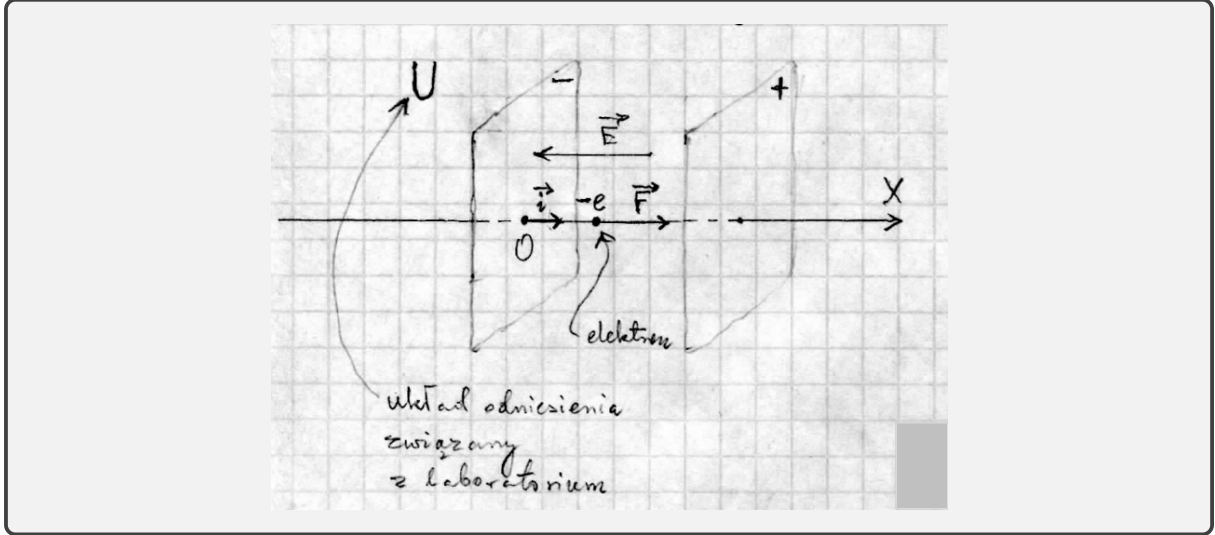


DYNAMIKA RELATYWISTYCZNA

I. RELATYWISTYCZNE RÓWNANIE RUCHU



Rozważmy ruch cząstki naładowanej, np. elektronu, w jednorodnym i stałym w czasie polu elektrycznym. Zgodnie z mechaniką newtonowską równanie ruchu elektronu ma postać:

$$m\vec{a} = \vec{F} = q\vec{E} = -e\vec{E}, \quad (1.1)$$

gdzie m jest masą, zaś $q = -e$ ($e > 0$) jest ładunkiem elektronu, $\vec{E}$ stałym wektorem natężenia pola elektrycznego. Załóżmy dalej, że ruch jest prostoliniowy i odbywa się wzdłuż osi x o wersorze $\vec{i}$. Ruch taki jest możliwy, gdy w chwili początkowej $t = 0$ elektron spoczywa albo jego prędkość początkowa $\vec{v}_0$ jest równoległa do wektora $\vec{E}$.

Ponieważ $\vec{a} = a_x\vec{i}$ oraz $\vec{E} = -E\vec{i}$ ($E = |\vec{E}| > 0$), to równanie (1.1) możemy zapisać w postaci:

$$ma_x\vec{i} = -e(-E\vec{i}) = +eE\vec{i} \implies ma_x = eE, \quad (1.2)$$

czyli:

$$a_x = \frac{eE}{m} = \text{const.} \quad (1.3)$$

Elektron porusza się ze stałym przyspieszeniem, zatem:

$$v_x(t) = v_{0x} + a_x t, \quad (1.4a)$$

$$x(t) = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2. \quad (1.4b)$$

Jeżeli $t \rightarrow \infty$, to $v_x(t) \rightarrow \infty$, zatem równanie $\vec{F} = m\vec{a}$ jest sprzeczne ze STW. Konieczne jest relatywistyczne uogólnienie zasad dynamiki Newtona.

Niech cząstka w chwili t ma prędkość $v_x(t)$ względem i.u.o. U . Wprowadźmy i.u.o. U' , który porusza się z prędkością $v_x(t)$ względem U . Zdarzenie (t, x) w i.u.o. U ma w i.u.o. U' współrzędne (t', x') . Dla niewielkiego przedziału czasu $\Delta t'$, mierzonego w U' od chwili t' , możemy w przybliżeniu zastosować II zasadę dynamiki Newtona oraz jej konsekwencje dotyczące ruchu prostoliniowego jednostajnie przyspieszonego, gdyż w U' cząstka rozpędza się od prędkości zerowej w chwili t' do niewielkiej prędkości $\Delta v'_{x'} \ll c$ w chwili $t' + \Delta t'$. Dlatego

$$\Delta v'_{x'} = a'_{x'} \Delta t' + \mathcal{O}((\Delta t')^2), \quad (1.5)$$

gdzie $\mathcal{O}((\Delta t')^2)$ jest poprawką relatywistyczną do wyrażenia newtonowskiego, kwadratową w $\Delta t'$. Przyspieszenie elektronu w i.u.o. U' wynosi

$$a'_{x'} = \frac{eE'}{m}, \quad (1.6)$$

gdzie E' jest wartością pola elektrycznego w U' . W ciągu czasu $\Delta t'$ współrzędna x' cząstki zmieni się w U' o wielkość

$$\Delta x' = \frac{1}{2} a'_{x'} (\Delta t')^2 + \mathcal{O}((\Delta t')^3). \quad (1.7)$$

W i.u.o. U przyrost prędkości Δv_x cząstki w czasie Δt (odpowiadającym czasowi $\Delta t'$ w układzie U') obliczymy korzystając z relatywistycznego prawa dodawania prędkości. Prędkość cząstki w chwili $t + \Delta t$ względem układu U :

$$v_x(t + \Delta t) = v_x(t) + \Delta v_x = \frac{v_x(t) + \Delta v'_{x'}}{1 + \frac{v_x(t) \Delta v'_{x'}}{c^2}} \implies \Delta v_x = \frac{\left(1 - \frac{(v_x(t))^2}{c^2}\right) \Delta v'_{x'}}{1 + \frac{v_x(t) \Delta v'_{x'}}{c^2}}. \quad (1.8)$$

Rozwijając prawą stronę wzoru na Δv_x względem małej wielkości $\Delta v'_{x'}$ dostajemy

$$\Delta v_x = \left(1 - \frac{(v_x(t))^2}{c^2}\right) \Delta v'_{x'} + \mathcal{O}((\Delta v'_{x'})^2). \quad (1.9)$$

