

KINEMATYKA RELATYWISTYCZNA

I DIAGRAMY CZASOPRZESTRZENNE

I. CZASOPRZESTRZEŃ

Określenie położenia ciała (np. punktu materialnego) w przestrzeni jest możliwe tylko wtedy, gdy wcześniej dokonamy wyboru **układu odniesienia** (u.o.), to znaczy wybierzemy ciało lub zespół wzajemnie nieruchomych ciał, względem których będziemy określać położenia innych ciał oraz badać zmiany tych położzeń z upływem czasu.

Wybieramy pewien punkt O ustalonego u.o. i z punktem tym wiążemy początek **3-wymiarowego układu współrzędnych prostokątnych** wyznaczonego przez trzy wzajemnie prostopadłe osie x , y i z , przecinające się w punkcie O . Do pomiaru czasu t potrzebujemy **zbioru wzajemnie nieruchomych, jednakowo chodzących i zsynchronizowanych ze sobą zegarów**.

Zdarzeniem nazywamy jakiekolwiek zjawisko fizyczne zachodzące w bardzo małym obszarze przestrzeni (czyli w punkcie) i trwające bardzo krótko. Dobrym modelem zdarzenia jest *zderzenie* dwóch cząstek elementarnych.

Każdemu zdarzeniu w ustalonym u.o. możemy przyporządkować **trzy współrzędne przestrzenne** x, y, z określające miejsce (czyli punkt), w którym zdarzenie zaszło, oraz **chwilę czasu** t mówiącą, kiedy ono zaszło. Chwilę czasu t nazywać też będziemy **współrzedną czasową** zdarzenia.

Zdarzenie ma bezwzględny (inaczej: absolutny) charakter, tzn. nie zależy ono od wyboru u.o., natomiast **przyporządkowane zdarzeniu współrzędne przestrzenne i współrzedna czasowa są względne** — ich wartości liczbowe zależą od wyboru u.o.

Zbiór wszystkich zdarzeń nazywamy **czasoprzestrzenią**.

Czasoprzestrzeń jest 4-wymiarowa — każde zdarzenie jest opisane przez **cztery współrzędne czasoprzestrzenne**: trzy współrzędne przestrzenne i jedną współrzedną czasową.

II. ZASADA WZGLĘDNOŚCI

Pierwsze prawo Newtona (zasada bezwładności):

istnieje inercjalny układ odniesienia.

Inercjalny układ odniesienia (i.u.o.) to układ odniesienia, względem którego wszystkie ciała nie oddziałujące z innymi ciałami poruszają się jednostajnie i prostoliniowo lub spoczywają.

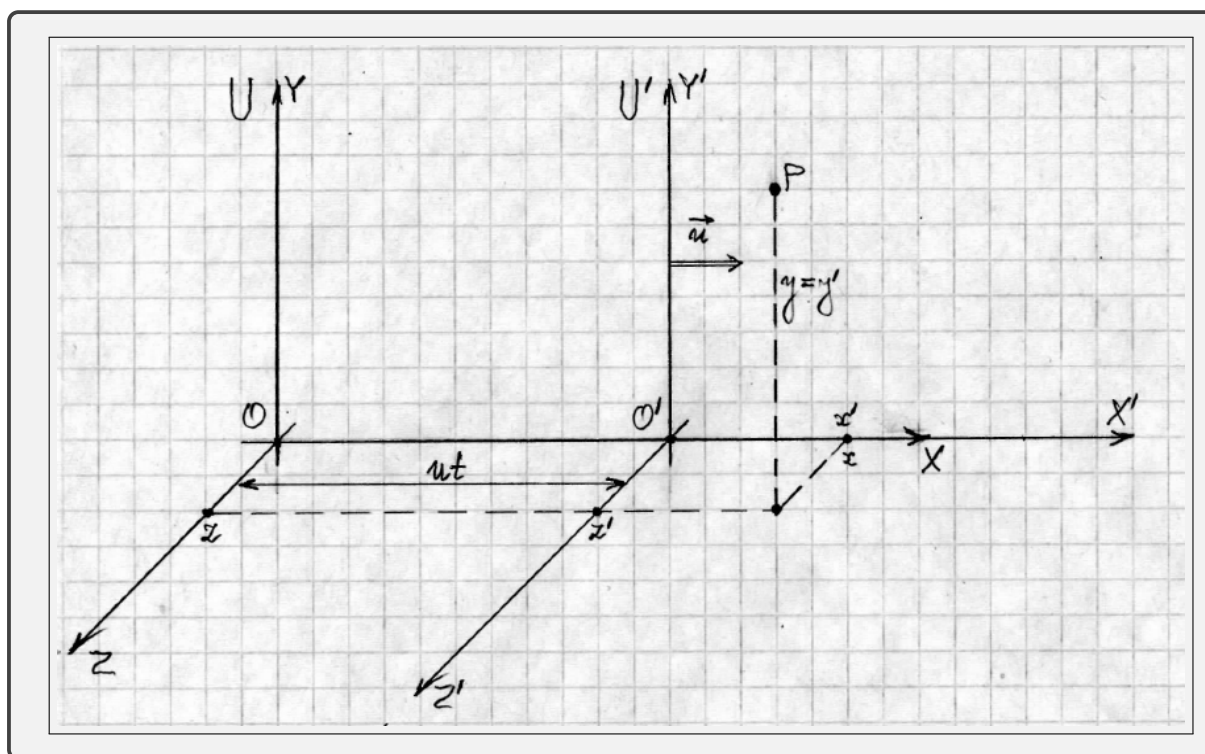
Istnieje nieskończenie wiele i.u.o. — dowolny układ odniesienia, który wykonuje *ruch postępowy prostoliniowy i jednostajny* względem jakiegoś układu inercjalnego, sam jest również układem inercjalnym.

Zasada względności: **wszystkie i.u.o. są równouprawnione**. Inaczej mówiąc: wszelkie zjawiska fizyczne zachodzące w tych samych warunkach muszą mieć taki sam przebieg w dowolnym i.u.o.

Galileusz: we wszystkich i.u.o. jednakowo słuszne są prawa mechaniki.

Einstein: we wszystkich i.u.o. wszystkie prawa przyrody są takie same.

III. PRZEKSZTAŁCENIE (TRANSFORMACJA) GALILEUSZA



Dwa u.o. U oraz U' poruszają się względem siebie. Oznaczamy przez t, x, y, z współrzędne czasoprzestrzenne zdarzeń względem u.o. U , zaś przez t', x', y', z' współrzędne czasoprzestrzenne zdarzeń względem u.o. U' . Zakładamy, że w chwili $t = t' = 0$ osie obu układów współrzędnych pokrywają się oraz że układ U' porusza się względem układu U ruchem

postępowym prostoliniowym ze stałą prędkością $\vec{u}$ równoległą do osi x :

$$\vec{u} = u \vec{i}, \quad (3.1)$$

gdzie $\vec{i}$ jest wersorem osi x , zaś u jest *współrzędną* wektora $\vec{u}$ względem tej osi (wielkość u , jako współrzędna wektora względem pewnej osi, może przyjmować wartości ujemne, dodatnie lub wartość zero).

W fizyce newtonowskiej zakładamy, że czas jest absolutny: po ustaleniu jednakowej jednostki czasu w u.o. U i U' oraz uzgodnieniu początku liczenia czasu w tych układach, chwile zajścia dowolnego zdarzenia są w obu układach identyczne:

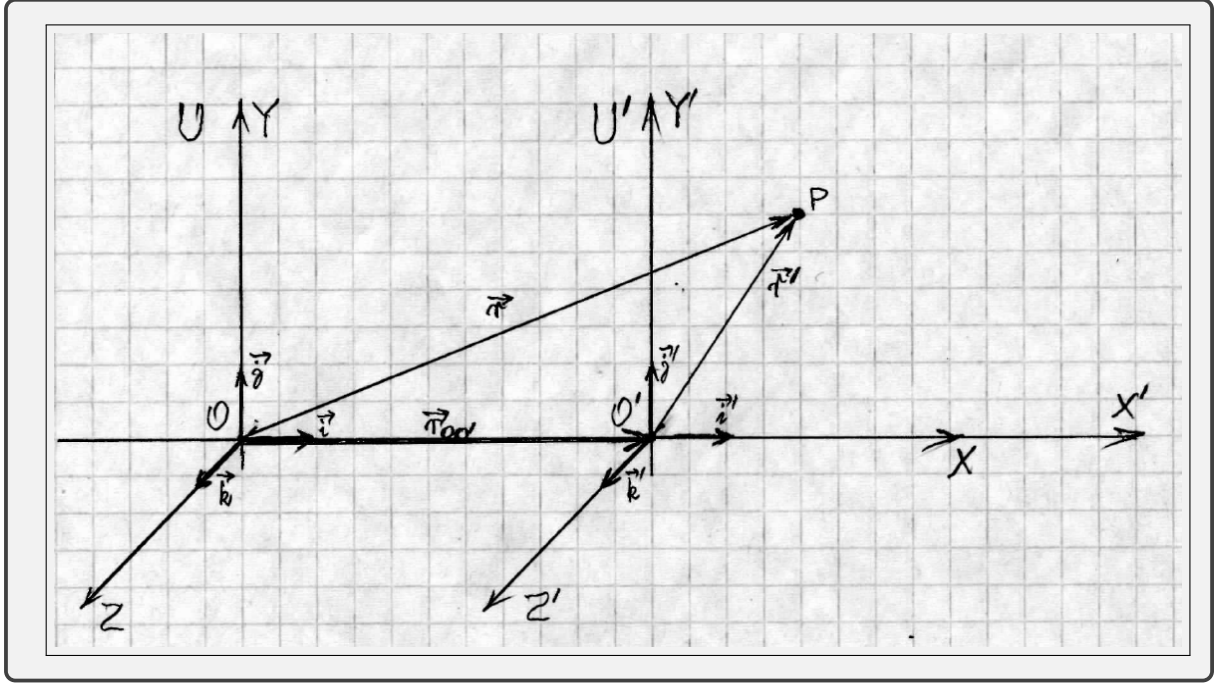
$$t' = t. \quad (3.2)$$

Korzystając z rysunku, łatwo znajdujemy związek pomiędzy współrzędnymi przestrzennymi x', y', z' i x, y, z punktu przestrzeni, w którym zaszło jakieś zdarzenie. Ostatecznie, **przekształcenie (transformacja) Galileusza** łączące współrzędne czasoprzestrzenne dowolnego zdarzenia względem układów U i U' ma postać:

$$\begin{cases} t'(t, x, y, z) = t, \\ x'(t, x, y, z) = x - ut, \\ y'(t, x, y, z) = y, \\ z'(t, x, y, z) = z. \end{cases} \quad (3.3)$$

Przekształcenie *odwrotne* do przekształcenia (3.3) ma postać (przekształcenie to również nazywamy przekształceniem Galileusza):

$$\begin{cases} t(t', x', y', z') = t', \\ x(t', x', y', z') = x' + ut' = x' + ut, \\ y(t', x', y', z') = y', \\ z(t', x', y', z') = z'. \end{cases} \quad (3.4)$$



Wersory obu układów współrzędnych przestrzennych są odpowiednio równymi wektorami:

$$\vec{i}' = \vec{i}, \quad \vec{j}' = \vec{j}, \quad \vec{k}' = \vec{k}. \quad (3.5)$$

Wektory $\vec{r}$, $\vec{r}'$ i $\vec{r}_{OO'}$ mają następujące współrzędne względem bazy $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ związanej z układem odniesienia U :

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = [x, y, z]_U, \quad (3.6a)$$

$$\vec{r}' = x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}' = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k} = [x', y', z']_U, \quad (3.6b)$$

$$\vec{r}_{OO'} = x_{O'}\vec{i} = ut\vec{i} = [ut, 0, 0]_U, \quad (3.6c)$$

gdzie notacja $[w_1, w_2, w_3]_U$ oznacza, że liczby w_1 , w_2 i w_3 są współrzędnymi pewnego wektora obliczonymi względem bazy $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ związanej z układem U . Korzystając ze wzorów (3.6) łatwo pokażemy, że przekształcenie Galileusza (3.4) w zapisie wektorowym wygląda następująco:

$$\vec{r} = \vec{r}_{OO'} + \vec{r}' = \vec{u}t + \vec{r}'. \quad (3.7)$$

A. Transformacja prędkości punktu materialnego

Prędkość (chwilowa) punktu materialnego względem układu U :

$$\begin{aligned} \vec{v} &:= \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)_U = \frac{d}{dt}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \\ &= \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} \end{aligned}$$

$$= v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}, \quad (3.8a)$$

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}. \quad (3.8b)$$

Notacja $(d\vec{r}/dt)_U$ oznacza, że pochodna wektora $\vec{r}$ jest obliczana przy założeniu, że wersory $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ związane z układem U **nie zmieniają się w czasie**. Prędkość punktu materialnego względem układu U' :

$$\begin{aligned} \vec{v}' &:= \left(\frac{d\vec{r}'}{dt} \right)_{U'} = \frac{d}{dt} (x' \vec{i}' + y' \vec{j}' + z' \vec{k}') \\ &= \frac{dx'}{dt} \vec{i}' + \frac{dy'}{dt} \vec{j}' + \frac{dz'}{dt} \vec{k}' \\ &= v'_{x'} \vec{i}' + v'_{y'} \vec{j}' + v'_{z'} \vec{k}' \\ &= v'_{x'} \vec{i} + v'_{y'} \vec{j} + v'_{z'} \vec{k}, \end{aligned} \quad (3.9a)$$

$$v'_{x'} = \frac{dx'}{dt}, \quad v'_{y'} = \frac{dy'}{dt}, \quad v'_{z'} = \frac{dz'}{dt}. \quad (3.9b)$$

