

Diagramy czasoprzestrzenne

Czasami wygodnie jest wprowadzić współrzędną czasową o wymiarze długości:

$$x^0 := c \cdot t$$

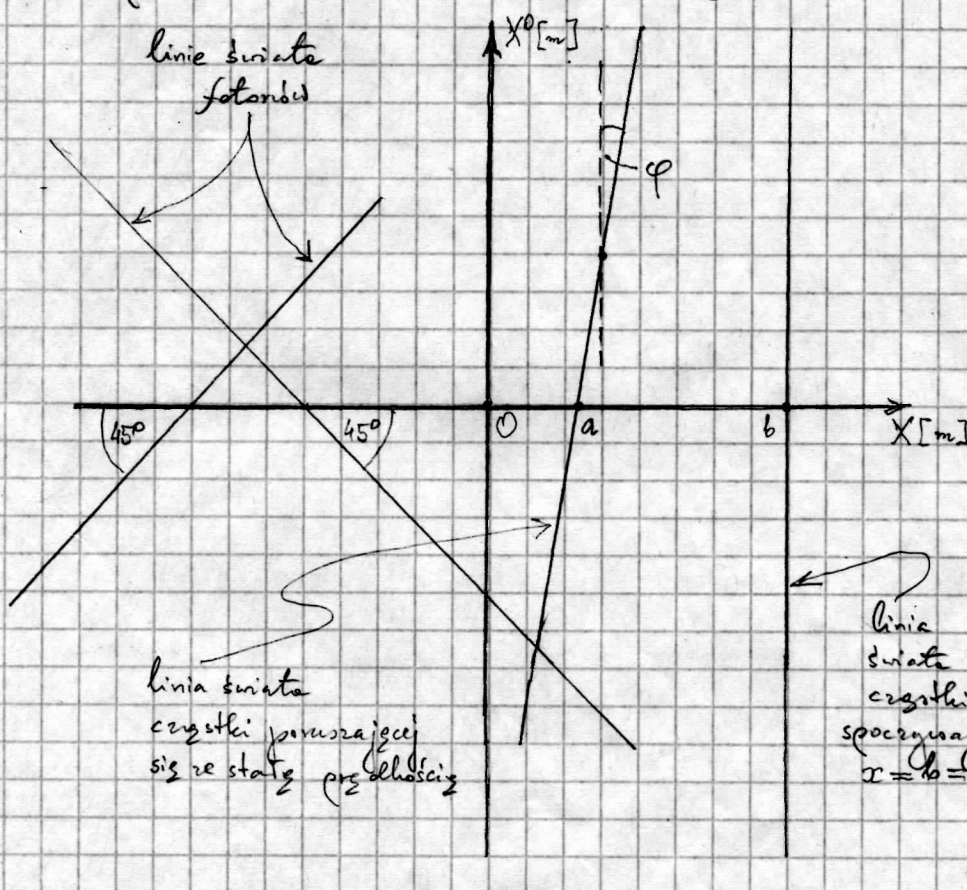
x^0 — indeks górny
 c — prędkość światła w próżni
 t — współrzędna czasowa o wymiarze czasu

Jeśli np. $x^0 = 1\text{m}$, to $t = \frac{x^0}{c} \approx \frac{1\text{m}}{3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}} \approx 3,3 \cdot 10^{-9} \text{s} = 3,3 \text{ ns}$.

W ustalonym i.u.o. każdemu zdarzeniu przyporządkujemy cztery współrzędne czasoprzestrzenne o wymiarze długości: $x^0 = ct, x, y, z$.

Będziemy na ogół używać 2-wymiarowych przekrojów czasoprzestrzeni, tzn. ograniczymy się do zdarzeń, dla których w pewnym ustalonym i.u.o. współrzędne y i z są stałe, zmieniają się tylko współrzędne $x^0 = ct$ i x . Oznacza to lokalnie ruchy zachodzące wyłącznie w kierunku osi x .

2-wymiarowy przekrój czasoprzestrzeni możemy opisać za pomocą kartezjańskiego układu współrzędnych, na ośiach którego odłożymy współrzędne x^0 i x .



Linia o równaniu $x = x(x^0)$ reprezentuje położenie cząstki w różnych chwilach czasu i nazywa się linią świata cząstki.