Ponieważ, zgodnie ze wzorem (1.5), $\Delta v'_{x'} = \mathcal{O}(\Delta t')$, mamy

$$\Delta v_x = \left(1 - \frac{(v_x(t))^2}{c^2}\right) \Delta v'_{x'} + \mathcal{O}((\Delta t')^2). \quad (1.10)$$

Następnie, korzystając z transformacji Lorentza, znajdujemy związek pomiędzy odstępami czasu Δt i $\Delta t'$:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \gamma \left(t'_2 + \frac{u}{c^2} x'_2\right) - \gamma \left(t'_1 + \frac{u}{c^2} x'_1\right) \quad (1.11a)$$

$$= \gamma \left((t'_2 - t'_1) + \frac{u}{c^2} (x'_2 - x'_1) \right) = \gamma \left(\Delta t' + \frac{u}{c^2} \Delta x' \right). \quad (1.11b)$$

W naszym przypadku $u = v_x(t)$, zatem

$$\Delta t = \frac{\Delta t' + \frac{v_x(t)}{c^2} \Delta x'}{\sqrt{1 - \frac{(v_x(t))^2}{c^2}}} = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{(v_x(t))^2}{c^2}}} + \mathcal{O}((\Delta t')^2), \quad \text{poniewa\k{z} } \Delta x' = \mathcal{O}((\Delta t')^2). \quad (1.12)$$

Zauwa\k{z}my, \k{z}e je\k{z}li $\Delta t' \rightarrow 0$, to r\k{o}wnie\k{z} $\Delta t \rightarrow 0$, i na odwr\k{o}t: je\k{z}li $\Delta t \rightarrow 0$, to r\k{o}wnie\k{z} $\Delta t' \rightarrow 0$.

Przyspieszenie chwilowe cz\k{a}stki wzgl\k{e}dem uk\k{a}du U wynosi:

$$a_x(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \quad (1.13a)$$

$$= \lim_{\Delta t' \rightarrow 0} \frac{\left(1 - \frac{(v_x(t))^2}{c^2}\right) \Delta v'_{x'} + \mathcal{O}((\Delta t')^2)}{\frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{(v_x(t))^2}{c^2}}} + \mathcal{O}((\Delta t')^2)} \quad (1.13b)$$

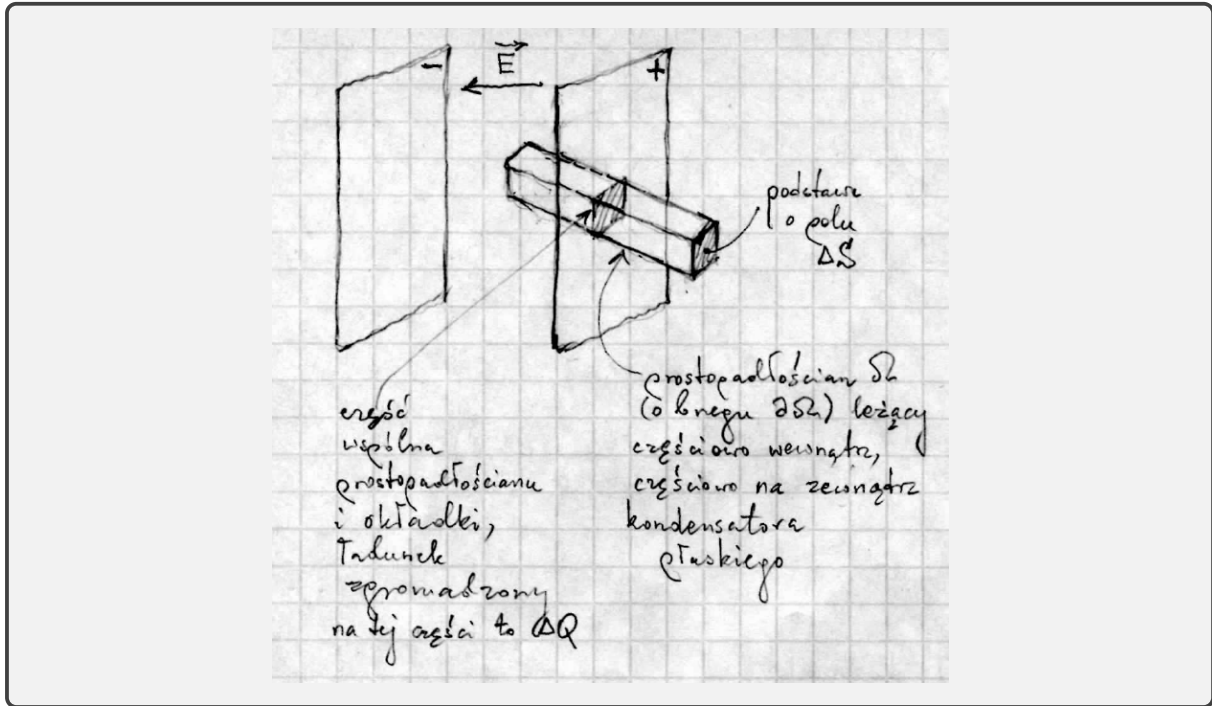
$$= \lim_{\Delta t' \rightarrow 0} \frac{\left(1 - \frac{(v_x(t))^2}{c^2}\right) \frac{\Delta v'_{x'}}{\Delta t'} + \mathcal{O}(\Delta t')}{\left(1 - \frac{(v_x(t))^2}{c^2}\right)^{-1/2} + \mathcal{O}(\Delta t')} \quad (1.13c)$$

$$= \frac{\lim_{\Delta t' \rightarrow 0} \left\{ \left(1 - \frac{(v_x(t))^2}{c^2}\right) \frac{\Delta v'_{x'}}{\Delta t'} + \mathcal{O}(\Delta t') \right\}}{\lim_{\Delta t' \rightarrow 0} \left\{ \left(1 - \frac{(v_x(t))^2}{c^2}\right)^{-1/2} + \mathcal{O}(\Delta t') \right\}} \quad (1.13d)$$

$$= \frac{\left(1 - \frac{(v_x(t))^2}{c^2}\right) a'_{x'}}{\left(1 - \frac{(v_x(t))^2}{c^2}\right)^{-1/2}} \quad (1.13e)$$

$$= \left(1 - \frac{(v_x(t))^2}{c^2}\right)^{3/2} a'_{x'} \quad (1.13f)$$

$$= \left(1 - \frac{(v_x(t))^2}{c^2}\right)^{3/2} \frac{e}{m} E'. \quad (1.13g)$$



Pokażemy teraz, że $E' = E$. Z prawa Gaussa w i.u.o. U :

$$\oint_{\partial\Omega} \vec{E} \cdot \vec{n} dS = E \Delta S = \frac{1}{\varepsilon_0} \Delta Q \implies E = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\Delta Q}{\Delta S}. \quad (1.14)$$

W i.u.o. U' można również rozważyć prostopadłościan o podstawie o polu ΔS spoczywającą w tym układzie. Względem U' okładka kondensatora ma prędkość $-v_x(t)$. W prawie Gaussa nic się jednak nie mówi o prędkości ładunków wewnątrz zamkniętej powierzchni $\partial\Omega$ — jest ono słuszne niezależnie od tego, czy ładunki we wnętrzu prostopadłościanu spoczywają, czy są w ruchu.