Prędkość ruchu postępowego układu U' względem układu U możemy obliczyć jako pochodną:

$$\left(\frac{d\vec{r}_{OO'}}{dt} \right)_U = \left(\frac{d}{dt} (x_{O'} \vec{i}) \right)_U = \frac{dx_{O'}}{dt} \vec{i} = u \vec{i} = \vec{u}. \quad (3.10)$$

Względem bazy $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ wektory $\vec{v}$, $\vec{v}'$ i $\vec{u}$ mają zatem współrzędne:

$$\vec{v} = \left[\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right]_U = [v_x, v_y, v_z]_U, \quad (3.11a)$$

$$\vec{v}' = \left[\frac{dx'}{dt}, \frac{dy'}{dt}, \frac{dz'}{dt} \right]_U = [v'_{x'}, v'_{y'}, v'_{z'}]_U, \quad (3.11b)$$

$$\vec{u} = [u, 0, 0]_U. \quad (3.11c)$$

Z transformacji Galileusza (3.4) wynikają następujące związki pomiędzy zmieniającymi się w czasie współrzędnymi wektorów położenia punktu materialnego poruszającego się względem układów U i U' :

$$x(t) = x'(t) + ut, \quad y(t) = y'(t) \quad z(t) = z'(t). \quad (3.12)$$

Różniczkując powyższe wzory względem czasu t dostajemy

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt} + u, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{dt}, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{dz'}{dt}. \quad (3.13)$$

czyli

$$v_x = v'_{x'} + u, \quad v_y = v'_{y'}, \quad v_z = v'_{z'}. \quad (3.14)$$

Jest to **nierelatywistyczne** (czyli **newtonowskie**) **prawo dodawania prędkości**. Łącząc powyższe wzory z równaniami (3.11) dostajemy wektorowy zapis prawa dodawania prędkości:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u}. \quad (3.15)$$

B. Transformacja przyspieszenia punktu materialnego

Przyspieszenie (chwilowe) punktu materialnego względem układu U :

$$\vec{a} := \left(\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \right)_U = \left(\frac{d\vec{v}}{dt} \right)_U = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}, \quad (3.16a)$$

$$a_x = \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{dv_x}{dt}, \quad a_y = \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{dv_y}{dt}, \quad a_z = \frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{dv_z}{dt}. \quad (3.16b)$$

Przyspieszenie punktu materialnego względem układu U' :

$$\vec{a}' := \left(\frac{d^2 \vec{r}'}{dt^2} \right)_{U'} = \left(\frac{d\vec{v}'}{dt} \right)_{U'} = a'_{x'} \vec{i}' + a'_{y'} \vec{j}' + a'_{z'} \vec{k}' = a'_{x'} \vec{i} + a'_{y'} \vec{j} + a'_{z'} \vec{k}, \quad (3.17a)$$

$$a'_{x'} = \frac{d^2 x'}{dt^2} = \frac{dv'_{x'}}{dt}, \quad a'_{y'} = \frac{d^2 y'}{dt^2} = \frac{dv'_{y'}}{dt}, \quad a'_{z'} = \frac{d^2 z'}{dt^2} = \frac{dv'_{z'}}{dt}. \quad (3.17b)$$

Zauważmy, że przyspieszenie ruchu postępowego układu U' względem układu U jest zerowe:

$$\left(\frac{d^2 \vec{r}_{OO'}}{dt^2} \right)_U = \left(\frac{d}{dt}(u\vec{i}) \right)_U = \frac{du}{dt} \vec{i} = 0 \vec{i} = \vec{0}. \quad (3.18)$$

Różniczkowanie równań (3.13) względem czasu t prowadzi do związków:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d^2 x'}{dt^2}, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{d^2 y'}{dt^2}, \quad \frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{d^2 z'}{dt^2}, \quad (3.19)$$

które w zapisie wektorowym oznaczają, że

$$\vec{a} = \vec{a}', \quad (3.20)$$

czyli **przyspieszenie punktu materialnego jest takie samo we wszystkich i.u.o.**

IV. POSTULATY SZCZEGÓLNEJ TEORII WZGLĘDNOŚCI

A. Uniwersalność prędkości światła w próżni

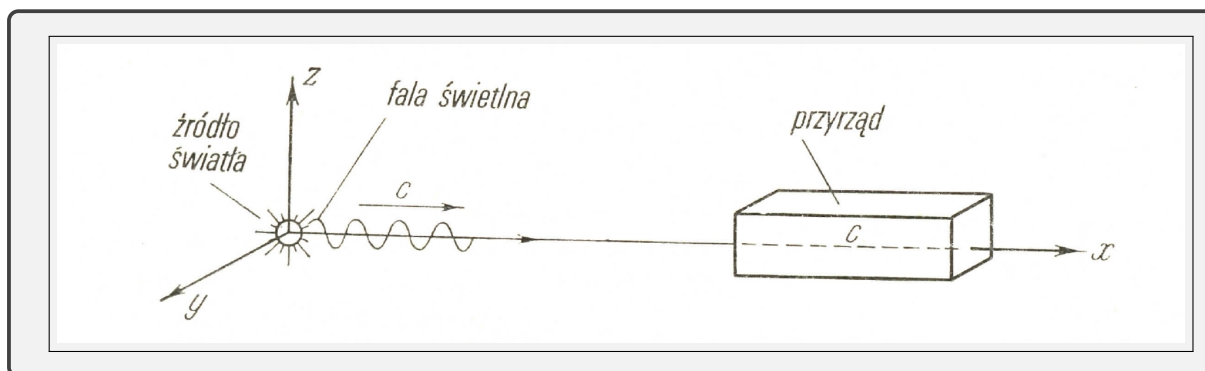
i postulaty szczególnej teorii względności

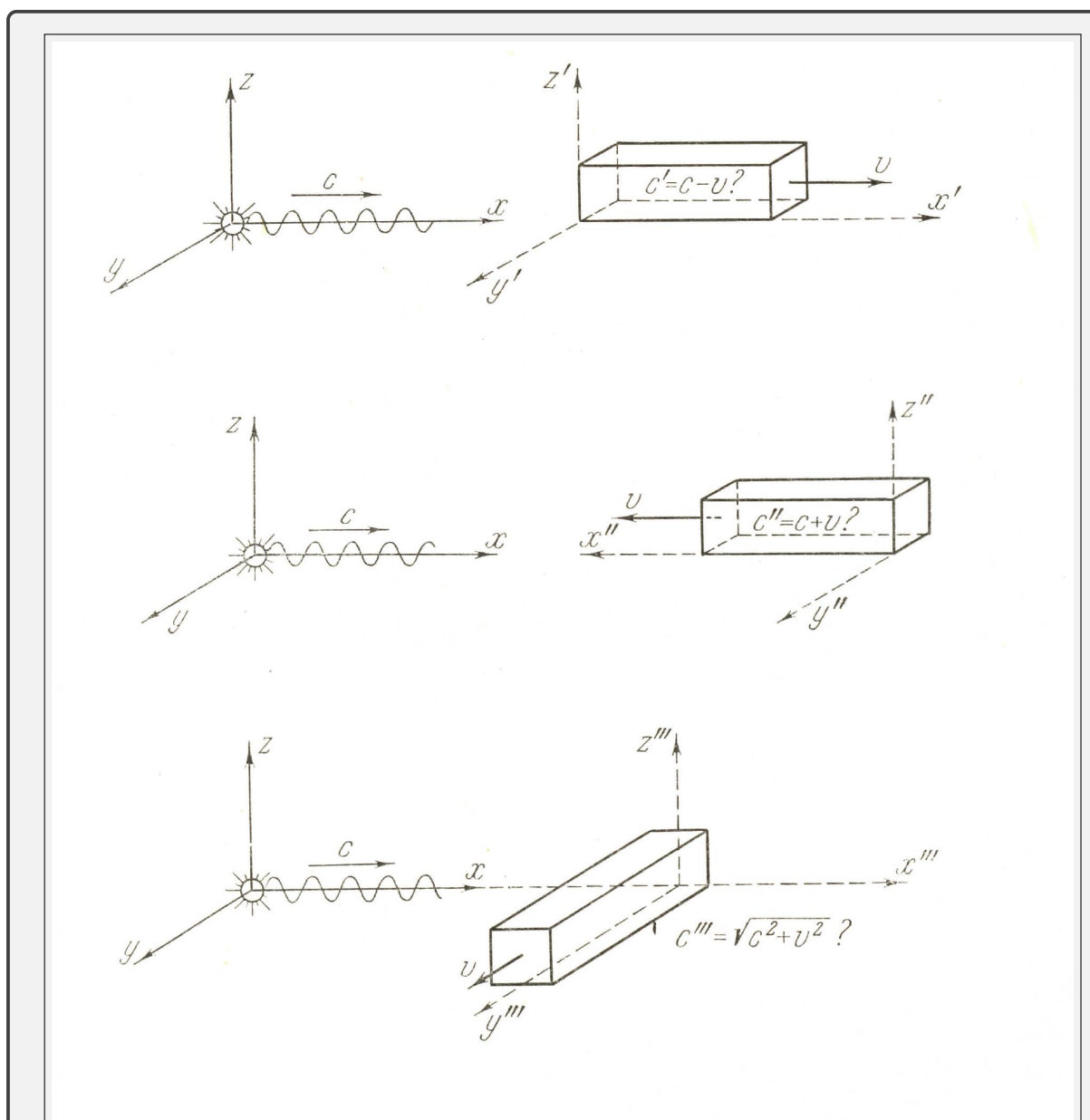
Z równań Maxwella (opublikowanych w 1864) stanowiących podstawę elektrodynamiki klasycznej wynika, że drgania elektromagnetyczne rozchodzą się w próżni we wszystkich

kierunkach z tą samą prędkością. Wynosi ona około $c \cong 300\,000\text{ km/s}$ i równa jest prędkości światła w próżni.

Na przełomie XIX i XX wieku fizykom wydawało się, że musi istnieć wyróżniony układ odniesienia, względem którego prędkość rozchodzenia się światła ma wartość c wynikającą z równań Maxwella; układ ten był nazywany układem *eteru*. Przez eter rozumiano także hipotetyczny ośrodek materialny, w którym miałyby się rozchodzić fale elektromagnetyczne.

Jeśli założymy, że w pewnym i.u.o. fale elektromagnetyczne rozchodzą się zgodnie z równaniami Maxwella, a więc z jednakową prędkością we wszystkich kierunkach, i za pomocą transformacji Galileusza przeniesiemy ruch fal do innego i.u.o. poruszającego się względem układu wyjściowego, to w tym drugim i.u.o. prędkość rozchodzenia się tych fal będzie zależała od kierunku — równania Maxwella w tym i.u.o. nie będą już obowiązywać.





W u.o. U („nieprimowanym”) spoczywa źródło światła. Jeżeli układ ten byłby układem eteru, to prędkość światła w próżni w tym układzie byłaby równa c . Wówczas nierelatywistyczne prawo dodawania prędkości przewiduje, że prędkości światła względem układów odniesienia U' , U'' , U''' , równe odpowiednio c' , c'' i c''' , powinny być różne od c .

Można było przypuszczać, że odpowiednie eksperymenty pozwolą wykryć anizotropię prędkości fal elektromagnetycznych w układach poruszających się względem eteru. Jednak wszystkie doświadczenia, jakie w tym celu wykonano, dały wynik negatywny. Najbardziej znane jest doświadczenie przeprowadzone najpierw przez A. A. Michelsona w 1881 i powtórzone z większą dokładnością przez A. A. Michelsona i E. W. Morleya w 1887.

Powstał zatem dylemat: albo transformacje Galileusza nie są poprawnym przekształceniem łączącym współrzędne czasoprzestrzenne w różnych i.u.o., albo równania Maxwella nie są słuszne we wszystkich i.u.o. Dylemat ten rozstrzygnął w 1905 Albert Einstein na korzyść równań Maxwella, formułując swoją szczególną teorię względności (STW).