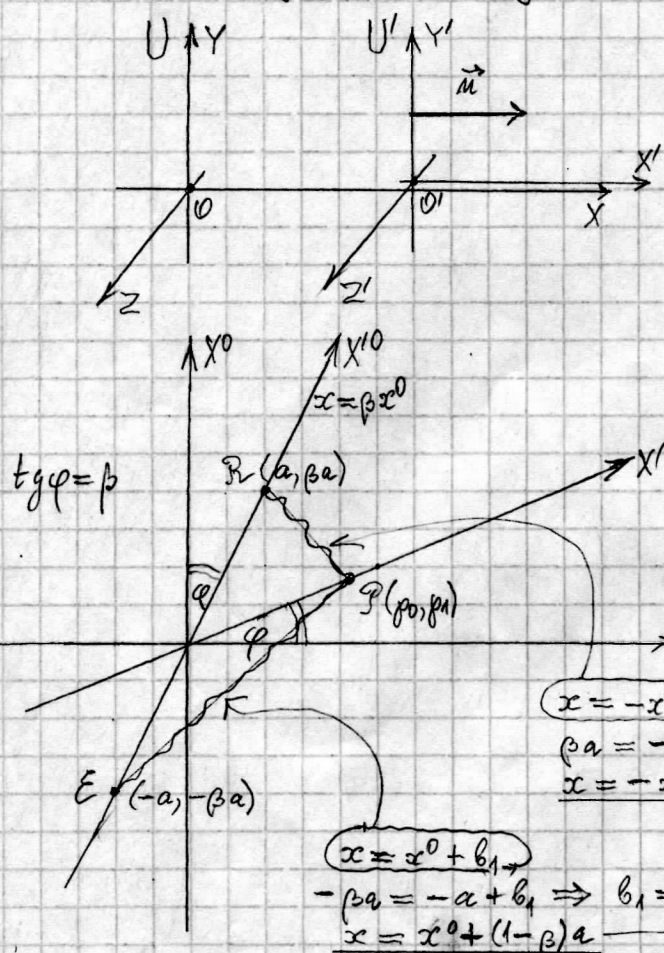
Równanie ruchu cząstki poruszającej się ze stałą prędkością $\vec{v}_0 = v_{0x} \vec{e}_1$:

$$\begin{aligned}
 x &= a + v_{0x} t \\
 &= a + (v_{0x}/c) ct \\
 &= a + (v_{0x}/c) x^0 \\
 &= a + \operatorname{tg} \varphi x^0,
 \end{aligned}$$

gdzie $\operatorname{tg} \varphi = \frac{v_{0x}}{c}$.

linia świata cząstki poruszającej się: $x = b = \text{const.}$

Konstrukcja współrzędnych używanych przez innego obserwatora



Oś $O'X'^0$ to linia świata początku O' układu U' , ma ona w układzie U równanie:

$$x = ut = \frac{u}{c} ct = \frac{u}{c} x^0 = \beta x^0,$$

gdzie $\beta = u/c$.



Dodatnia półoś $O'X'$ składa się ze zdarzeń o współrzędnych $(t'=0, x'=a')$, $a' > 0$, o następującej własności: promień

światłowy wysłany w chwili $t_1 = -a'/c$ z punktu $x'=0$ odbija się w chwili $t_2 = 0$ od zwierciadła umieszczonego w punkcie $x'=a'$ i powraca do punktu $x'=0$ w chwili $t_3 = a'/c$.

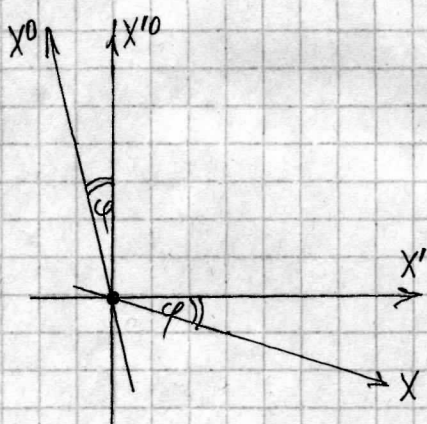
$$\begin{aligned} x &= -x^0 + b_2, \\ \beta a &= -a + b_2 \Rightarrow b_2 = (1+\beta)a, \\ x &= -x^0 + (1+\beta)a \end{aligned}$$