Zatem z prawa Gaussa zastosowanego w układzie U' wynika, że

$$E' \Delta S = \frac{1}{\varepsilon_0} \Delta Q \implies E' = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\Delta Q}{\Delta S} = E. \quad (1.15)$$

Ostatecznie przyspieszenie cząstki względem układu U wynosi

$$a_x(t) = \frac{eE}{m} \left(1 - \frac{(v_x(t))^2}{c^2} \right)^{3/2}. \quad (1.16)$$

Widać, że dla $v_x(t) \ll c$ przyspieszenie $a_x(t) \cong \frac{eE}{m} = \text{const}$, natomiast gdy $v_x(t) \rightarrow c$, to $a_x(t) \rightarrow 0$. Powoduje to, że prędkość światła c nie jest przez cząstkę nigdy osiągnięta, nawet w wyniku dowolnie długiego rozpędzania.

Równanie ruchu cząstki można przepisać w postaci:

$$\frac{ma_x(t)}{\left(1 - \frac{(v_x(t))^2}{c^2} \right)^{3/2}} = eE. \quad (1.17)$$

Za pomocą bezpośredniego rachunku można pokazać, że

$$\frac{d}{dt} \frac{mv_x(t)}{\sqrt{1 - \frac{(v_x(t))^2}{c^2}}} = \frac{m}{\left(\sqrt{1 - \frac{(v_x(t))^2}{c^2}}\right)^3} \frac{dv_x(t)}{dt} = \frac{ma_x(t)}{\left(\sqrt{1 - \frac{(v_x(t))^2}{c^2}}\right)^3}. \quad (1.18)$$

Dlatego relatywistyczne równanie ruchu w polu elektrycznym (z prędkością równoległą do tego pola) ma postać:

$$\frac{d}{dt} \frac{mv_x}{\sqrt{1 - \frac{v_x^2}{c^2}}} = eE. \quad (1.19)$$

Można uzasadnić, że w dowolnym polu elektromagnetycznym (o natężeniu pola elektrycznego $\vec{E}$ i indukcji magnetycznej $\vec{B}$) i dla dowolnego kierunku wektora prędkości (względem pól $\vec{E}$ i $\vec{B}$), równanie ruchu cząstki o ładunku elektrycznym q ma postać:

$$\frac{d}{dt} \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \underbrace{q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}}_{\text{siła Lorentza}}. \quad (1.20)$$

Równanie (1.19) jest szczególnym przypadkiem równania (1.20).

Na równaniu (1.20) opiera się m.in. działanie akceleratorów cząstek elementarnych, takich jak „wielki zderzacz hadronów” LHC znajdujący się w ośrodku badawczym CERN. Ma on m.in. przyspieszać protony do prędkości takich, dla których czynnik Lorentza $\gamma \cong 7\,500$, co odpowiada prędkości $v \cong 0,999\,999\,991\,c$.

II. RELATYWISTYCZNY RUCH JEDNOSTAJNIE PRZYSPIESZONY

Relatywistycznym ruchem jednostajnie przyspieszonym nazywamy ruch, w którym chwilowe przyspieszenie cząstki w i.u.o. chwilowo współporuszającym się z cząstką jest stałe. Przykładem takiego ruchu jest ruch cząstki naładowanej w jednorodnym i stałym w czasie polu elektrycznym. Ruch taki jest opisany równaniem (1.19).

Zakładając, że $v_x(t=0) = 0$ oraz $x(t=0) = 0$, z równania ruchu (1.19) otrzymujemy, wykonując kolejno dwa całkowania tego równania względem czasu:

$$v_x(t) = \frac{a_0 t}{\sqrt{1 + \frac{a_0^2 t^2}{c^2}}}, \quad x(t) = \frac{c^2}{a_0} \left(\sqrt{1 + \frac{a_0^2 t^2}{c^2}} - 1 \right), \quad (2.1)$$

gdzie $a_0 := \frac{eE}{m}$ jest przyspieszeniem cząstki w układzie chwilowo współporuszającym się z cząstką. Widać, że

$$v_x(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{a_0 t}{\sqrt{\frac{a_0^2 t^2}{c^2}}} = a_0 t \frac{c}{a_0 t} = c. \quad (2.2)$$

Natomiast dla chwil t takich, że $a_0 t \ll c$:

$$v_x(t) \cong a_0 t, \quad (2.3a)$$

$$x(t) \cong \frac{c^2}{a_0} \left(1 + \frac{a_0^2 t^2}{2c^2} - 1 \right) = \frac{1}{2} a_0 t^2. \quad (2.3b)$$

III. PĘD RELATYWISTYCZNY

Występujące po lewej stronie relatywistycznego równania ruchu (1.20) wyrażenie $m\vec{v}/\sqrt{1-v^2/c^2}$ zastępuje pęd cząstki $m\vec{v}$ w analogicznym równaniu nierelatywistycznym. Wyrażenie to definiuje pęd cząstki w STW:

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \quad (3.1)$$

Eksperymenty potwierdzają, że tak zdefiniowany pęd jest wielkością zachowaną podczas zderzeń cząstek.

Pojawiający się w definicji pędu $\vec{p}$ czynnik Lorentza $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2/c^2}$ jest funkcją modułu prędkości cząstki: $\gamma = \gamma(v)$. Funkcję $\gamma(v)$ możemy rozwinąć w szereg Taylora wokół $v = 0$:

$$\begin{aligned} \gamma(v) &= \gamma(0) + \gamma'(0)v + \frac{1}{2!}\gamma''(0)v^2 + \frac{1}{3!}\gamma'''(0)v^3 + \dots \\ &= 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2 + \frac{3}{8} \left(\frac{v}{c}\right)^4 + \mathcal{O}((v/c)^6), \end{aligned} \quad (3.2)$$

dlatego możemy napisać:

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = m\vec{v} \left\{ \underbrace{1}_{\text{pęd newtonowski}} + \underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2}_{\text{pierwsza poprawka relatywistyczna}} + \underbrace{\frac{3}{8} \left(\frac{v}{c}\right)^4}_{\text{poprawka relatywistyczna wyższego rzędu}} + \underbrace{\mathcal{O}((v/c)^6)}_{\text{reszta w rozwinięciu Taylora}} \right\}. \quad (3.3)$$

Dość często wprowadza się pojęcie relatywistycznej masy cząstki, która zależy od prędkości:

$$m_r = \frac{m}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad (3.4)$$

wówczas pęd cząstki można zapisać w postaci $\vec{p} = m_r \vec{v}$.