Szczególną teorię względności można oprzeć na dwóch postulatach:

1. **zasada względności** — identyczne eksperymenty wykonywane w różnych i.u.o. dają identyczne wyniki;
2. **zasada niezmienniczości prędkości światła** — we wszystkich i.u.o. wartość liczbową prędkości światła w próżni jest jednakowa i równa

$$c = 299\,792\,458 \text{ m/s} \quad (\text{dokładnie}), \quad (4.1)$$

niezależnie od ruchu źródła światła względem obserwatora, który spoczywa w i.u.o.

B. Definicja sekundy i metra w układzie SI

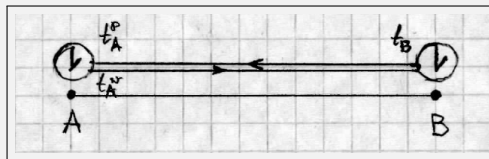
Do 1983 roku prędkość światła była wielkością mierzoną. Starano się ją zmierzyć jak najdokładniej, używając metra jako ustalonej jednostki długości. W 1983 roku podjęto decyzję o odwróceniu tej relacji: uznano, że prędkość światła w próżni jest fundamentalną stałą fizyczną, która się nie zmienia. Zamiast więc mierzyć prędkość światła używając metra, postanowiono zdefiniować metr za pomocą prędkości światła.

Dlaczego to zrobiono? Stabilność: fizyczne wzorce metra, np. platynowo-irydowy pręt znajdujący się w Sèvres pod Paryżem, mogą ulegać minimalnym zmianom, np. odkształcać się pod wpływem własnego ciężaru lub zmian temperatury; prędkość światła jest zawsze taka sama. Precyzja: czas potrafimy mierzyć bardzo precyzyjnie za pomocą zegarów atomowych. Łącząc precyzyjny pomiar czasu ze stałą prędkością światła, otrzymujemy niezwykle stabilną definicję jednostki długości.

Definicja sekundy w układzie SI: sekunda jest to czas równy 9 192 631 770 okresom promieniowania odpowiadającego przejściu między dwoma poziomami struktury nadsubtelnej stanu podstawowego atomu cezu 133.

Definicja metra w układzie SI: metr to długość drogi, jaką przebywa światło w próżni w czasie $1/299\,792\,458$ sekundy.

C. Synchronizacja zegarów za pomocą sygnałów świetlnych



Rozważmy jeden ustalony i.u.o. i dwa identycznie skonstruowane zegary spoczywające względem tego układu, znajdujące się w punktach A i B. Zgodnie z drugim postulatem STW wartość c prędkości rozchodzenia się sygnałów świetlnych (fotonów) jest w każdym punkcie przestrzeni taka sama i nie zależy również od kierunku, w którym porusza się sygnał. W szczególności zatem nie zależy od tego, czy sygnał świetlny porusza się od zegara A w stronę zegara B, czy też w kierunku przeciwnym.

W chwili t_A^w (odczytanej na zegarze znajdującym się w punkcie A) wysyłamy z punktu A sygnał świetlny, sygnał ten po dotarciu do punktu B jest natychmiast odbijany i powraca do punktu A w chwili t_A^p (odczytanej również na zegarze w punkcie A); rejestrując chwile t_A^w i t_A^p możemy **zmierzyć** wartość c prędkości rozchodzenia się sygnałów świetlnych:

$$c = \frac{2l}{t_A^p - t_A^w}, \quad (4.2)$$

gdzie l jest odległością punktów A i B.

Za pomocą sygnału świetlnego możemy teraz zsynchronizować zegar B z zegarem A. Dla sygnału wysłanego z zegara A w chwili t_A^w , ustawiamy zegar B tak, by w chwili odbicia sygnału wskazywał on czas

$$t_B = t_A^w + \frac{l}{c}. \quad (4.3)$$

Zgodnie z (4.2), sygnał powraca do zegara A w chwili

$$t_A^p = t_A^w + \frac{2l}{c}. \quad (4.4)$$

Dwa dowolne zegary spoczywające względem siebie w punktach A i B są zatem zsynchronizowane, jeśli dla sygnału wysłanego w dowolnej chwili t_A^w spełnione jest równanie, będące konsekwencją równań (4.3) i (4.4):

$$t_B - t_A^w = t_A^p - t_B \implies t_B = \frac{1}{2}(t_A^w + t_A^p). \quad (4.5)$$

Opisana powyżej procedura pomiaru prędkości światła dotyczy tzw. dwukierunkowej prędkości światła, tzn. prędkości zmierzonej dla sygnału poruszającego się po drodze zamkniętej od A przez B i z powrotem do A. Jednokierunkowa prędkość światła to prędkość, z jaką światło porusza się z punktu A do punktu B. Jednokierunkowej prędkości światła nigdy nie zmierzono i — zgodnie z obecną wiedzą — prawdopodobnie nigdy nie da się tego zrobić.

V. WZGLĘDNOŚĆ JEDNOCZESNOŚCI/RÓWNOCZESNOŚCI ZDARZEŃ

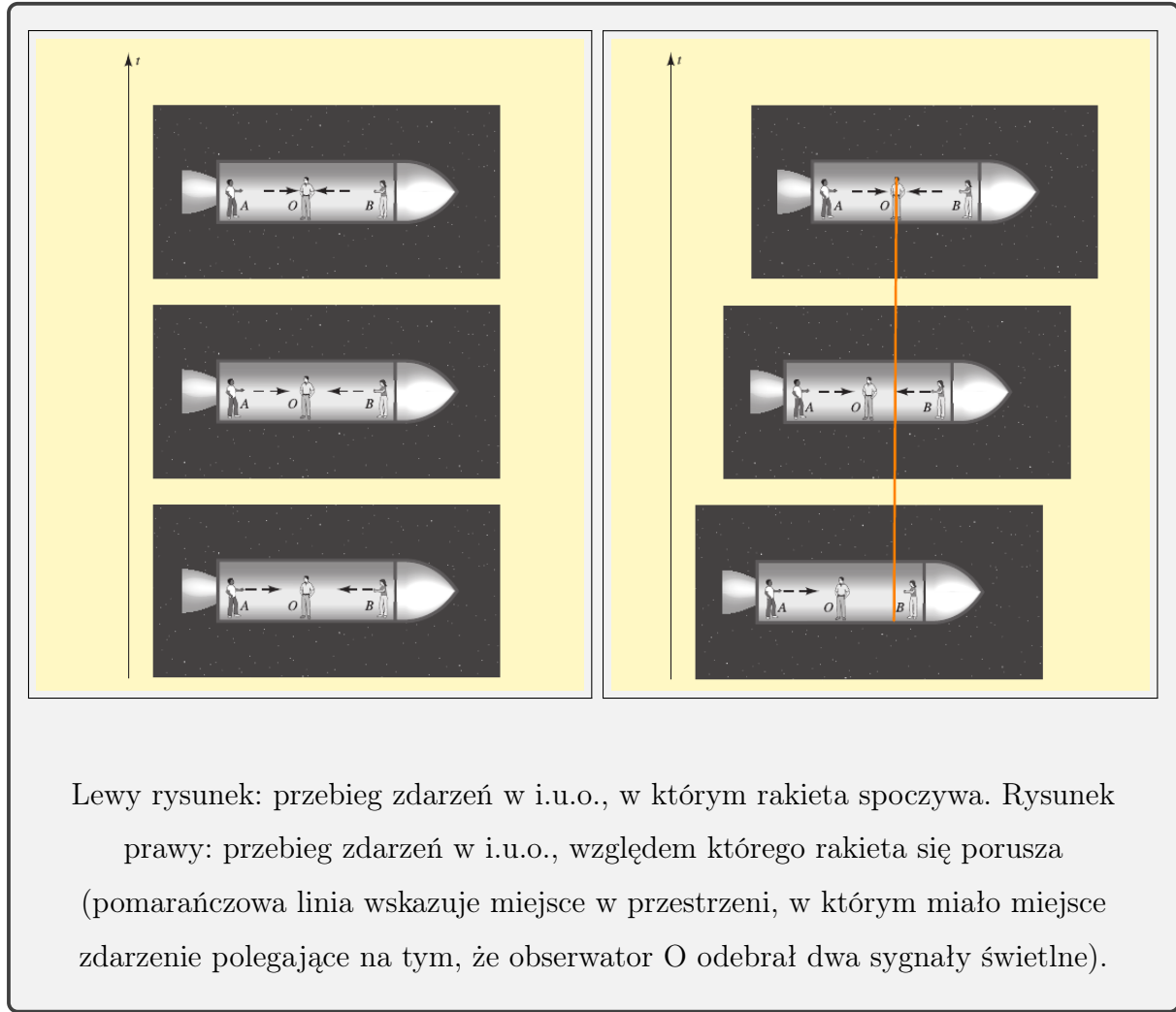
Trzej obserwatorzy A, B i O lecą rakieta, spoczywając względem niej; O znajduje się w połowie odległości między A i B. A i B wysyłają sygnały świetlne skierowane do O, **który odbiera je równocześnie**.

Obserwator w spoczynku względem rakiety: *A i B znajdują się w jednakowej odległości od O, wobec tego światło potrzebuje tyle samo czasu, by pokonać drogę z A do O, jak z B do O: skoro sygnały dotarły do O równocześnie, to **musiały zostać wysłane równocześnie**.*

Obserwator w spoczynku w układzie, względem którego rakietę się porusza: *sygnały dotarły do O równocześnie; wcześniej, gdy sygnały były jeszcze w ruchu, B znajdował się bliżej niż A miejsca, w którym znalazł się O w chwili rejestracji sygnałów: ponieważ oba sygnały rozchodzą się z prędkością światła c , to **sygnał z A musiał zostać wysłany wcześniej niż z B**, gdyż miał do pokonania dłuższą drogę, a dotarł do O w tym samym momencie co sygnał wysłany z B.*

Powyższe rozumowanie dowodzi, że **pojęcie równoczesności/jednoczesności jest względne**, zatem w różnych i.u.o. odstęp czasowy pomiędzy tymi samymi zdarzeniami jest na ogół różny.

Jak zmierzyć długość pręta poruszającego się względem u.o., nie zatrzymując go? Długość pręta poruszającego się np. wzdłuż ustalonej osi układu współrzędnych, określamy jako różnicę współrzędnych jego początku i końca, **zmierzonych jednocześnie** — można przypuszczać, że z powodu względności jednoczesności długość tego samego pręta jest różna w różnych układach odniesienia.

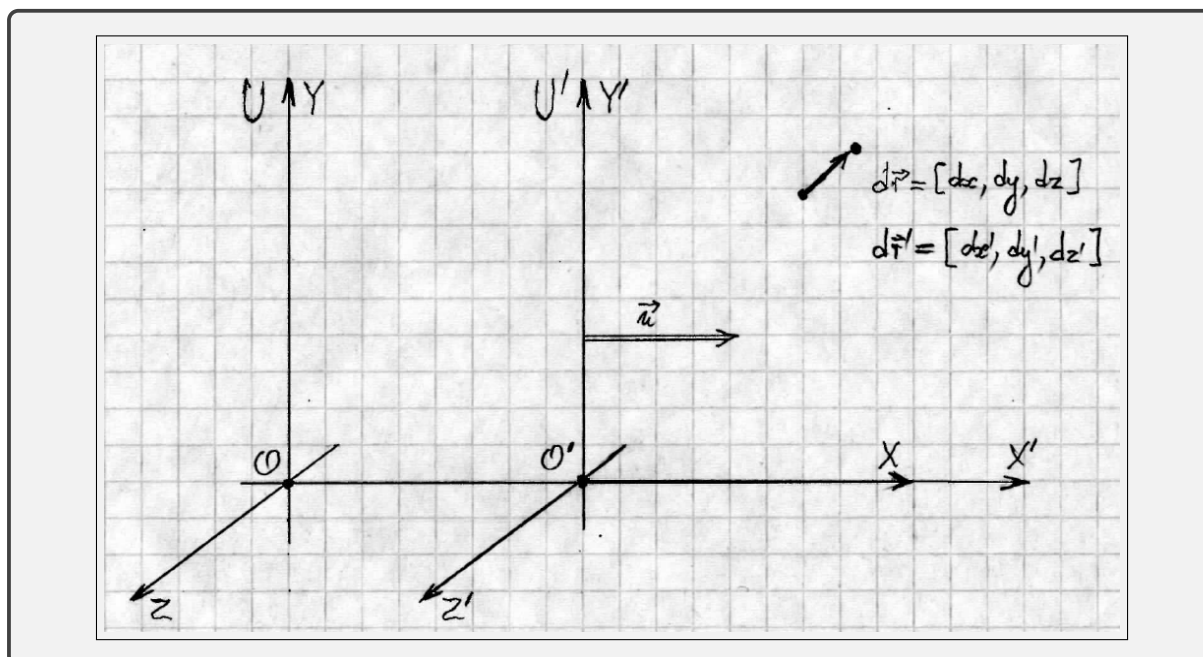


VI. PRZEKSZTAŁCENIE (TRANSFORMACJA) LORENTZA

Pusta przestrzeń jest jednorodna i izotropowa, czas jest jednorodny, dlatego przekształcenia wiążące współrzędne czasoprzestrzenne w dwóch różnych i.u.o. powinny być funkcjami liniowymi współrzędnych czasoprzestrzennych:

$$\begin{cases} t' = f_1(t, x, y, z) = m_{11}t + m_{12}x + m_{13}y + m_{14}z + m_{15}, \\ x' = f_2(t, x, y, z) = m_{21}t + m_{22}x + m_{23}y + m_{24}z + m_{25}, \\ y' = f_3(t, x, y, z) = m_{31}t + m_{32}x + m_{33}y + m_{34}z + m_{35}, \\ z' = f_4(t, x, y, z) = m_{41}t + m_{42}x + m_{43}y + m_{44}z + m_{45}, \end{cases} \quad (6.1)$$