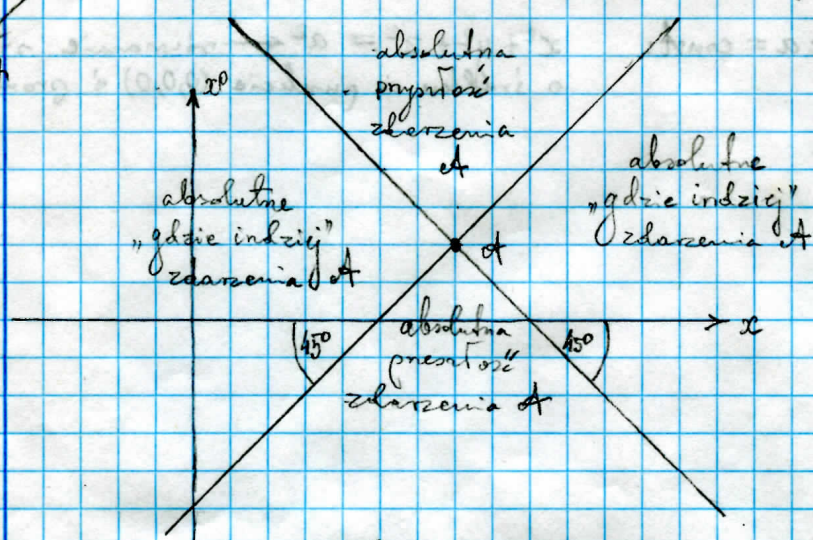
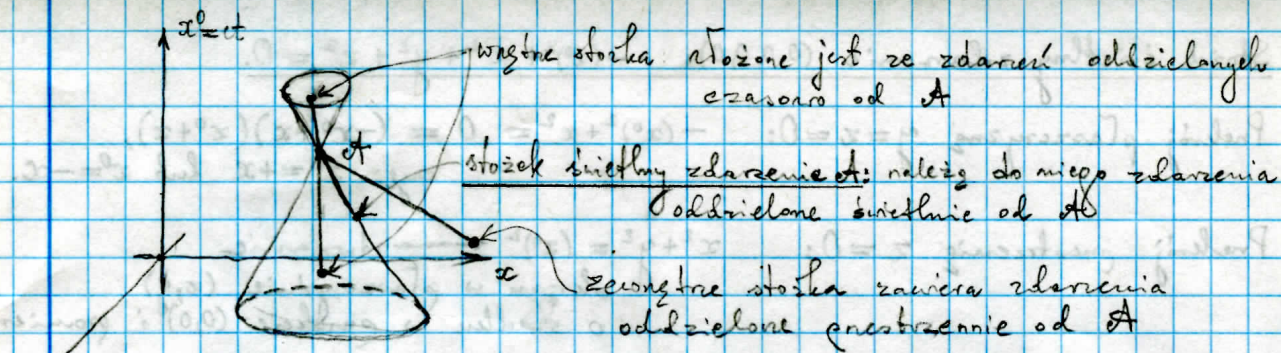
$$\begin{aligned} x &= x^0 + b_1, \\ -\beta a &= -a + b_1 \Rightarrow b_1 = (1-\beta)a, \\ x &= x^0 + (1-\beta)a \end{aligned}$$

$$\begin{cases} p_1 = -p_0 + (1+\beta)a \\ p_1 = p_0 + (1-\beta)a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_0 = \beta a \\ p_1 = a \end{cases}$$