Widać, że $m_r = m$ dla $v = 0$, dlatego m nazywa się masą spoczynkową cząstki. Często masę spoczynkową oznacza się przez m_0 , zaś masę relatywistyczną przez m .

IV. ENERGIA KINETYCZNA

Energię kinetyczną cząstki definiujemy żądając, by energia kinetyczna cząstki spoczywającej była równa zeru, natomiast zmiana energii kinetycznej cząstki w przedziale czasu $\langle t_1; t_2 \rangle$ jest równa pracy wykonanej przez wypadkową siłę działającą na cząstkę w tym przedziale czasu:

$$\Delta E_k = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \vec{v} dt. \quad (4.1)$$

Zamiast przedziału $\langle t_1; t_2 \rangle$ rozważmy przedział $\langle t; t + \Delta t \rangle$ o bardzo małej długości Δt :

$$\Delta E_k = \int_t^{t+\Delta t} \vec{F} \cdot \vec{v} dt \cong \vec{F} \cdot \vec{v} \Delta t \implies \frac{\Delta E_k}{\Delta t} \cong \vec{F} \cdot \vec{v}, \quad (4.2)$$

zatem biorąc granicę $\Delta t \rightarrow 0$:

$$\frac{dE_k}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta E_k}{\Delta t} = \vec{F} \cdot \vec{v}. \quad (4.3)$$

Relatywistyczne równanie ruchu można zapisać w postaci

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}, \quad \text{gdzie } \vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (4.4)$$

Dlatego

$$\frac{dE_k}{dt} = \vec{v} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{v} \cdot \frac{d}{dt} \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (4.5)$$

Można pokazać, że

$$\vec{v} \cdot \frac{d}{dt} \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{d}{dt} \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (4.6)$$

a zatem

$$0 = \frac{dE_k}{dt} - \frac{d}{dt} \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{d}{dt} \left(E_k - \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right), \quad (4.7)$$

stąd

$$E_k = C + \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad \text{gdzie } C = \text{const.} \quad (4.8)$$

Ale $E_k = 0$ dla $v = 0$, dlatego $C = -mc^2$ i ostatecznie

$$E_k = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - mc^2. \quad (4.9)$$

Widzimy, że E_k jest funkcją modułu v prędkości $\vec{v}$ cząstki, $E_k = E_k(v)$. Rozwińmy funkcję $E_k(v)$ w szereg Taylora wokół $v = 0$:

$$\begin{aligned} E_k(v) &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{3}{8}m\frac{v^4}{c^2} + \mathcal{O}((v/c)^6) \\ &= \frac{1}{2}mv^2 \left(1 + \frac{3}{4}\frac{v^2}{c^2} + \mathcal{O}((v/c)^4) \right). \end{aligned} \quad (4.10)$$

V. ZASADA ZACHOWANIA ENERGII

Energia całkowita ciała swobodnego jest sumą jego energii kinetycznej oraz energii wewnętrznej. Postulujemy, że *w STW spełniona jest zasada zachowania energii całkowitej*.

Rozważmy zderzenie r cząstek, w wyniku którego pojawia się s (być może innych) cząstek. Zasada zachowania energii całkowitej powiada, że spełnione jest równanie:

$$\sum_{a=1}^r (E_{k,a} + w_a) = \sum_{b=1}^s (\tilde{E}_{k,b} + \tilde{w}_b), \quad (5.1)$$

gdzie $E_{k,a}$ oraz w_a to odpowiednio energia kinetyczna i energia wewnętrzna a -tej cząstki przed zderzeniem, natomiast $\tilde{E}_{k,b}$ oraz $\tilde{w}_b$ to energia kinetyczna i energia wewnętrzna b -tej cząstki po zderzeniu.

Rozważmy, dla uproszczenia rachunków, sytuację, w której wszystkie cząstki przed i po zderzeniu poruszają się wzdłuż osi x pewnego i.u.o. U . Względem innego i.u.o. U' cząstka, która w układzie U porusza się z prędkością $\vec{v}_a$, ma prędkość $\vec{v}'_a$:

$$\vec{v}_a = v_{ax}\vec{i}, \quad \vec{v}'_a = v'_{ax}\vec{i}', \quad v_{ax} = \frac{v'_{ax} + u}{1 + \frac{uv'_{ax}}{c^2}}, \quad (5.2)$$

gdzie $\vec{i}$ to wersor osi x w i.u.o. U , a $\vec{i}'$ to wersor osi x' w i.u.o. U' . Dalej będziemy pisać v_a zamiast v_{ax} oraz v'_a zamiast v'_{ax} , czyli

$$v_a = \frac{v'_a + u}{1 + uv'_a/c^2}. \quad (5.3)$$

Wprowadźmy oznaczenie:

$$E_a := \frac{m_a c^2}{\sqrt{1 - v_a^2/c^2}} \implies E_{k,a} = \frac{m_a c^2}{\sqrt{1 - v_a^2/c^2}} - m_a c^2 = E_a - m_a c^2. \quad (5.4)$$

Korzystając z równania (5.3) można pokazać, że:

$$E_a = \frac{m_a c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_a^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \left(\frac{m_a c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_a'^2}{c^2}}} + u \frac{m_a v_a'}{\sqrt{1 - \frac{v_a'^2}{c^2}}} \right) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} (E_a' + u p_a'), \quad (5.5)$$

gdzie p_a' to składowa pędu a -tej cząstki wzdłuż osi x' układu U' .