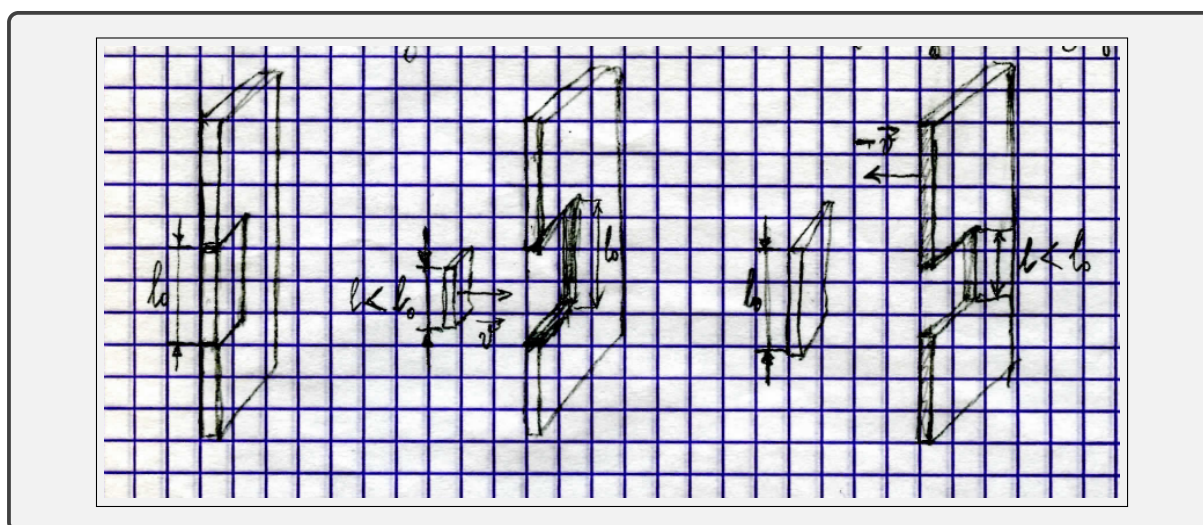
gdzie współczynniki m_{ij} mogą zależeć wyłącznie od prędkości względnej obu układów.



Zakładamy, że w chwili $t = t' = 0$ osie obu układów współrzędnych przestrzennych pokrywają się oraz że układ U' porusza się względem układu U ruchem postępowym prostoliniowym ze stałą prędkością $\vec{u}$ równoległą do osi x . Warunek początkowy oznacza, że zdarzenie, które w u.o. U ma współrzędne $t = 0$ i $x = y = z = 0$, powinno mieć w układzie U' współrzędne $t' = 0$ i $x' = y' = z' = 0$; uwzględnienie tego w równaniach (6.1) prowadzi do

$$m_{15} = m_{25} = m_{35} = m_{45} = 0. \quad (6.2)$$

Posługując się zasadą względności można dalej wykazać, że wymiary ciał poprzeczne w stosunku do kierunku ruchu względnego dwóch i.u.o., nie zmieniają się przy przechodzeniu od jednego do drugiego i.u.o. Wykazuje to eksperyment myślowy zilustrowany poniżej.



Uwzględniając identyczność mierzonych w obu układach rozmiarów ciał w kierunkach

poprzecznych do kierunku ruchu względnego układów, można przewidywać, że szukane przekształcenie ma ostatecznie postać:

$$t' = Mx + Nt, \quad (6.3a)$$

$$x' = Ax + Bt, \quad (6.3b)$$

$$y' = y, \quad z' = z, \quad (6.3c)$$

gdzie współczynniki A, B, M, N mogą zależeć tylko od prędkości względnej $\vec{u}$ układów.

- Rozważmy ruch punktu materialnego, który względem układu U w czasie dt przemieścił się o wektor $[dx, dy, dz]_U$, ten sam punkt materialny względem układu U' przemieścił się w czasie dt' o wektor $[dx', dy', dz']_{U'}$. Na podstawie równań (6.3) możemy napisać

$$dt' = Mdx + Ndt, \quad dx' = Adx + Bdt, \quad dy' = dy, \quad dz' = dz. \quad (6.4)$$

Stąd

$$v'_{x'} = \frac{dx'}{dt'} = \frac{Adx + Bdt}{Mdx + Ndt} = \frac{A \frac{dx}{dt} + B}{M \frac{dx}{dt} + N} = \frac{Av_x + B}{Mv_x + N}. \quad (6.5a)$$

Podobnie

$$v'_{y'} = \frac{v_y}{Mv_x + N}, \quad v'_{z'} = \frac{v_z}{Mv_x + N}. \quad (6.5b)$$

- Niech punkt materialny spoczywa względem układu U' , wówczas $v'_{x'} = v'_{y'} = v'_{z'} = 0$ oraz $v_x = u$ (i $v_y = v_z = 0$), stąd

$$0 = \frac{Au + B}{Mu + N} \implies B = -Au. \quad (6.6)$$

- Rozważmy teraz punkt materialny spoczywający względem układu U , wówczas $v_x = v_y = v_z = 0$ oraz $v'_{x'} = -u$ (i $v'_{y'} = v'_{z'} = 0$), stąd

$$-u = \frac{B}{N} \implies N = -\frac{B}{u} = A. \quad (6.7)$$

- Podstawiamy (6.6) i (6.7) do równań (6.5):

$$v'_{x'} = \frac{A(v_x - u)}{Mv_x + A}, \quad v'_{y'} = \frac{v_y}{Mv_x + A}, \quad v'_{z'} = \frac{v_z}{Mv_x + A}. \quad (6.8)$$

- Rozważmy sygnał świetlny (foton) poruszający się w dowolnym kierunku względem układu U' , wówczas na ogół żadna ze współrzędnych wektora prędkości $\vec{v}'$ nie będzie równa zeru, ale

$$|\vec{v}'| = \sqrt{(v'_{x'})^2 + (v'_{y'})^2 + (v'_{z'})^2} = c. \quad (6.9)$$

Korzystając z (6.8) i (6.9) obliczamy:

$$c^2 = (v'_{x'})^2 + (v'_{y'})^2 + (v'_{z'})^2 = \frac{A^2(v_x - u)^2 + v_y^2 + v_z^2}{(Mv_x + A)^2}. \quad (6.10)$$

Ponieważ $c^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$, stąd $v_y^2 + v_z^2 = c^2 - v_x^2$, co podstawiamy do równania powyżej. Po przekształceniach dostajemy:

$$(c^2 M^2 - A^2 + 1) v_x^2 + 2(c^2 M + Au)A v_x + A^2(c^2 - u^2) - c^2 = 0. \quad (6.11)$$

Równanie (6.11) musi być spełnione dla *każdej* wartości v_x z przedziału $-c \leq v_x \leq c$. Jest to możliwe tylko wtedy, gdy

$$c^2 M^2 - A^2 + 1 = 0, \quad (6.12a)$$

$$2(c^2 M + Au)A = 0, \quad (6.12b)$$

$$A^2(c^2 - u^2) - c^2 = 0. \quad (6.12c)$$

Układ równań (6.12) rozwiązujemy ze względu na A i M :

$$A = \varepsilon \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \quad M = -\frac{u}{c^2} A = -\varepsilon \frac{u}{c^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \quad \text{gdzie } \varepsilon = \pm 1. \quad (6.13)$$

- Należy wybrać znak $+$ (czyli $\varepsilon = +1$), bo gdy $u = 0$ musi być $v'_{x'} = v_x$, $v'_{y'} = v_y$, $v'_{z'} = v_z$.

Ostatecznie współczynniki A , B , M i N mają postać:

$$A = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \quad (6.14a)$$

$$B = -\frac{u}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \quad (6.14b)$$

$$M = -\frac{u}{c^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \quad (6.14c)$$

$$N = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}. \quad (6.14d)$$

Podstawiając (6.14) do równań (6.8), **relatywistyczne prawo dodawania prędkości** przybiera postać:

$$\boxed{v'_{x'} = \frac{v_x - u}{1 - \frac{uv_x}{c^2}}, \quad v'_{y'} = \frac{v_y \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{1 - \frac{uv_x}{c^2}}, \quad v'_{z'} = \frac{v_z \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{1 - \frac{uv_x}{c^2}}.} \quad (6.15)$$

Z zasady względności wynika, że wzory wyrażające współrzędne wektora prędkości względem U przez współrzędne wektora prędkości względem U' otrzymamy z powyższych wzorów zastępując u przez $-u$ oraz zamieniając równocześnie wielkości primowane na nieprimowane i na odwrót:

$$\boxed{v_x = \frac{v'_{x'} + u}{1 + \frac{uv'_{x'}}{c^2}}, \quad v_y = \frac{v'_{y'} \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{1 + \frac{uv'_{x'}}{c^2}}, \quad v_z = \frac{v'_{z'} \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{1 + \frac{uv'_{x'}}{c^2}}.} \quad (6.16)$$

Oczywiście wzory (6.16) można również otrzymać rozwiązując układ równań (6.15) ze względu na v_x , v_y i v_z .

Podstawiając (6.14) do równań (6.3), otrzymujemy ostateczną postać przekształcenia łączącego w współrzędne czasoprzestrzenne w dwóch różnych i.u.o.:

$$\boxed{t' = \frac{t - \frac{ux}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \quad x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z.} \quad (6.17)$$

Przekształcenie to nazywamy *przekształceniem* (lub *transformacją*) *Lorentza*.

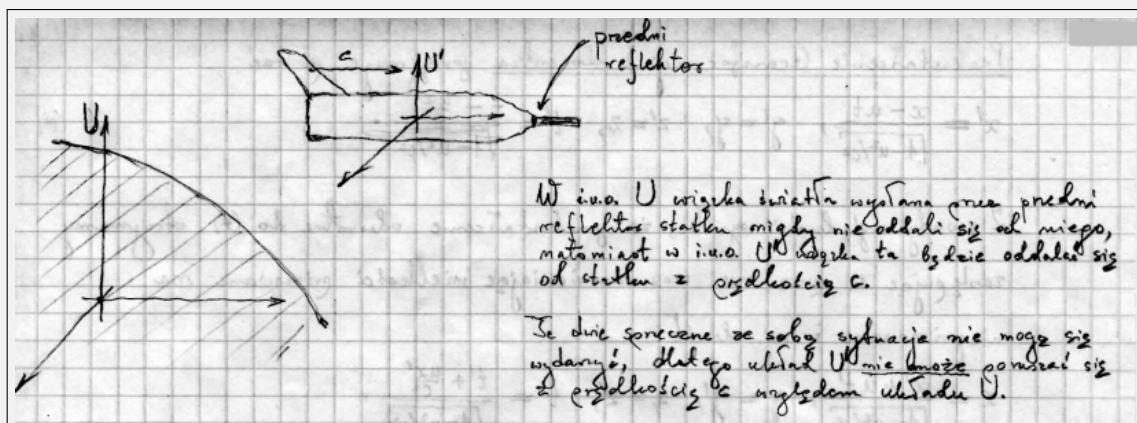
Odwołując się ponownie do zasady względności możemy zauważyć, że przekształcenie *odwrotne* do (6.17) otrzymamy zastępując u przez $-u$ oraz zamieniając równocześnie wielkości primowane na nieprimowane i na odwrót:

$$\boxed{t = \frac{t' + \frac{ux'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \quad x = \frac{x' + ut'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \quad y = y', \quad z = z'.} \quad (6.18)$$

Wzory te również nazywamy *przekształceniem* (lub *transformacją*) *Lorentza*. Można je otrzymać rozwiązując układ równań (6.17) ze względu na t, x, y, z .