skąd wynika, że oś $O'X'$ ma równanie $x = \frac{1}{\beta} x^0$

$$(x = kx^0 \Rightarrow a = k \cdot \beta a \Rightarrow k = 1/\beta).$$



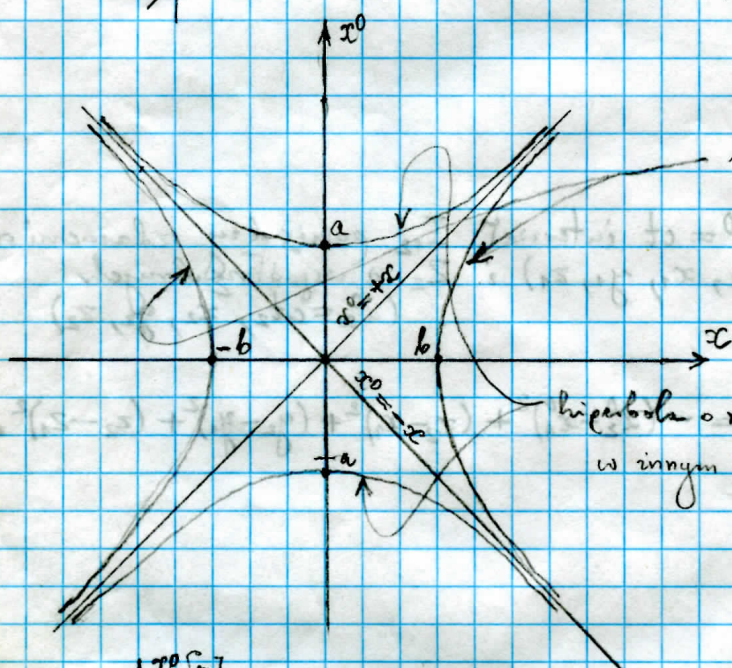


Niech zdarzenie A ma współrzędne (x_A^0, x_A, y_A, z_A) ,
stożek świetlny zdarzenia A
 opisuje równanie

$$-(x^0 - x_A^0)^2 + (x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 + (z - z_A)^2 = 0,$$
 względne stożki opisuje nierówność

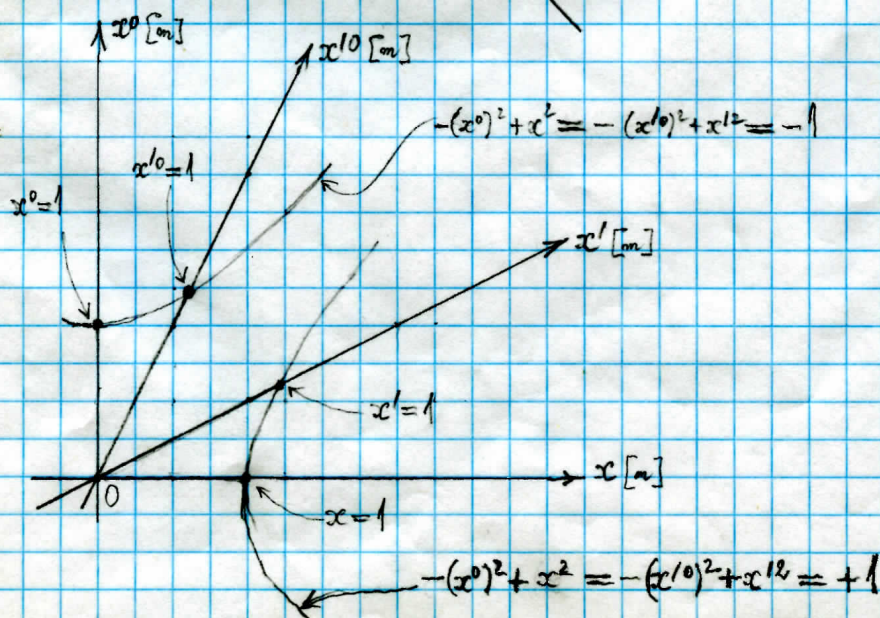
$$-(x^0 - x_A^0)^2 + (x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 + (z - z_A)^2 < 0,$$
 natomiast jego zewnętrzne
 nierówność $-(x^0 - x_A^0)^2 + (x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 + (z - z_A)^2 > 0.$

Niezmiennicze hiperbole



hiperbola o równaniu $-(x^0)^2 + x^2 = b^2$ ($b > 0$),
 w i.u.o. U' hiperbola ta ma równanie
 $-(x'^0)^2 + x'^2 = b^2$

hiperbola o równaniu $-(x^0)^2 + x^2 = -a^2$ ($a > 0$),
 w innym i.u.o. U' równanie tej hiperboli
 ma postać $-(x'^0)^2 + x'^2 = -a^2$



Kalibracja układu U'
 na diagramie
 obserwatora związanego
 z układem U .

Stożek świetlny zdarzenia $(0,0,0,0)$: $-(x^0)^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 0$.

Przekrój płaszczyzny $y=z=0$: $-(x^0)^2 + x^2 = 0 \Rightarrow (x^0+x)(x^0-x)$,
czyli $x^0 = +x$ lub $x^0 = -x$.