Zasadę zachowania energii całkowitej można zapisać w obu układach U i U' . W i.u.o. U jest ona wyrażona równością

$$\sum_{a=1}^r (E_a + w_a - m_a c^2) = \sum_{b=1}^s (\tilde{E}_b + \tilde{w}_b - \tilde{m}_b c^2), \quad (5.6)$$

która w i.u.o. U' przyjmuje postać

$$\sum_{a=1}^r (E_a' + w_a - m_a c^2) = \sum_{b=1}^s (\tilde{E}_b' + \tilde{w}_b - \tilde{m}_b c^2). \quad (5.7)$$

W równaniu (5.6), korzystając z (5.5), wyrażamy E_a oraz $\tilde{E}_b$ odpowiednio przez E_a' , p_a' oraz $\tilde{E}_b'$, $\tilde{p}_b'$. Otrzymane równanie upraszczamy za pomocą (5.7). Dostajemy

$$\sum_{a=1}^r p_a' - \sum_{b=1}^s \tilde{p}_b' = \frac{\sqrt{1 - u^2/c^2} - 1}{u} \left(\sum_{j=1}^s (\tilde{w}_j - \tilde{m}_j c^2) - \sum_{i=1}^r (w_i - m_i c^2) \right). \quad (5.8)$$

Równość ta, przy ustalonych pędach p_a' oraz $\tilde{p}_b'$, musi być prawdziwa dla dowolnej wartości u , dlatego lewa i prawa strona tej równości muszą z osobna być równe zeru:

$$\sum_{a=1}^r p_a' = \sum_{j=b}^s \tilde{p}_b' \quad \text{— zasada zachowania pędu,} \quad (5.9a)$$

$$\sum_{a=1}^r (w_a - m_a c^2) = \sum_{b=1}^s (\tilde{w}_b - \tilde{m}_b c^2). \quad (5.9b)$$

Równanie (5.9b) podstawiamy do równania (5.6), które upraszcza się do:

$$\sum_{a=1}^r E_a = \sum_{b=1}^s \tilde{E}_b. \quad (5.10)$$

Równanie to można zapisać w postaci:

$$\sum_{a=1}^r (E_{k,a} + m_a c^2) = \sum_{b=1}^s (\tilde{E}_{k,b} + \tilde{m}_b c^2), \quad (5.11)$$

lub jeszcze inaczej:

$$\Delta E_k = -(\Delta m)c^2, \quad (5.12)$$

gdzie

$$\Delta E_k := \sum_{b=1}^s \tilde{E}_{k,b} - \sum_{a=1}^r E_{k,a}, \quad \Delta m := \sum_{b=1}^s \tilde{m}_b - \sum_{a=1}^r m_a. \quad (5.13)$$

Równanie (5.13) interpretujemy w następujący sposób: wzrost (lub ubytek) energii kinetycznej zderzających się cząstek pochodzi całkowicie od ubytku (lub wzrostu) sumy mas cząstek pomnożonej przez c^2 . Oznacza to, że *energią wewnętrzną* cząstki jest

$$w_a = m_a c^2, \quad (5.14)$$

natomiast jej energia całkowita to

$$E_a = \frac{m_a c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_a^2}{c^2}}}. \quad (5.15)$$

Oczywiście spełniony jest związek:

$$E_a = E_{k,a} + m_a c^2. \quad (5.16)$$

Energia całkowita pojedynczej cząstki o masie m i prędkości $\vec{v}$ zależy od $v = |\vec{v}|$:

$$E(v) = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (5.17)$$

Energią spoczynkową cząstki jest $E(0) = mc^2$, jest zatem ona identyczna z energią wewnętrzną cząstki. Energię kinetyczną możemy obliczyć tak:

$$E_k(v) = E(v) - E(0). \quad (5.18)$$

Wzór

$$E(0) = mc^2 \quad (5.19)$$

często nazywa się wzorem Einsteina.

VI. ENERGIA, PĘD I MASA

Rozważmy cząstkę o masie m , która w pewnym i.u.o. U ma energię E oraz pęd $\vec{p}$. Obliczmy

$$\frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = \frac{m^2 c^2}{1 - v^2/c^2} - \frac{m^2 v^2}{1 - v^2/c^2} = m^2 c^2. \quad (6.1)$$

Wyrażenie $E^2/c^2 - \vec{p}^2$ zależy tylko od masy m cząstki, nie zależy natomiast od prędkości $\vec{v}$ cząstki. Dlatego jest ono **niezmiennikiem**: jego wartość jest taka sama we wszystkich i.u.o. Jeśli w jakimś innym i.u.o. U' ta sama cząstka ma energię E' i pęd $\vec{p}'$, to

$$\frac{E'^2}{c^2} - \vec{p}'^2 = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = m^2 c^2. \quad (6.2)$$

Związek pomiędzy energią całkowitą E cząstki, jej pędem $\vec{p}$ i masą m można zapisać też w postaci

$$E^2 = c^2 \vec{p}^2 + (mc^2)^2, \quad \text{bądź} \quad E = \sqrt{c^2 \vec{p}^2 + (mc^2)^2}. \quad (6.3)$$

Można pokazać, że pomiędzy wielkościami $E/c, p_x, p_y, p_z$ (gdzie p_x, p_y, p_z są współrzędnymi wektora pędu cząstki) a wielkościami $E'/c, p'_x, p'_y, p'_z$ zachodzą takie same związki, jak pomiędzy współrzędnymi $x^0 = ct, x, y, z$ i współrzędnymi $x'^0 = ct', x', y', z'$:

$$\frac{E'}{c} = \gamma \left(\frac{E}{c} - \frac{u}{c} p_x \right), \quad p'_x = \gamma \left(p_x - \frac{u}{c} \frac{E}{c} \right), \quad p'_y = p_y, \quad p'_z = p_z, \quad (6.4)$$

gdzie $\gamma = 1/\sqrt{1 - u^2/c^2}$. Inaczej mówiąc, wielkości $E/c, p_x, p_y, p_z$ transformują się przy zmianie i.u.o. tak jak współrzędne czasoprzestrzenne. Każde cztery wielkości o tej własności są współrzędnymi pewnego **czterowektora**.

$(E/c, p_x, p_y, p_z)$ są współrzędnymi *czterowektora energii-pędu cząstki*, natomiast (ct, x, y, z) są współrzędnymi *czterowektora położenia cząstki*.

Prawa transformacyjne (6.4) potwierdzają, że wyrażenie $E^2/c^2 - \vec{p}^2$ jest niezmiennikiem.

Rozważmy iloraz

$$\frac{\vec{p}}{E} = \frac{\vec{v}}{c^2}. \quad (6.5)$$

Iloraz ten ma dobrze określoną granicę, gdy $|\vec{v}| \rightarrow c$:

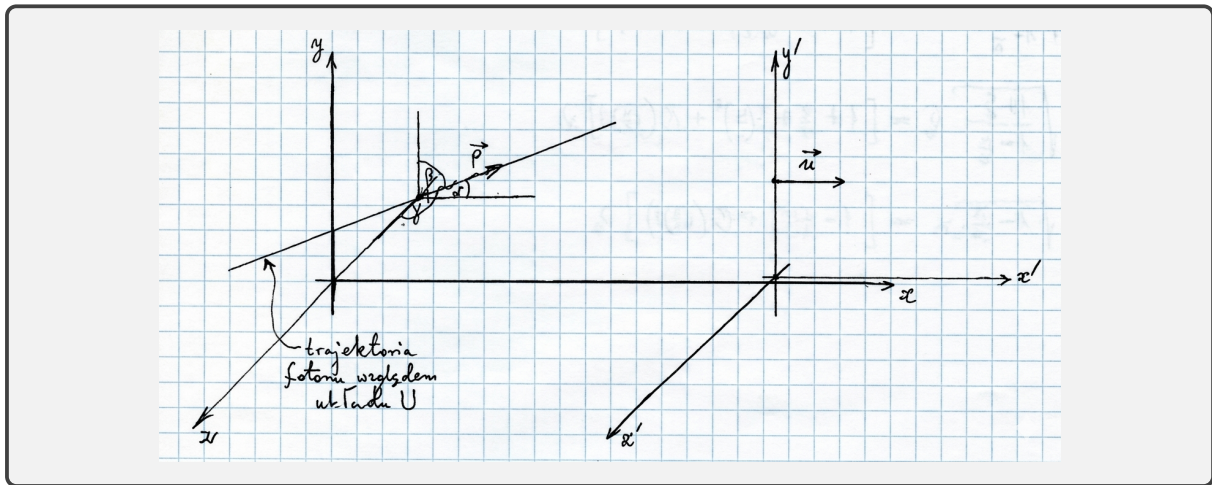
$$\frac{|\vec{p}|}{E} \xrightarrow{|\vec{v}| \rightarrow c} \frac{1}{c}, \quad \text{czyli} \quad E \xrightarrow{|\vec{v}| \rightarrow c} |\vec{p}|c. \quad (6.6)$$

Dlatego przyjmujemy, że dla cząstek poruszających się z prędkością światła, np. fotonów,

$$E = |\vec{p}|c. \quad (6.7)$$

Wynika stąd, że dla fotonu $m^2 c^2 = E^2/c^2 - \vec{p}^2 = 0$, zatem $m = 0$: masa spoczynkowa fotonu wynosi zero.

VII. ZJAWISKO DOPPLERA



Niech α, β, γ będą kątami kierunkowymi wektora pędu $\vec{p}$ fotonu w i.u.o. U :

$$p_x = |\vec{p}| \cos \alpha, \quad p_y = |\vec{p}| \cos \beta, \quad p_z = |\vec{p}| \cos \gamma \quad (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1). \quad (7.1)$$

Energia fotonu względem układu U to $E = |\vec{p}|c$, względem układu U' energia tego fotonu wynosi E' . Korzystając z (6.4) wiążemy ze sobą energie E' i E :

$$\begin{aligned} \frac{E'}{c} &= \gamma \left(\frac{E}{c} - \frac{u}{c} p_x \right) \\ &= \gamma \left(\frac{E}{c} - \frac{u}{c} |\vec{p}| \cos \alpha \right) \\ &= \gamma \frac{E}{c} \left(1 - \frac{u}{c} \cos \alpha \right). \end{aligned} \quad (7.2)$$

Przyjmując $E = h\nu$ oraz $E' = h\nu'$, otrzymujemy:

$$\nu' = \gamma \left(1 - \frac{u}{c} \cos \alpha \right) \nu, \quad (7.3)$$

lub inaczej:

$$\nu = \frac{\sqrt{1 - u^2/c^2}}{1 - \frac{u}{c} \cos \alpha} \nu'. \quad (7.4)$$

Niech źródło promieniowania spoczywa względem układu U' , wówczas $\nu' = \nu_0$ jest częstotliwością promieniowania w układzie własnym źródła.

(i) Źródło oddala się radialnie z prędkością u ($u > 0$):

w równaniu (7.4) kładziemy $\alpha = \pi$:

$$\nu = \frac{\sqrt{1 - u^2/c^2}}{1 + u/c} \nu_0 = \sqrt{\frac{1 - u/c}{1 + u/c}} \nu_0 < \nu_0 \text{ — przesunięcie ku czerwieni.} \quad (7.5)$$

(ii) Źródło zbliża się radialnie z prędkością u ($u > 0$):

w równaniu (7.4) kładziemy $\alpha = 0$ i zamieniamy $u \rightarrow -u$:

$$\nu = \frac{\sqrt{1 - u^2/c^2}}{1 - u/c} \nu_0 = \sqrt{\frac{1 + u/c}{1 - u/c}} \nu_0 > \nu_0 \text{ — przesunięcie ku fioletowi.} \quad (7.6)$$

(iii) Źródło porusza się prostopadłe względem kierunku, z jakiego nadlatuje foton (poprzeczne zjawisko Dopplera):

w równaniu (7.4) kładziemy $\alpha = \frac{\pi}{2}$:

$$\nu = \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \nu_0 < \nu_0. \quad (7.7)$$

Rozważmy powyższe wzory dla małych prędkości $u \ll c$:

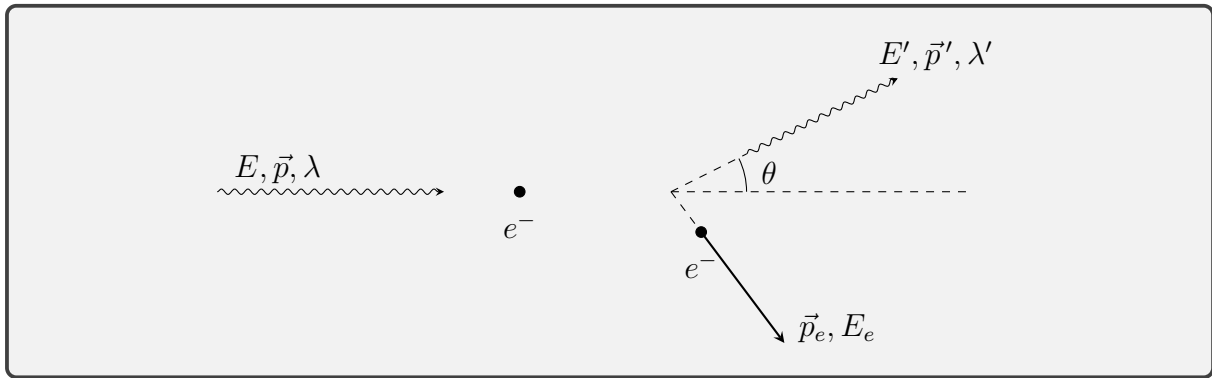
$$(i) \quad \nu = \sqrt{\frac{1 - \frac{u}{c}}{1 + \frac{u}{c}}} \nu_0 = \left[1 - \frac{u}{c} + \frac{1}{2} \left(\frac{u}{c} \right)^2 + \mathcal{O} \left(\left(\frac{u}{c} \right)^3 \right) \right] \nu_0, \quad (7.8a)$$

$$(ii) \quad \nu = \sqrt{\frac{1 + \frac{u}{c}}{1 - \frac{u}{c}}} \nu_0 = \left[1 + \frac{u}{c} + \frac{1}{2} \left(\frac{u}{c} \right)^2 + \mathcal{O} \left(\left(\frac{u}{c} \right)^3 \right) \right] \nu_0, \quad (7.8b)$$

$$(iii) \quad \nu = \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \nu_0 = \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{u}{c} \right)^2 + \mathcal{O} \left(\left(\frac{u}{c} \right)^4 \right) \right] \nu_0. \quad (7.8c)$$

VIII. PRZYKŁAD ZASTOSOWANIA PRAW ZACHOWANIA ENERGII I PĘDU: ZJAWISKO COMPTONA

Zjawisko Comptona polega na rozpraszaniu promieni rentgenowskich na elektronach swobodnych. Schemat tego zjawiska jest zilustrowany na rysunku poniżej.



