - kapitału, 84
  - pracy, 84
- kreatywna księgowość, 20
- kredyt, 134
  - o nominalnie stałych ratach kapitałowych, 145
  - o nominalnie stałych ratach spłaty, 146
  - o realnie stałych ratach kapitałowych, 146
  - o realnie stałych ratach spłaty, 145
  - prosty, 144
- kredytobiorca, 136
- kredytodawca, 136
- kryptografia
  - kwantowa, 302
  - z kluczem publicznym, 302
- krzywa
  - fraktalna, 65
  - podaży, 192, 222, 233
    - zawracająca, 222–223
  - popytu, 192, 222, 233
    - zawracająca, 222–223
- księgowiść
  - kreatywna, 18
- księgowość, 71, 79
- księgowość kreatywna, 102
- kurs, 89
  - jako punkt przestrzeni rzutowej, 29
  - niewłaściwy dla dobra, 28
  - rynkowy, 78
- kursy
  - kongruentne, 36
- kwantowa
  - stabilność stanu równowagi, 283
  - strategia czysta, 227
  - strategia mieszana, 228
- kwantowy efekt Zenona, 11, 233, 261
- kwaterniony, 263
- Lagrange de, Giuseppe Lodovico Lengran-  
gia, 95
- Laplace, Pierre Simon de, 6
- Legendre, Adrien Marie, 71
- Leibniz, Gottfried Wilhelm, 71
- licytacja, 278
- linia geodezyjna, 39
- logika falowa, 294
- longimetr, 66
- Lorentz, Hendrik, 41
- loteria, 10, 88, 136, 137, 228
- łamanie symetrii, 47
- łuk prostowalny, 65
- macierz
  - przeptywów, 124
  - rozpraszania, 232
  - wzrostów, 124
- marketing, 7
- Markowitz, Harry M., 55
- martyngał, 259, 260
- matrycant, 127
- metoda dialektyczna, 6
- metryka rynku
  - minimaksowa, 38
  - temperaturowa, 38, 99
- miara
  - dezorientacji w ocenie wartości portfela, 96
- miara Wienera warunkowa, 258
- miary
  - Jensena, Sharpe'a, Treynora, 86
- Mikusiński, Jan G., 193
- mniejszości, 11
- mnożnik Lagrange'a, 95, 237, 255
- moda, 11
- model
  - Bacheliera, 45, 237, 255
  - CAPM, 16, 86
  - IMM, 8–16
  - Isinga, 95
  - klasyczny, 228
  - racjonalnego kupca, 35, 216, 279
  - statyki porównawczej, 75
- model IMM
  - w teorii kwantowej, 103
- modyfikacja
  - rat spłaty, 83
  - stóp dyskontowych, 82
- monopol, 11
- moralnie słuszna cena, 224
- motywacja w aukcji Vickrey'a, 288
- nakłady



- kapitałowe, 83
- pracy, 83
- Nash, John, 306
- natężenie zysku, 8, 216, 247
- Neumann von, John, 134
- newcombmania, 309
- nieaddytywność stopy przedziałowej, 109
- niemożność klonowania strategii, 265, 283
- niemultiplikatywny czynnik kapitalizacji, 112
- nieprzechodniość cenników, 47
- nierównoważność proporcjonalnych koszyków, 47
- nieredukowalność jednakowych graczy, 265, 283
- nietransytywność, 267
- niewidzialna ręka rynku, 259
- niezmiennik
  - homografii, 29, 216
- niezmiennik transformacji, 5
- no free lunch theorem, 95, 261
- notacja Diraca, 228
- notacja Iwersona, 140
- obiekt klasyczny, 228, 230
- obligacja
  - nie datowana, 144
  - o zmiennym oprocentowaniu, 143
  - zerokuponowa, 144
- obserwabla, 229
- ocena
  - kredytu, 105
  - portfela obligacji, 105
- oferta
  - minimalna, 279
- operator
  - anihilacji, 236
  - antychronologiczny  $\mathcal{T}'$ , 123, 258
  - chronologiczny  $\mathcal{T}$ , 122
  - dyskontowania, 151, 165, 170, 174, 178
  - Laplace'a, 257
  - liniowy hermitowski, 229
  - podaż  $\mathcal{P}_k$ , 229
  - popytu  $\mathcal{Q}_k$ , 229, 271
  - przyrostu kapitału, 153, 162, 168, 177
  - rzutowy, 228, 229
  - skłonności do ryzyka  $H(\mathcal{P}_k, \mathcal{Q}_k)$ , 192, 235, 254
  - stopy, 152, 162, 168, 177
  - transakcji, 232
- orbita Hohmanna, 69
- oscylator
  - Bagsika i Gąsiorowskiego, 108
  - harmoniczny, 129, 201
- osiągalność instrumentu finansowego, 59–60
- owczy pęd, 14
- Paciuolo, Luca, ii, 20, 30, 80
- Pappus, 22
- paradoks
  - Newcomba, 309
  - petersburski, 260
  - równowagi cen, 43, 104, 260
  - Siegela, 260
  - stóp różnicowych, 125
- parametr
  - stanu, 72
- parametry
  - ekonomiczne, 72
  - kanonicznie sprzężone, 75
- parametryzacja
  - Cayley-Kleina, 263
  - Stokesa, 264
- pełna konkurencja, 259
- Penrose sir, Roger, 276
- per cassa*, ii
- pieniądz, 56
  - niepodrabialny, 302
  - zdematerializowany, 27
- podaż
  - pracy, 223
  - stochastyczna interpretacja, 223
- podatki, 9
- podział Knastera (pragmatyczny), 289
- polaryzacja, 249, 264
- pomiar, 264
- popyt
  - stochastyczna interpretacja, 223
- portfel, 25, 89
  - jako punkt przestrzeni rzutowej, 29
  - kanoniczny, 95, 255
  - niewłaściwy dla dobra, 25
  - urnowy, 88
  - współmienniczy, 97
  - współmienniczy z kursem, 33, 42–43, 105
  - zbilansowany, 42
  - zbilansowany na kursie, 28
  - zrównoważony, 99–104
- portfele
  - kongruentne, 36
- potencjał, 70, 72