Przekrój płaszczyzny $x=0$: $x^2 + y^2 = (x^0)^2 \leftarrow$ równanie
okręgu w płaszczyźnie (x,y)
o środku w punkcie $(0,0)^0$ i promieniu $|x^0|$.

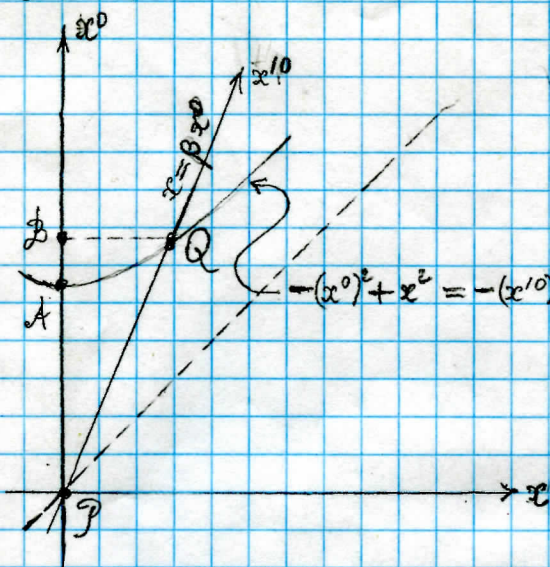
Przekrój płaszczyzny $x^0 = a = \text{const.}$: $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \leftarrow$ równanie sfery
o środku w punkcie $(0,0,0)$ i promieniu $|a|$.

Za pomocą współrzędnej $x^0 = ct$ interwał I_{12} pomiędzy zdarzeniami Z_1 o współrzędnych $(x_1^0, ct_1, x_1, y_1, z_1)$ i Z_2 o współrzędnych $(x_2^0, ct_2, x_2, y_2, z_2)$ zapisujemy w postaci

$$I_{12} = -(x_2^0 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2.$$

Dylatacja czasu i skrócenie długości bez transformacji Lorentza

$$\beta = \frac{v}{c}$$



$Q(ct', 0)$ w U' , $I_{AQ} = -c^2 t'^2$,

$A(ct', 0)$ w U , $B(ct', 0)$ w U ,

zatem $ct' > ct$,
 $t' > t$.

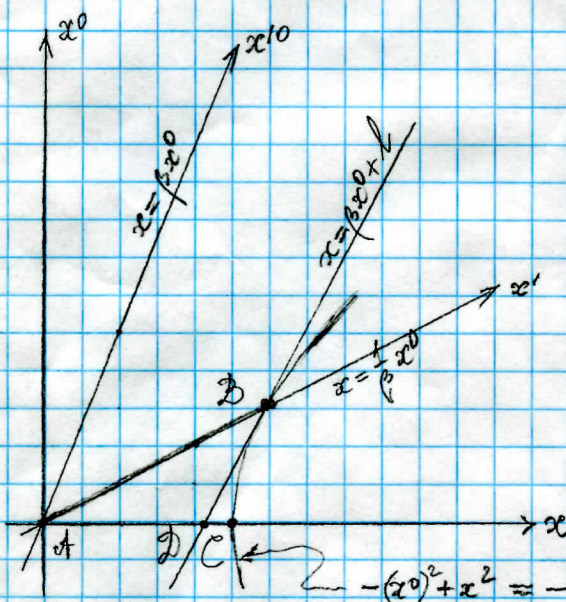
$$-(x^0)^2 + x^2 = -(x'^0)^2 + x'^2 = -c^2 t'^2$$

$Q(ct, \xi)$ w U ,

$$-c^2 t^2 + \xi^2 = -c^2 t'^2$$

$$\xi = \beta ct$$

$$t = \frac{t'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$



Pręt spoczywa w i.u.o. U' ,

$B(0, l_0)$ w U' , $I_{AB} = l_0^2$,

$C(0, l_0)$ w U , $D(0, l)$ w U ,

zatem $l < l_0$.

$B(ct, \xi)$ w U ,

$$-c^2 t^2 + \xi^2 = l_0^2$$

$$\xi = \frac{1}{\beta} ct$$

$$\xi = \beta ct + l$$

$$l = \sqrt{1-\beta^2} l_0$$

$$-(x^0)^2 + x^2 = -(x'^0)^2 + x'^2 = l_0^2$$