Zasady zachowania energii i pędu:

$$\begin{cases} \vec{p} = \vec{p}' + \vec{p}_e, \\ E + m_e c^2 = E' + E_e, \end{cases} \quad (8.1)$$

gdzie

$$E = |\vec{p}|c, \quad E' = |\vec{p}'|c, \quad E_e = \sqrt{|\vec{p}_e|^2 c^2 + m_e^2 c^4}. \quad (8.2)$$

Korzystając z równań (8.1) i (8.2) można wyprowadzić zależność:

$$\frac{1}{E'} - \frac{1}{E} = \frac{1}{m_e c^2} (1 - \cos \theta). \quad (8.3)$$

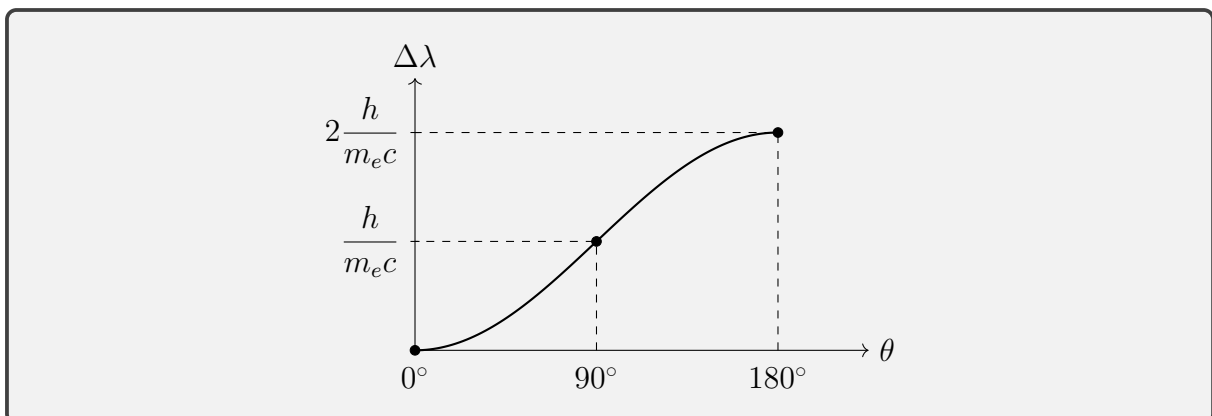
Podstawiając do (8.3) $E = \frac{hc}{\lambda}$ oraz $E' = \frac{hc}{\lambda'}$, otrzymujemy:

$$\Delta \lambda := \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta) = \lambda_C (1 - \cos \theta), \quad (8.4)$$

gdzie

$$\lambda_C := \frac{h}{m_e c} \cong 0,0243 \text{ \AA} \quad (8.5)$$

to komptonowska długość fali elektronu.



IX. TRANSFORMACJA SIŁY

Niech $\vec{F}$ będzie siłą działającą na cząstkę w i.u.o. U , natomiast $\vec{F}'$ siłą działającą na tę samą cząstkę w innym i.u.o. U' ,

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}, \quad \vec{F}' = F'_{x'} \vec{i}' + F'_{y'} \vec{j}' + F'_{z'} \vec{k}' \quad (9.1)$$

Znajdziemy związek pomiędzy współrzędnymi F_x, F_y, F_z i $F'_{x'}, F'_{y'}, F'_{z'}$. Równanie ruchu cząstki ma postać:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \text{ w } U, \quad \vec{F}' = \frac{d\vec{p}'}{dt'} \text{ w } U'. \quad (9.2)$$

Obliczamy:

$$F'_{x'} = \frac{dp'_{x'}}{dt'} \quad (9.3a)$$

$$= \frac{d[\gamma(p_x - \frac{u}{c} \frac{E}{c})]}{d[\gamma(t - \frac{u}{c^2} x)]} \quad (9.3b)$$

$$= \frac{dp_x - \frac{u}{c^2} dE}{dt - \frac{u}{c^2} dx} \quad (9.3c)$$

$$= \frac{\frac{dp_x}{dt} - \frac{u}{c^2} \frac{dE}{dt}}{1 - \frac{u}{c^2} \frac{dx}{dt}} \quad (9.3d)$$

$$= \frac{F_x - \frac{u}{c^2} \frac{dE}{dt}}{1 - \frac{uv_x}{c^2}}. \quad (9.3e)$$

Korzystamy z tego, że

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \vec{v} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{v} \cdot \vec{F} = v_x F_x + v_y F_y + v_z F_z, \quad (9.4)$$

co podstawiamy do (9.3e). Dostajemy

$$F'_{x'} = F_x - \frac{\frac{uv_y}{c^2}}{1 - \frac{uv_x}{c^2}} F_y - \frac{\frac{uv_z}{c^2}}{1 - \frac{uv_x}{c^2}} F_z. \quad (9.5)$$

Podobnie obliczamy, że

$$F'_{y'} = \frac{\sqrt{1-u^2/c^2}}{1 - \frac{uv_x}{c^2}} F_y, \quad F'_{z'} = \frac{\sqrt{1-u^2/c^2}}{1 - \frac{uv_x}{c^2}} F_z. \quad (9.6)$$

Jeżeli układ U' chwilowo współporusza się z cząstką, to $v'_{x'} = v'_{y'} = v'_{z'} = 0$ i z powyższych wzorów wynika, że

$$F_x = F'_{x'}, \quad F_y = \sqrt{1-u^2/c^2} F'_{y'}, \quad F_z = \sqrt{1-u^2/c^2} F'_{z'}. \quad (9.7)$$

X. INNA POSTAĆ RELATYWISTYCZNEGO RÓWNIANIA RUCHU

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\gamma\vec{v}) = m \left(\frac{d\gamma}{dt}\vec{v} + \gamma \frac{d\vec{v}}{dt} \right) = m \left(\frac{d\gamma}{dt}\vec{v} + \gamma\vec{a} \right) \quad (10.1)$$

Ponieważ

$$m \frac{d\gamma}{dt} = \frac{\vec{v}}{c^2} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{F}}{c^2}, \quad (10.2)$$

równanie (10.1) przepisujemy w postaci

$$\vec{F} = m\gamma\vec{a} + \frac{\vec{v} \cdot \vec{F}}{c^2}\vec{v}. \quad (10.3)$$

Rozwiązując to równanie względem przyspieszenia $\vec{a}$ dostajemy

$$\vec{a} = \frac{1}{m\gamma} \left(\vec{F} - \frac{\vec{v} \cdot \vec{F}}{c^2}\vec{v} \right). \quad (10.4)$$

Widzimy, że przyspieszenie $\vec{a}$ cząstki na ogół nie jest równoległe do siły $\vec{F}$ działającej na cząstkę.