- poufność uzgodnień transakcyjnych, 305
- pozycja  
 długa, 61, 104  
 krótka, 61, 101, 104
- prawo popytu i podaży, 14
- prawo zachowania  
 parametru ekonomicznego, 72  
 portfela, 79  
 przepływów, 80  
 strumienia kapitału, 78
- procent  
 prosty, 144  
 składany, 144
- proces  
 adiabatyczny, 98  
 Ornsteina-Uhlenbecka, 256  
 Wienera-Bacheliera, 257
- przejście fazowe, 95
- przestrzeń  
 fazowa, 232, 245  
 fazowa koszyków, 121  
 funkcji całkowalnych w kwadracie  $\mathcal{L}^2$ , 182, 228, 234  
 Hilberta, 175, 265  
 Minkowskiego, 50  
 parametrów ekonomicznych, 72  
 rzutowa rzeczywista  $\mathbb{R}P^N$ , 29  
 stanu równowagi, 72
- przychód ze skali, 13, 47, 84
- pseudodługość krzywej, 69
- pseudointensywność, 82
- pseudopojęcia, 71
- pseudopotencjał, 82
- pseudoprawdopodobieństwo, 232, 246
- pseudoprawo zachowania, 82
- pseudosprężenie, 82
- punkt stały, 219, 256
- $q$ -aukcja, 262, 288  
 angielska, 279
- $q$ -bit, 263, 315
- $q$ -gra kolektywna, 299
- $q$ -gra rynkowa, 262
- $q$ -targ, 262
- $q$ -transakcja, 262
- quasirównowaga rynkowa, 11
- równania Maxwella, 74, 102
- równanie  
 bilansu koszyka, 80–81
- Fokkera-Plancka, 257
- ruchu koszyka, 121
- stanu, 70
- równowaga rynkowa, 11–16, 237, 238  
 globalna, 12  
 lokalna, 12
- równowagi  
 stan, 11, 70
- rachunek  
 Heaviside'a, 193  
 operatorów, 193  
 operatorowy Mikusińskiego, 190–193
- rachunkowość, 20
- reguły łańcuchowe, 74
- relacja nieokreśloności Heisenberga, 234
- renta wieczysta, 144  
 nominalnie stała, 147
- reprezentacja  
 efektywna, 174
- reszta świata* (RŚ), 232, 237, 246, 249, 259, 271, 280
- rozkład  
 Gibbsa, 95, 255, 274  
 jedyński, 34  
 momenty, 96
- rozkład normalny, 217, 236, 237, 280
- rura Croftona  $\mathbb{P}^2$ , 62, 251
- rynek efektywny, 11, 261
- rynek jako fragment teorii holistycznej, 102
- ryzyko  
 finansowe a czas, 69  
 strategii rynkowej, 235
- rzut stereograficzny, 291
- samonaprawiający się rynek, 15
- schładzanie strategii, 237
- schizofrenia, 240
- sektor rynku, 88
- sfera niebieska, 265
- Shannon, Claude, 96
- Smith, Adam, 13
- software, 20
- spółka, 12
- spekulacja  
 a arbitraż cenowy, 19
- splątanie stanów kwantowych, 230, 302, 308
- split, 28, 57
- spontaniczność gry rynkowej, 303
- stała Plancka  $\hbar_E$ , 222, 232, 274
- stan