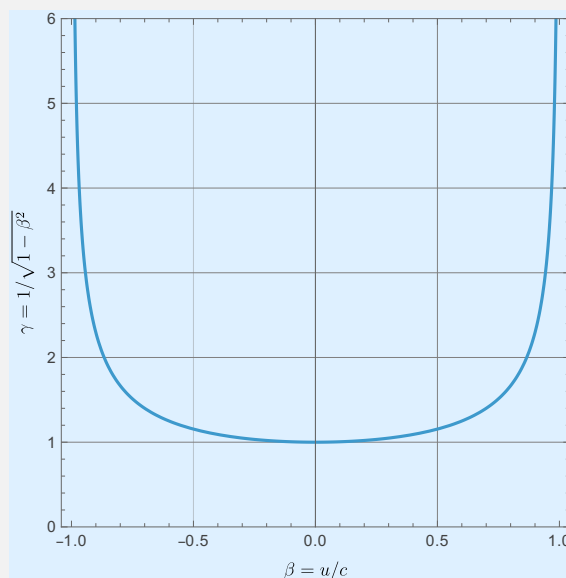
Przekształcenie Lorentza i relatywistyczne prawo dodawania prędkości zapewniają, że jeżeli ciało porusza się jednostajnie i prostoliniowo względem pewnego i.u.o., to porusza się ono również jednostajnie i prostoliniowo względem każdego innego i.u.o.

Z zasady niezmienniczości prędkości światła wynika, że *żaden i.u.o. nie może się poruszać z prędkością c względem innego i.u.o.* Dowodzi tego rozumowanie przedstawione na rysunku poniżej.



Żaden i.u.o. nie może się poruszać z prędkością c względem innego i.u.o.

Granice nierelatywistyczną transformacji Lorentza (6.17) otrzymujemy obliczając granice prawych stron równań (6.17), gdy $c \rightarrow \infty$. Wówczas $\sqrt{1 - u^2/c^2} \rightarrow 1$, $ux/c^2 \rightarrow 0$ i z równań (6.17) otrzymujemy równania (3.3) wyrażające transformację Galileusza.



Wprowadźmy czynnik Lorentza

$$\gamma := \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad (6.19)$$

zauważmy, że $\gamma \geq 1$ i $\gamma \rightarrow \infty$, gdy $u \rightarrow \pm c$.

Transformacje Lorentza można krócej zapisać tak:

$$t' = \gamma \left(t - \frac{ux}{c^2} \right), \quad x' = \gamma(x - ut), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad (6.20a)$$

$$t = \gamma \left(t' + \frac{ux'}{c^2} \right), \quad x = \gamma(x' + ut'), \quad y = y', \quad z = z'. \quad (6.20b)$$

W powyższych wzorach u jest współrzędną (wzdłuż osi x) wektora prędkości względnej układu U' względem układu U , dlatego

$$-c < u < +c. \quad (6.21)$$

Ujemne wartości u ($u < 0$) oznaczają, że układ U' porusza się względem układu U w kierunku przeciwnym do zwrotu osi x .

Rozważmy raz jeszcze relatywistyczne prawo dodawania prędkości. Punkt materialny porusza się względem i.u.o. U z prędkością

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k} = [v_x, v_y, v_z]_U,$$

względem i.u.o. U' ten sam punkt materialny ma prędkość

$$\vec{v}' = v'_{x'} \vec{i}' + v'_{y'} \vec{j}' + v'_{z'} \vec{k}' = [v'_{x'}, v'_{y'}, v'_{z'}]_{U'}.$$

Wówczas

$$v'_{x'} = \frac{v_x - u}{1 - \frac{uv_x}{c^2}}, \quad v'_{y'} = \frac{v_y}{\gamma \left(1 - \frac{uv_x}{c^2} \right)}, \quad v'_{z'} = \frac{v_z}{\gamma \left(1 - \frac{uv_x}{c^2} \right)}. \quad (6.22)$$

Niech $|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$ i $|\vec{v}'| = \sqrt{(v'_{x'})^2 + (v'_{y'})^2 + (v'_{z'})^2}$. Sposób, w jaki wyprowadziliśmy powyżej relatywistyczne prawo dodawania prędkości (6.22) zapewnia, że

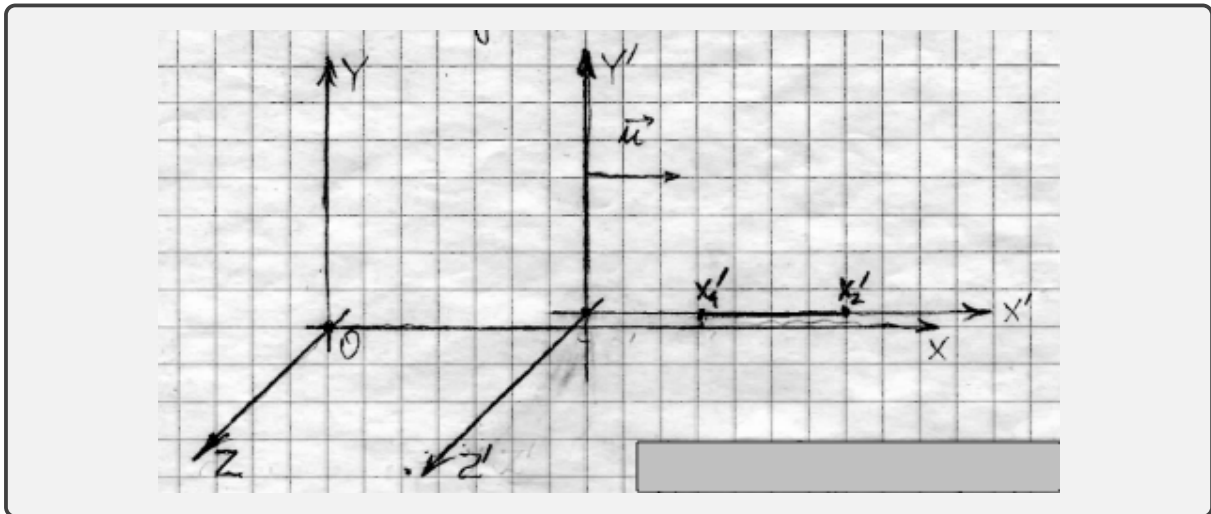
- jeśli $|\vec{v}| = c$ w i.u.o. U , to $|\vec{v}'| = c$ w każdym innym i.u.o. U' .

Korzystając z równań (6.22) można również pokazać, że

- jeśli $|\vec{v}| < c$ w i.u.o. U , to $|\vec{v}'| < c$ w każdym innym i.u.o. U' .

Oznacza to, że prędkość światła w próżni jest maksymalną prędkością w przyrodzie.

VII. KONTRAKCJA (SKRÓCENIE) LORENTZA



Pręt spoczywa w układzie U' , np. leży wzdłuż osi $O'X'$ tego układu. Długość pręta w tym układzie wynosi

$$l_0 = x'_2 - x'_1. \quad (7.1)$$

Jaką długość tego pręta zarejestruje (zmierzy) obserwator związany z układem U ?

Pomiar długości poruszającego się pręta polega na jednoczesnym pomiarze współrzędnych x_1 i x_2 obu końców pręta. Długością pręta jest różnica tych współrzędnych:

$$l = x_2 - x_1, \quad \text{o ile } t_1 = t_2. \quad (7.2)$$

Korzystamy z transformacji Lorentza (6.20a), by wyrazić współrzędne x'_1 i x'_2 przez współrzędne czasoprzestrzenne związane z układem U :

$$l_0 = x'_2 - x'_1 \quad (7.3a)$$

$$= \gamma(x_2 - ut_2) - \gamma(x_1 - ut_1) \quad (7.3b)$$

$$= \gamma(x_2 - x_1) - u\gamma(t_2 - t_1) \quad (7.3c)$$

$$= \gamma(x_2 - x_1) \quad (\text{bo } t_1 = t_2) \quad (7.3d)$$

$$= \gamma l, \quad (7.3e)$$

zatem

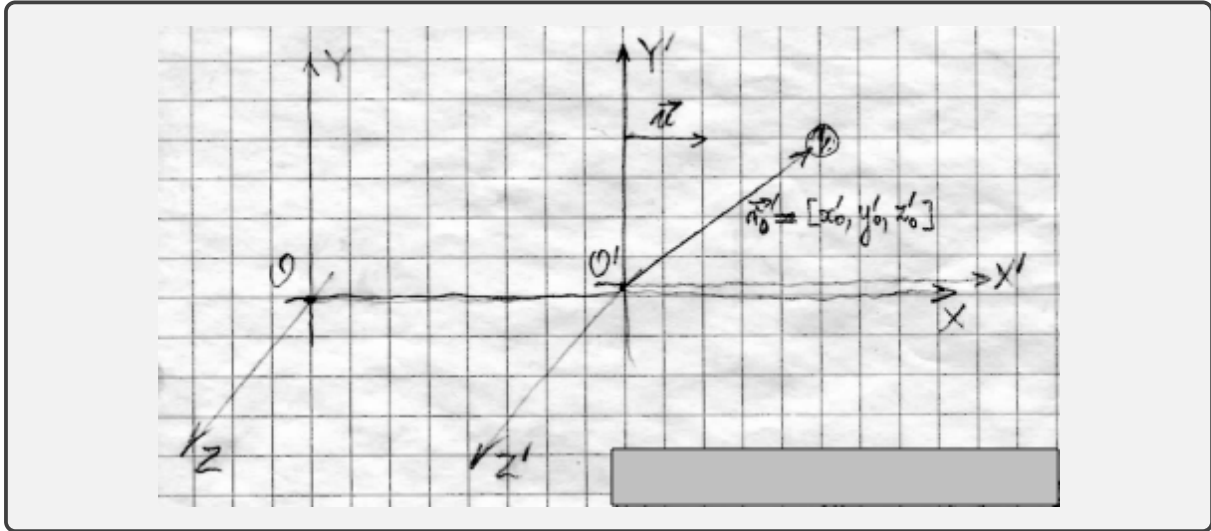
$$l = \frac{1}{\gamma} l_0. \quad (7.4)$$

Ponieważ $\gamma \geq 1$, mamy

$$l \leq l_0 \text{ — } \underline{\text{kontrakcja (skrócenie) Lorentza.}} \quad (7.5)$$

Długość jakiegoś ciała mierzona w układzie odniesienia, w którym ciało to spoczywa, nazywa się *długością własną* ciała.

VIII. DYŁATACJA (WYDŁUŻENIE) CZASU



Rozważmy dwa zdarzenia zachodzące w ustalonym punkcie przestrzeni względem układu U' , niech współrzędne przestrzenne tego punktu wynoszą x'_0, y'_0, z'_0 , zaś odstęp czasu pomiędzy tymi zdarzeniami mierzony przez zegar spoczywający względem U' w punkcie x'_0, y'_0, z'_0 wynosi

$$\tau_0 = t'_2 - t'_1. \quad (8.1)$$

Jaki odstęp czasu pomiędzy tymi zdarzeniami zmierzy obserwator związany z i.u.o. U ?

Korzystamy z transformacji Lorentza (6.20b), by wyrazić chwile czasu t_1 i t_2 przez współrzędne czasoprzestrzenne związane z układem U' :

$$\tau = t_2 - t_1 \quad (8.2a)$$

$$= \gamma \left(t'_2 + \frac{ux'_2}{c^2} \right) - \gamma \left(t'_1 + \frac{ux'_1}{c^2} \right) \quad (8.2b)$$

$$= \gamma(t'_2 - t'_1) + \frac{u}{c^2} \gamma(x'_2 - x'_1) \quad (8.2c)$$

$$= \gamma(t'_2 - t'_1) \quad (\text{bo } x'_2 = x'_1 = x'_0) \quad (8.2d)$$

$$= \gamma\tau_0. \quad (8.2e)$$

Ponieważ $\gamma \geq 1$, mamy

$$\tau \geq \tau_0 \text{ — dylatacja (wydłużenie) czasu.} \quad (8.3)$$

Odstęp czasu między dwoma zdarzeniami ma najmniejszą wartość w i.u.o., w którym zdarzenia te zachodzą w tym samym punkcie przestrzeni.

Czas mierzony w u.o. związanym z danym obiektem nazywamy *czasem własnym* tego obiektu.

Związki przyczynowo-skutkowe pomiędzy zdarzeniami

Często obserwujemy zdarzenia będące ze sobą w związku przyczynowo-skutkowym. Na przykład, aby kula uderzyła w tarczę (skutek), konieczne jest, aby przedtem nastąpił wystrzał z broni palnej (przyczyna).

Teoria względności zachowuje kolejność czasową przyczyny i skutku.

Rozważmy dwa zdarzenia, których współrzędnymi przestrzennymi względem pewnego i.u.o. są odpowiednio x_1, y_1, z_1 oraz x_2, y_2, z_2 , zachodzą one w chwilach odpowiednio t_1 i t_2 . Oznaczmy

$$l_{12} := \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}, \quad t_{12} := t_2 - t_1. \quad (8.4)$$

Zdarzenia mogą pozostawać ze sobą w związku przyczynowo-skutkowym tylko wtedy, gdy

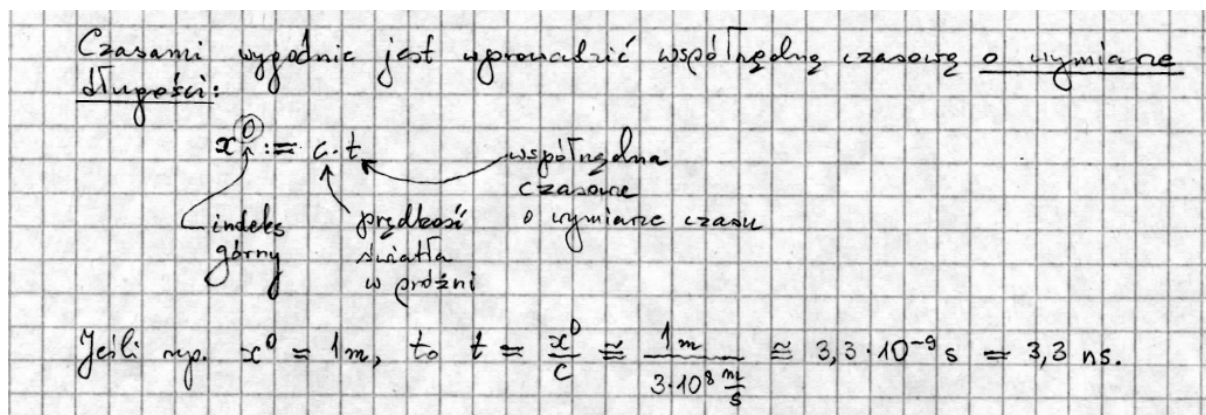
$$l_{12} \leq c |t_{12}|. \quad (8.5)$$

Jest tak dlatego, bo żaden sygnał w przyrodzie nie może rozchodzić się z prędkością większą niż c .

Założmy dalej, że zdarzenie 2 jest skutkiem zdarzenia 1, czyli oprócz spełnienia warunku (8.5) spełniony jest również warunek $t_2 > t_1$. Można wówczas pokazać, że w każdym innym i.u.o. $t'_2 > t'_1$. Prawdziwa jest zatem implikacja

$$l_{12} \leq c |t_{12}| \quad \text{ i } \quad t_2 > t_1 \quad \implies \quad t'_2 > t'_1. \quad (8.6)$$

IX. DIAGRAMY CZASOPRZESTRZENNE

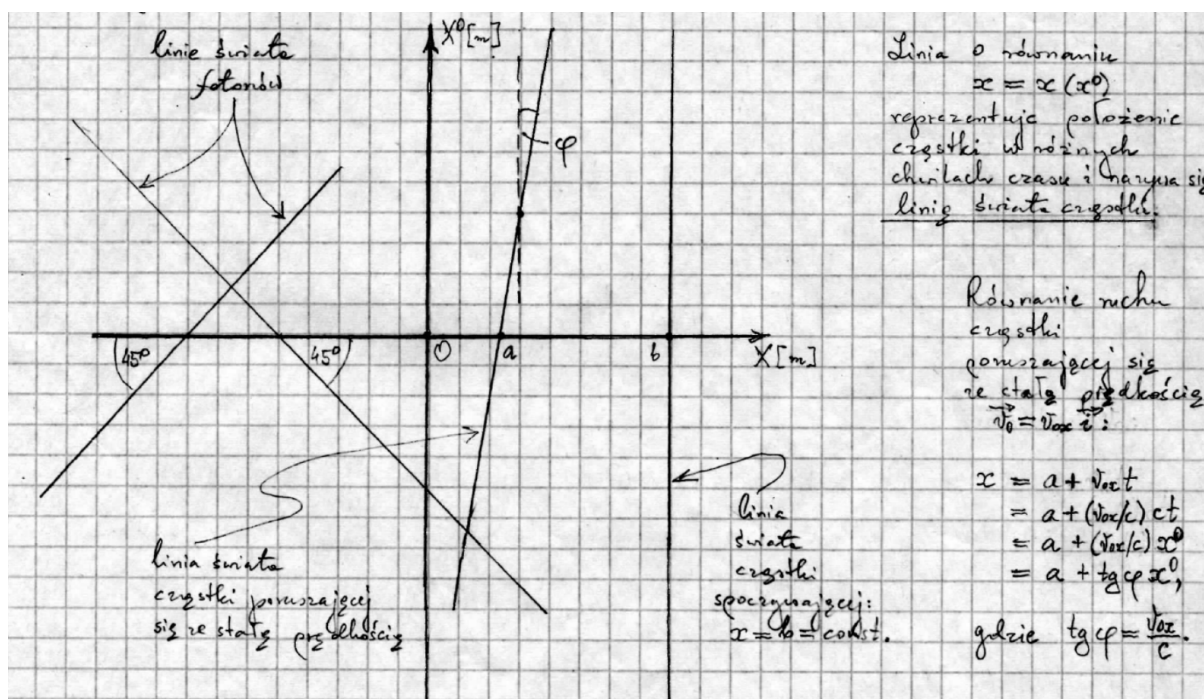


W ustalonym i.u.o. każdemu zdarzeniu możemy zatem przyporządkować *cztery współrzędne czasoprzestrzenne o wymiarze długości*:

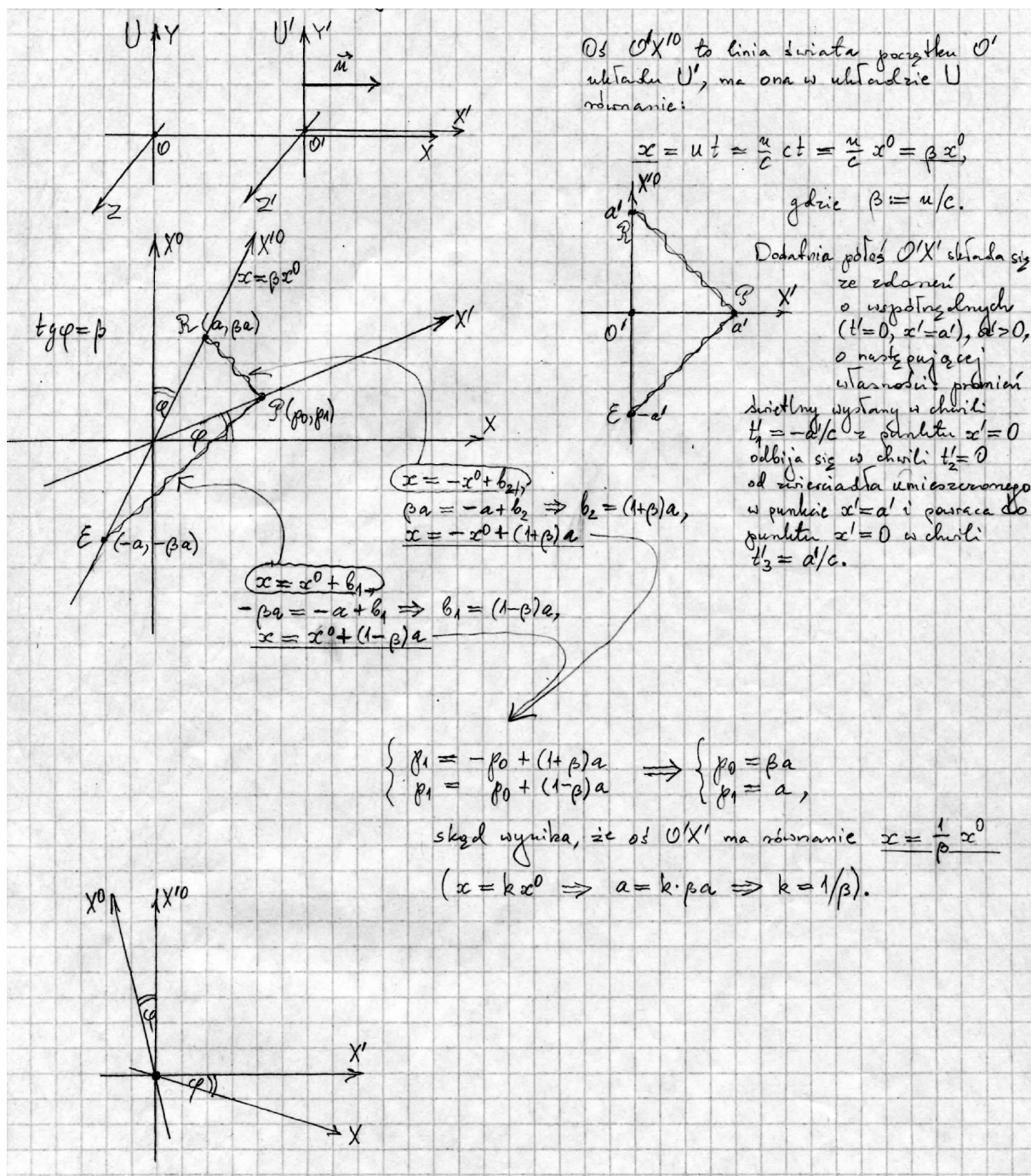
$$x^0 = ct, x, y, z. \quad (9.1)$$

Będziemy na ogół używać 2-wymiarowych przekrojów czasoprzestrzeni, tzn. ograniczymy się do rozważania zdarzeń, dla których w pewnym ustalonym i.u.o. współrzędne y i z są stałe, zmieniają się tylko współrzędne $x^0 = ct$ i x . Oznacza to badanie ruchów zachodzących wyłącznie w kierunku osi x , w szczególności ruchów zachodzących wzdłuż samej osi x (dla których $y = z = 0$).

2-wymiarowy przekrój czasoprzestrzeni będziemy opisywać za pomocą kartezjańskiego układu współrzędnych, na osiach którego odkładamy współrzędne x^0 i x .



**Konstrukcja współrzędnych czasoprzestrzennych
używanych przez obserwatora w innym i.u.o.**



X. INTERWAŁ CZASOPRZESTRZENNY

Interwałem czasoprzestrzennym pomiędzy zdarzeniami $\mathcal{Z}_1$ [o współrzędnych (t_1, x_1, y_1, z_1)] oraz $\mathcal{Z}_2$ [o współrzędnych (t_2, x_2, y_2, z_2)] nazywamy wyrażenie

$$I_{12} := -c^2(t_2 - t_1)^2 + (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2. \quad (10.1)$$

Interwał czasoprzestrzenny jest niezmiennikiem transformacji Lorentza: jeżeli (t'_1, x'_1, y'_1, z'_1) oraz (t'_2, x'_2, y'_2, z'_2) są współrzędnymi tych samych zdarzeń $\mathcal{Z}_1$ i $\mathcal{Z}_2$ w pewnym innym i.u.o. U' , to

$$\begin{aligned} -c^2(t'_2 - t'_1)^2 + (x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2 \\ = -c^2(t_2 - t_1)^2 + (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2. \end{aligned} \quad (10.2)$$

Prawdziwość powyższego równania można udowodnić korzystając z równań (6.17) [lub (6.18)] opisujących transformację Lorentza.

Dla dwóch zdarzeń nieskończenie bliskich sobie w czasie i w przestrzeni możemy napisać:

$$t_2 = t_1 + dt, \quad x_2 = x_1 + dx, \quad y_2 = y_1 + dy, \quad z_2 = z_1 + dz. \quad (10.3)$$

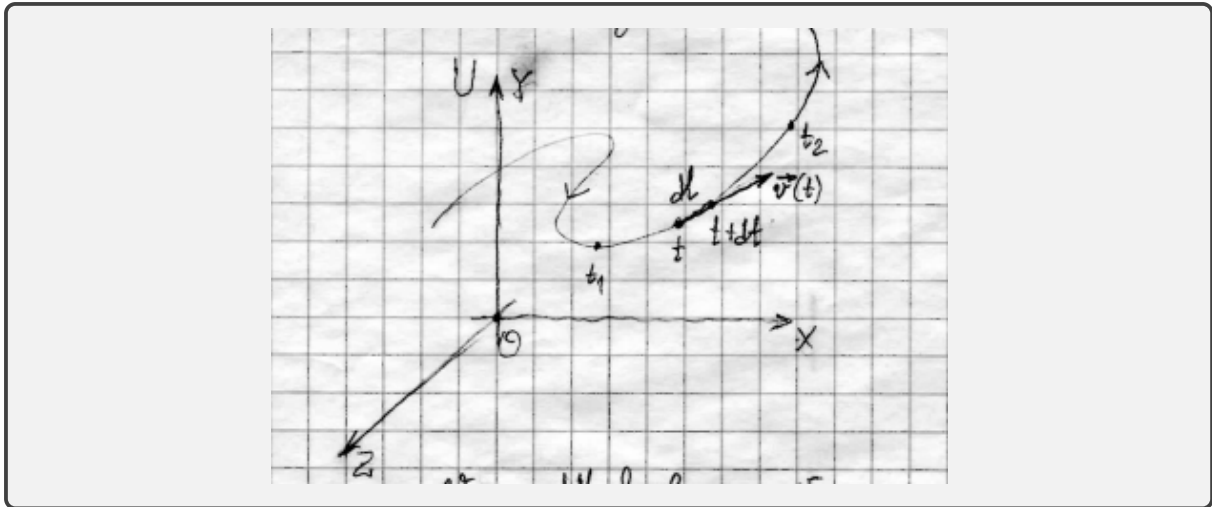
Interwał pomiędzy takimi zdarzeniami oznacza się często przez ds^2 , mamy zatem formułę

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (10.4)$$

W zależności od znaku I_{12} , interwały dzielimy na trzy rozłączne klasy.