- czysty, 227
- mieszany, 228
- stany świadomości, 294, 302
- statyka
  - porównawcza, 72
  - równowagowa, 70
- statystyka pozycyjna, 280
- Staudt von, Karl George Christian, 34
- stopa
  - dolna (macierzowa), 122
  - dyskontowa, 123, 171
  - górną (macierzowa), 122
  - gaussowska  $n$ -tego rzędu, 188
  - kontekstowa, 20
  - kredytowa, 123
  - logarytmiczna, 42
  - procentowa, 171
  - przedziałowa, 38, 43, 107, 136, 189
    - dolna, 166
    - górną, 171
    - nieaddytywna, 112
  - różniczkowa, 56, 136, 152, 207, 216
  - różniczkowa  $m$ -tego rzędu, 154
  - różniczkowa (macierzowa), 126
  - stochastyczna, 133, 254
  - zwrotu z koszyka, 82
- strategia
  - adiabatyczna, 235, 253
  - czysta, 226
  - diracowska, 217, 234, 235
  - gaussowska, 234, 236, 237
  - mieszana, 229
  - reszty świata*, 237, 261, 271, 315
  - termiczna, 236
- strategia, a taktyka, 221, 255
- strategie splecione, 288
- struktura kontaktowa, 76
- substytut, 12
- suma statystyczna, 96
- supergęste kodowanie, 11, 261, 304, 305
- superpozycja
  - stanów, 228
  - strategii, 240
- symbol
  - Pochhammera, 164
- średni czas transakcji, 217, 223, 252
- $\theta$  charakterystyczny czas transakcji, 217, 235
- taktyka, 27, 221, 237, 255, 270, 272, 274
- taktyka ciepła, 255
- taktyki rynkowe, 239–250, 292–307
- Tales, 21
- teleportacja, 286, 311
  - polaryzacji, 267, 305
- temperatura, 38, 113, 237
  - dźwigni finansowej, 107
  - portfela, 319
  - ryzyka, 275
  - spinowa, 275
  - ujemna, 98
  - zespołu kanonicznego, 96
  - zespólna, 113
- teoria
  - holistyczna, 192
  - kwantowa, 192, 217
  - ryнку fenomenologiczna, 192
- tożsamość teleskopowa, 184
- tomografia rynkowa, 251
- transakcja, 8
- transformacja
  - alias, 34, 293
  - alibi, 41, 293
  - Fouriera, 235, 291
  - Legendre'a, 75
  - Radona, 252
- transformata Fouriera, 233, 239
- transformata Legendre'a, 75, 77
- trwałość cen, 14
- ujemne prawdopodobieństwa, 107, 233, 298
- układ
  - odniesienia, 49, 56
- umysł kwantowy, 302
- urządzenie klonujące strategię, 265
- Vinci da, Leonardo, ii, 30
- własność rezolwenty, 174
- waga
  - dobra w portfelu, 88
- warrant, 61
- wartość
  - dodana, 13
  - księgową, 79
  - portfela
    - bieżąca, 79
    - jako wielkość krańcowa, 101
    - kanonicznego, swobodna, 100
    - urnowego, 88
- WGPW, 61

- wielomiany
  - Appella, 191
  - Bernoulliego, 191
  - Hermita, 175, 253, 257
  - Laguerra, 191, 253
- współczynnik
  - intensywności, 73, 89
- współrzędne
  - croftonowskie, 62
  - fizyczne, 49
  - izotropowe, 53
  - jednorodne, 47
  - niejednorodne
    - kursu, 28
    - portfela, 25
    - Plückera, 32
- współzmienniczność, 43
- współzmiennik transformacji, 5
- wykres
  - instrumentu, 57
  - semilogarytmiczny, 57
- wyroczenia Deutscha, 293
- wzór Rodriguesa, 180
- wzrost, 16
  
- Yap, 27
  
- złącz, 32
  - wypukły, 33
- złożoność obliczeniowa, 27
- zakaz Pauliego, 278
- zasada
  - antropiczna, 17, 316
  - dwoistości kredytów, 147
  - korespondencji, 224
  - nieoznaczoności Heisenberga, 222, 236
  - symetrii rynku, 31
- zasady
  - termodynamiki, 13, 98
  - zachowania, 13, 70
  - zespołu kanonicznego, 98
- zbiór
  - instrumentów finansowych, 56
  - prostych, 59
- Zenon z Elei, 224
- zmiana bazy
  - kursu, 31
  - portfela, 31
- znikanie cząstek fizycznych, 269
- zobowiązania, 9
  
- zysk z kupna i sprzedaży, 34, 244