- Jeżeli $I_{12} < 0$, to interwał nazywamy *czasowym* lub *czasopodobnym*; mówimy też, że zdarzenia są oddzielone czasowo.
- Jeżeli $I_{12} = 0$, to interwał nazywamy *zerowym* lub *światlnym*; mówimy też, że zdarzenia są oddzielone zerowo lub świetlnie.
- Jeżeli $I_{12} > 0$, to interwał nazywamy *przestrzennym* lub *przestrzeniopodobnym*; mówimy też, że zdarzenia są oddzielone przestrzennie.

XI. CZAS WŁASNY



Pewien obiekt i spoczywający względem niego zegar poruszają się (w dowolny sposób) względem i.u.o. U . Rozważmy dwa nieskończenie bliskie położenia zegara w chwilach t i $t + dt$; w czasie dt zegar przebył względem i.u.o. U odległość

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \quad (11.1)$$

z prędkością chwilową $\vec{v}(t)$ o wartości $v(t) = dl/dt$.

Jaki odstęp czasu dt' wskaże poruszający się zegar?

W i.u.o. U' chwilowo współporuszającym się z zegarem $dx' = dy' = dz' = 0$. Korzystamy z niezmienniczości interwału czasoprzestrzennego:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = -c^2 dt'^2. \quad (11.2)$$

Do powyższego równania podstawiamy (11.1) i rozwiązujemy je ze względu na dt' :

$$-c^2 dt^2 + dl^2 = -c^2 dt'^2 \implies dt' = \pm \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \frac{dl^2}{dt^2}} dt = \pm \sqrt{1 - v(t)^2/c^2} dt. \quad (11.3)$$

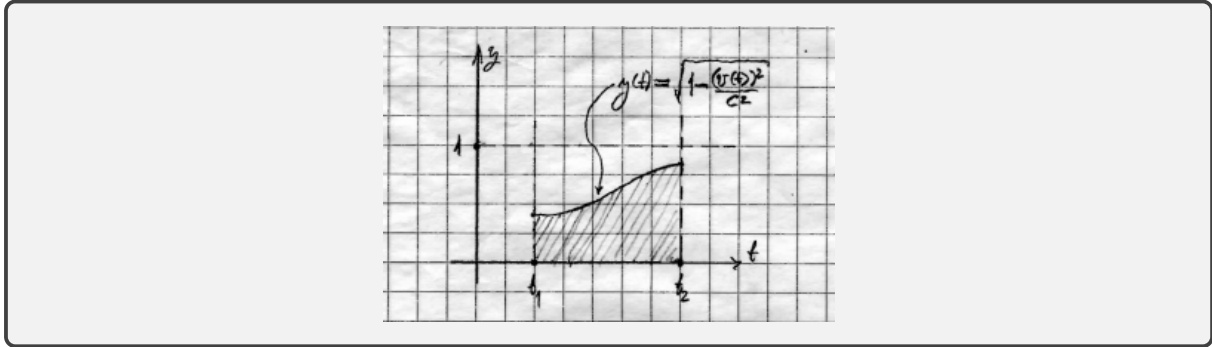
Wybieramy znak $+$, ponieważ gdy $\vec{v}(t) \equiv \vec{0}$ musi być $dt' = +dt$. Ostatecznie

$$dt' = \sqrt{1 - \frac{v(t)^2}{c^2}} dt. \quad (11.4)$$

Całkujemy powyższe równanie w przedziale czasu $\langle t_1, t_2 \rangle$:

$$t'_2 - t'_1 = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{v(t)^2}{c^2}} dt. \quad (11.5)$$

Jeśli $\vec{v} \neq \vec{0}$, to $t'_2 - t'_1 < t_2 - t_1$: poruszający się zegar chodzi wolniej niż zegar spoczywający; jest to ogólny przejaw zjawiska dylatacji czasu.



XII. STOŻEK ŚWIETLNY ZDARZENIA

Za pomocą współrzędnej $x^0 = ct$ interwał I_{12} pomiędzy zdarzeniami $\mathcal{Z}_1$ [o współrzędnych $(x_1^0 = ct_1, x_1, y_1, z_1)$] oraz $\mathcal{Z}_2$ [o współrzędnych $(x_2^0 = ct_2, x_2, y_2, z_2)$] zapisujemy w postaci

$$I_{12} = -(x_2^0 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2. \quad (12.1)$$

Niech zdarzenie $\mathcal{A}$ ma współrzędne $(x_{\mathcal{A}}^0, x_{\mathcal{A}}, y_{\mathcal{A}}, z_{\mathcal{A}})$, *stożek świetlny zdarzenia $\mathcal{A}$* to zbiór wszystkich tych zdarzeń, których współrzędne (x^0, x, y, z) spełniają równanie

$$-(x^0 - x_{\mathcal{A}}^0)^2 + (x - x_{\mathcal{A}})^2 + (y - y_{\mathcal{A}})^2 + (z - z_{\mathcal{A}})^2 = 0. \quad (12.2)$$

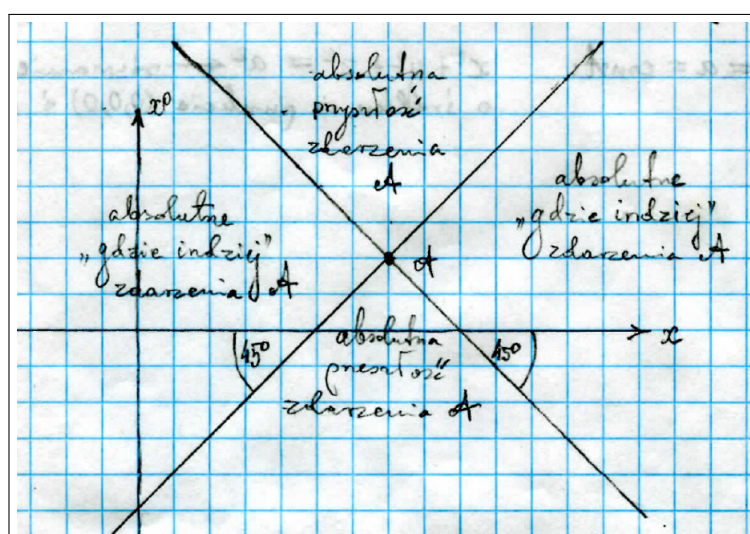
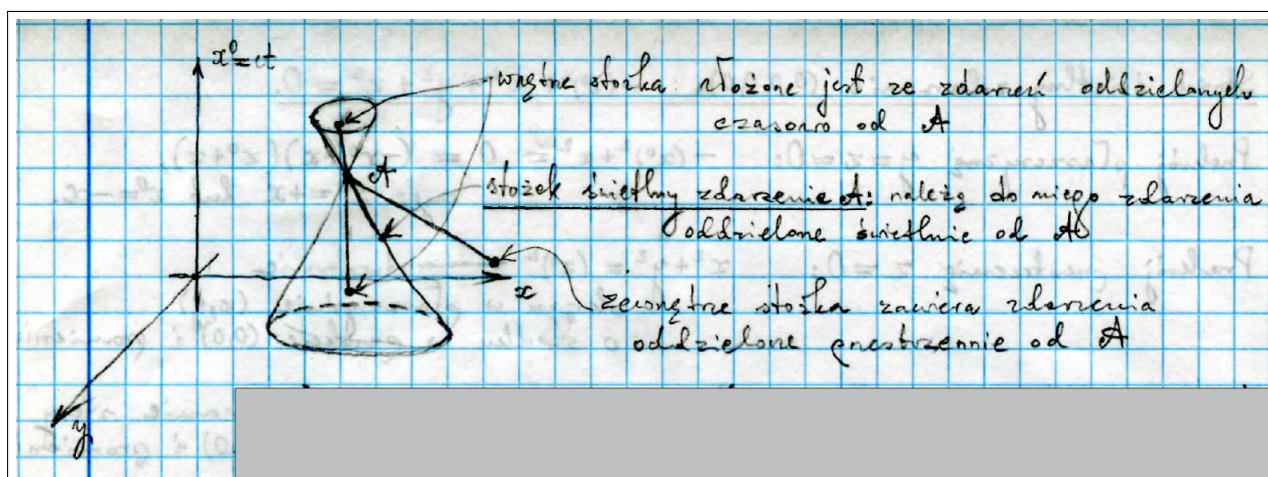
Stożek świetlny zdarzenia $\mathcal{A}$ składa się zatem z tych zdarzeń, których interwał ze zdarzeniem $\mathcal{A}$ jest zerowy.

Wnętrze stożka świetlnego zdarzenia $\mathcal{A}$ opisuje nierówność

$$-(x^0 - x_{\mathcal{A}}^0)^2 + (x - x_{\mathcal{A}})^2 + (y - y_{\mathcal{A}})^2 + (z - z_{\mathcal{A}})^2 < 0, \quad (12.3)$$

natomiast jego *zewnątrze* nierówność

$$-(x^0 - x_{\mathcal{A}}^0)^2 + (x - x_{\mathcal{A}})^2 + (y - y_{\mathcal{A}})^2 + (z - z_{\mathcal{A}})^2 > 0. \quad (12.4)$$



Rozważmy stożek świetlny zdarzenia o współrzędnych $(0, 0, 0, 0)$:

$$-(x^0)^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 0. \quad (12.5)$$

Zobaczmy, czym jest przekrój stożka (12.5) płaszczyzną $y = z = 0$ [czyli płaszczyzną (x^0, x)]:

$$0 = -(x^0)^2 + x^2 = (-x^0 + x)(x^0 + x), \quad \text{czyli } x^0 = +x \text{ lub } x^0 = -x. \quad (12.6)$$

Widzimy, że przekrojem tym jest suma mnogościowa dwóch prostych przechodzących przez początek układu współrzędnych.

Rozważmy teraz przekrój stożka (12.5) przestrzenią $z = 0$ [czyli przestrzenią (x^0, x, y)]:

$$x^2 + y^2 = (x^0)^2. \quad (12.7)$$

Jest to równanie okręgu w płaszczyźnie (x, y) o środku w punkcie $(0, 0)$ i promieniu $|x^0|$. Suma mnogościowa wszystkich takich okręgów dla wszystkich możliwych x^0 jest

zwykłym dwuwymiarowym stożkiem w przestrzeni (x^0, x, y) , którego osią symetrii jest oś x^0 . Analogicznie wyglądają przekroje stożka (12.5) przestrzeniami $x = 0$ i $y = 0$.

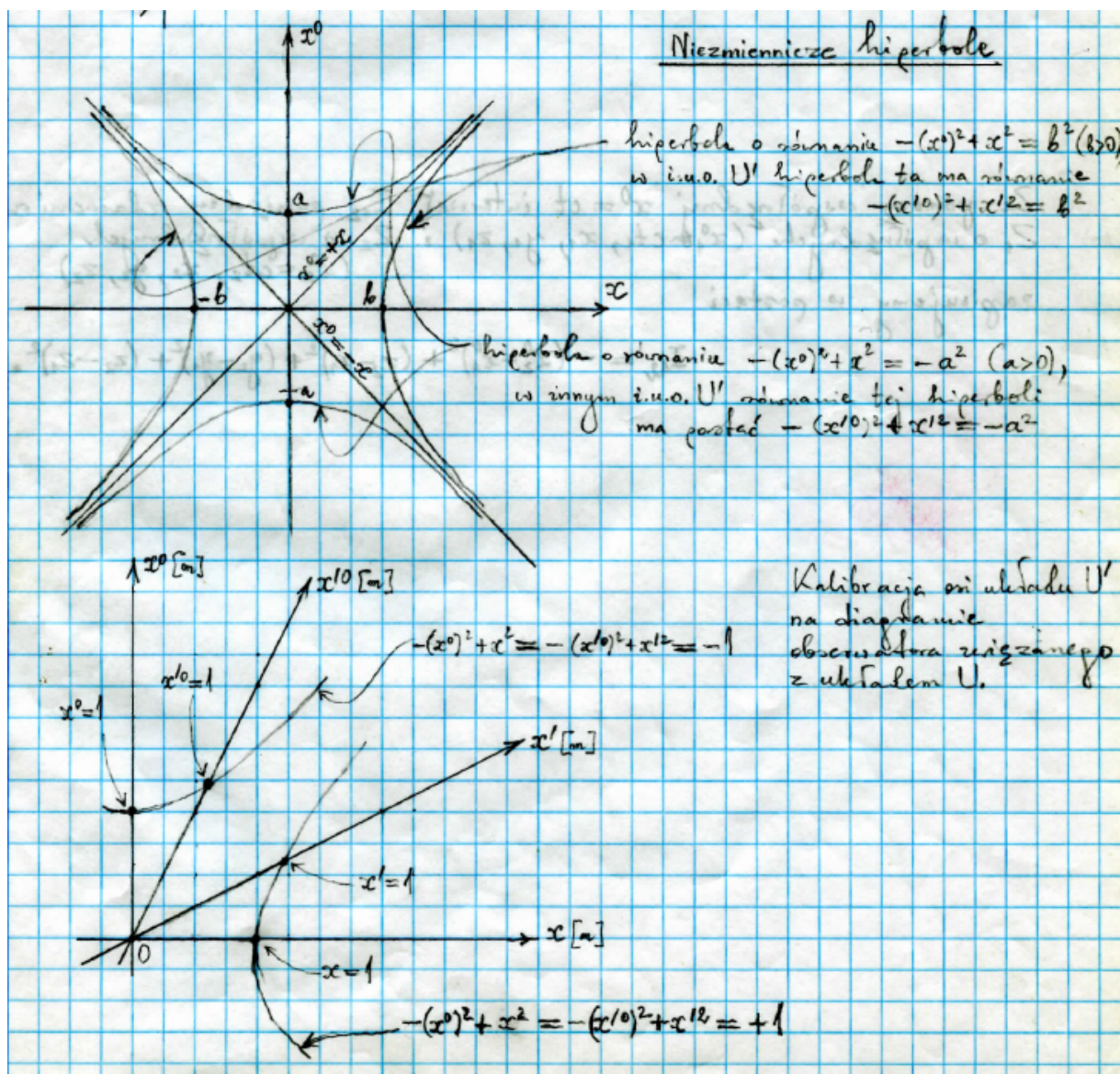
Rozważmy wreszcie przekrój stożka (12.5) przestrzenią $x^0 = a = \text{const}$ [czyli przestrzenią (x, y, z)]:

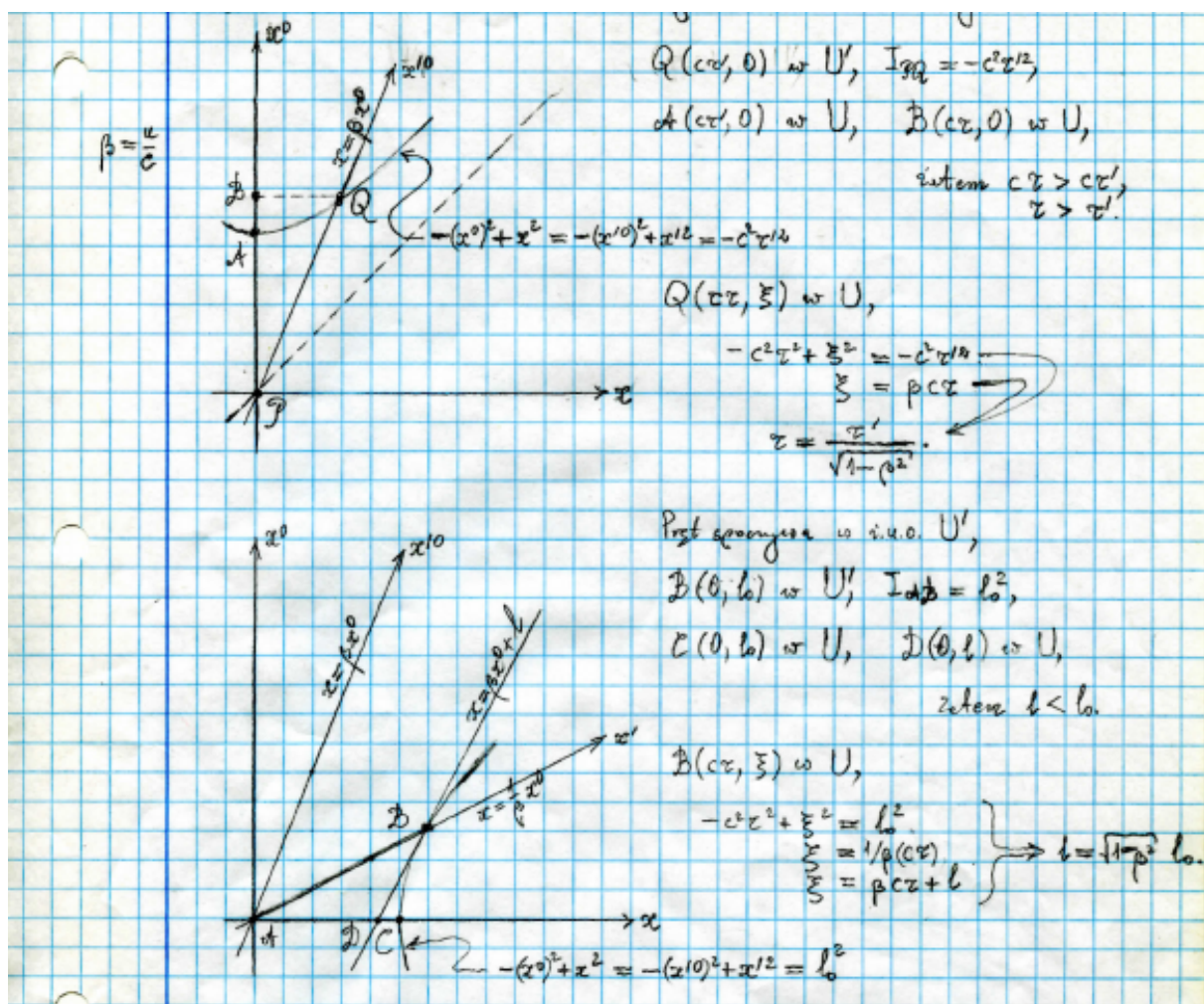
$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2. \quad (12.8)$$

Jest to równanie sfery w przestrzeni (x, y, z) o środku w punkcie $(0, 0, 0)$ i promieniu $|a|$. Pełny stożek świetlny jest sumą mnogościową wszystkich sfer (12.8) otrzymanych dla wszystkich możliwych wartości a , $-\infty < a < +\infty$.

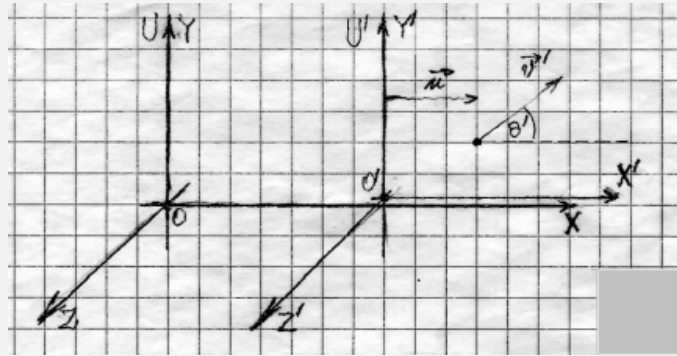
Niech w chwili $t = 0$ z początku $(0, 0, 0)$ układu współrzędnych przestrzennych (x, y, z) będą wysłane sygnały świetlne we wszystkich możliwych kierunkach. Po czasie $\Delta t > 0$ sygnały te będą leżały na sferze o równaniu (12.8) i promieniu $a = c \Delta t$. Rozważmy następnie wszystkie możliwe sygnały świetlne, które poruszają się radialnie w przestrzeni (x, y, z) w stronę początku $(0, 0, 0)$ układu współrzędnych przestrzennych. Sygnały, które dotrą do początku $(0, 0, 0)$ w chwili $t = 0$, leżą w chwili wcześniejszej $\Delta t < 0$ na sferze o równaniu (12.8) i promieniu $a = c |\Delta t|$.

XIII. NIEZMIENNICZE HIPERBOLE,
DYLATACJA CZASU I SKRÓCENIE DŁUGOŚCI
BEZ TRANSFORMACJI LORENTZA





XIV. ABERRACJA



Cząstka porusza się w i.u.o. U' w płaszczyźnie $x'y'$ w kierunku tworzącym kąt θ' względem osi x' . Pod jakim kątem θ względem osi x będzie się ta cząstka poruszać w i.u.o. U ?

Współrzędne prędkości cząstki w układzie U' wyrażamy przez moduł wektora prędkości $v' = |\vec{v}'|$ i kąt θ' :

$$v'_{x'} = v' \cos \theta', \quad (14.1a)$$

$$v'_{y'} = v' \sin \theta', \quad (14.1b)$$

$$v'_{z'} = 0. \quad (14.1c)$$

Współrzędne prędkości cząstki w układzie U otrzymujemy z relatywistycznego prawa dodawania prędkości:

$$v_x = v \cos \theta = \frac{v'_{x'} + u}{1 + \frac{uv'_{x'}}{c^2}} = \frac{v' \cos \theta' + u}{1 + \frac{uv'}{c^2} \cos \theta'}, \quad (14.2a)$$

$$v_y = v \sin \theta = \frac{v'_{y'}}{\gamma \left(1 + \frac{uv'_{x'}}{c^2}\right)} = \frac{v' \sin \theta'}{\gamma \left(1 + \frac{uv'}{c^2} \cos \theta'\right)}, \quad (14.2b)$$

$$v_z = 0. \quad (14.2c)$$

Stąd obliczamy tangens kąta θ :

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{v \sin \theta}{v \cos \theta} = \frac{v_y}{v_x} = \frac{v' \sin \theta'}{\gamma(u + v' \cos \theta')}. \quad (14.3)$$

Rozważmy teraz zmianę kierunku biegu promienia świetlnego przy przejściu do innego i.u.o. Dla promienia świetlnego $v' = c$ i dostajemy:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{c \sin \theta'}{\gamma(u + c \cos \theta')} = \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \frac{\sin \theta'}{\frac{u}{c} + \cos \theta'}. \quad (14.4)$$

Dla $\frac{u}{c} \ll 1$ dostajemy stąd:

$$\operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg} \theta' - \frac{\sin \theta'}{\cos^2 \theta'} \frac{u}{c} + \mathcal{O}((u/c)^2). \quad (14.5)$$

Wprowadźmy kąt aberracji

$$\Delta\theta := \theta' - \theta. \quad (14.6)$$

Dla $\frac{u}{c} \ll 1$ kąt $\Delta\theta$ jest bardzo mały i możemy $\operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg}(\theta' - \Delta\theta)$ rozwinąć w szereg względem $\Delta\theta$:

$$\operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg}(\theta' - \Delta\theta) = \operatorname{tg} \theta' - \frac{1}{\cos^2 \theta'} \Delta\theta + \mathcal{O}(\Delta\theta^2). \quad (14.7)$$

Przyrównujemy do siebie prawe strony wzorów (14.5) i (14.7). Pomijając wyrazy wyższego rzędu dostajemy:

$$\operatorname{tg} \theta' - \frac{1}{\cos^2 \theta'} \Delta\theta \cong \operatorname{tg} \theta' - \frac{\sin \theta'}{\cos^2 \theta'} \frac{u}{c}. \quad (14.8)$$

Stąd:

$$\Delta\theta \cong \frac{u}{c} \sin \theta'. \quad (14.9)$$

Dodatek A: Notacja $\mathcal{O}(x^n)$, gdy $x \rightarrow 0$

Dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \dots \quad (\text{A1})$$

Gdy $x \rightarrow 0$ możemy zapisać:

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + \mathcal{O}(x) \\ &= 1 + x + \mathcal{O}(x^2) \\ &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \mathcal{O}(x^3). \end{aligned}$$

Widzimy, że zachodzi warunek:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\mathcal{O}(x^n)}{x^{n-1}} = 0, \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots; \quad (\text{A2})$$

np. dla $n = 1$, $\mathcal{O}(x) = e^x - 1$ i mamy

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\mathcal{O}(x)}{x^0} = \lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1) = 0. \quad (\text{A3})$$

Precyzyjna definicja symbolu $\mathcal{O}(x^n)$, gdy $x \rightarrow 0$, jest następująca:

$$\begin{aligned} \left(f(x) = \mathcal{O}(x^n) \text{ w granicy } x \rightarrow 0 \right) &\iff \left(\text{istnieją liczby } \delta > 0 \text{ i } M > 0 \text{ takie, że} \right. \\ &\quad \left. 0 < |x| < \delta \Rightarrow |f(x)| \leq M|x^n| \right). \quad (\text{A4}) \end{aligned}$$

Pamiętamy, że

$$0 < |x| < \delta \iff x \in (-\delta; 0) \cup (0; \delta). \quad (\text{A5})$$

Symbol $\mathcal{O}(x^n)$, gdy $x \rightarrow 0$, może być uogólniony do symbolu $\mathcal{O}(g(x))$, gdy $x \rightarrow a$:

$$\begin{aligned} \left(f(x) = \mathcal{O}(g(x)) \text{ w granicy } x \rightarrow a \right) &\iff \left(\text{istnieją liczby } \delta > 0 \text{ i } M > 0 \text{ takie, że} \right. \\ &\quad \left. 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x)| \leq M|g(x)| \right). \quad (\text{A6}) \end{aligned}$$