Zauważmy, że dla $|\vec{v}| \ll c$, $\vec{a} \cong \vec{F}/m$.

XI. RUCH W POLU MAGNETYCZNYM O INDUKCJI $\vec{B}$

Ponieważ siła magnetyczna działająca na cząstkę naładowaną jest prostopadła do prędkości cząstki:

$$\vec{v} \cdot \vec{F} = q\vec{v} \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) = 0, \quad (11.1)$$

równanie ruchu (10.4) dla cząstki w polu magnetycznym przyjmuje postać:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m\gamma} = \frac{q}{m\gamma}(\vec{v} \times \vec{B}). \quad (11.2)$$

Ruch odbywa się ze stałą wartością prędkości, czyli ze stałą energią kinetyczną:

$$|\vec{v}| = \text{const}, \quad E_k = \text{const}. \quad (11.3)$$

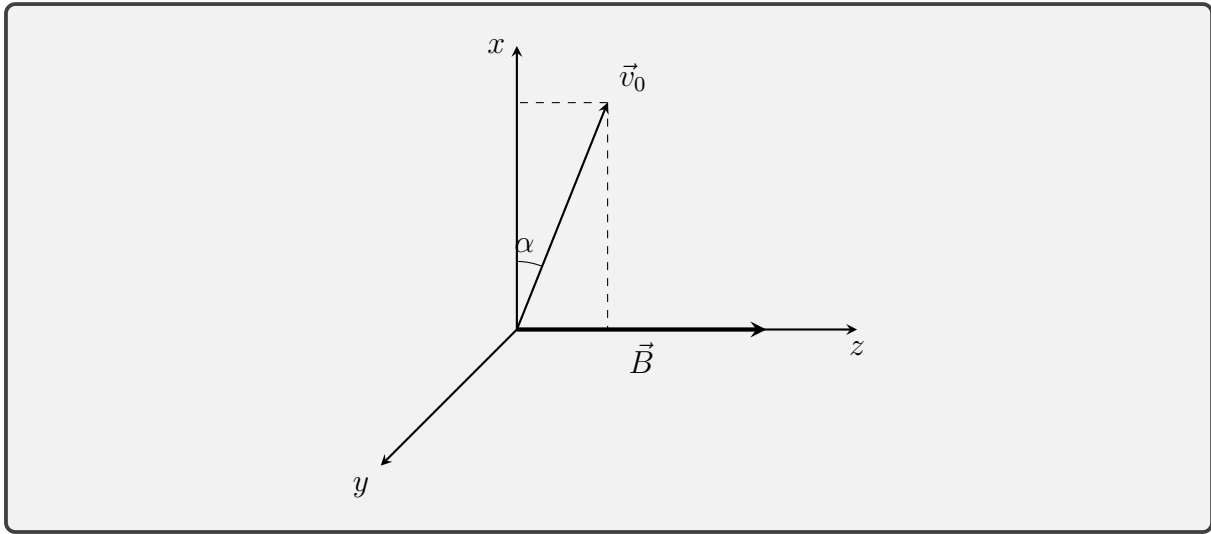
DOWÓD.

$$|\vec{p}| = \sqrt{\vec{p} \cdot \vec{p}}, \quad (11.4a)$$

$$\frac{d}{dt}|\vec{p}| = \frac{1}{|\vec{p}|}\vec{p} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{1}{|\vec{p}|}(m\gamma\vec{v}) \cdot (q\vec{v} \times \vec{B}) = \frac{qm\gamma}{|\vec{p}|}\vec{v} \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) = 0, \quad (11.4b)$$

czyli $|\vec{p}| = \text{const}$, a ponieważ $\vec{v} = (\vec{p}/m)/\sqrt{1 + (\vec{p}/mc)^2}$, zatem również $|\vec{v}| = \text{const}$.

A. Ruch w jednorodnym polu magnetycznym $\vec{B} = \text{const}$



Przyjmijmy układ współrzędnych taki, jak na rysunku powyżej. Oznaczmy przez $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ wersory odpowiednio osi x , y i z . Wówczas:

$$\vec{B} = B_0 \vec{k}, \quad B_0 := |\vec{B}| > 0, \quad (11.5a)$$

$$\vec{r}(t=0) = \vec{0}, \quad \vec{v}(t=0) = (v_{0x}, 0, v_{0z}). \quad (11.5b)$$

Równanie ruchu (11.2) przyjmuje postać:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{q}{m\gamma} \vec{v} \times \vec{B} = \frac{q}{m\gamma} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ 0 & 0 & B_0 \end{vmatrix} = \frac{q}{m\gamma} (\dot{y}B_0, -\dot{x}B_0, 0). \quad (11.6)$$

Rozbijając (11.6) na składowe:

$$m\gamma \ddot{x} = q\dot{y}B_0, \quad (11.7a)$$

$$m\gamma \ddot{y} = -q\dot{x}B_0, \quad (11.7b)$$

$$m\gamma \ddot{z} = 0 \implies \ddot{z} = 0 \implies \underline{z(t) = v_{0z}t}. \quad (11.7c)$$

Definiujemy:

$$\omega := \frac{qB_0}{m\gamma}. \quad (11.8)$$

Wtedy równania (11.7a)–(11.7b) przyjmują postać:

$$\ddot{x} = \omega \dot{y}, \quad (11.9a)$$

$$\ddot{y} = -\omega \dot{x} \implies \dot{y} = -\omega x + C. \quad (11.9b)$$

Stałą C wyznaczamy z warunków początkowych (11.5b):

$$x(0) = 0 \text{ i } \dot{y}(0) = 0 \implies C = 0, \quad (11.10)$$

co podstawiamy do (11.9b) dostając

$$\dot{y} = -\omega x. \quad (11.11)$$

Równanie (11.11) podstawiamy do równania (11.9a). Otrzymane równanie łatwo rozwiązujemy:

$$\ddot{x} = -\omega^2 x \implies x(t) = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t. \quad (11.12)$$

Ponownie korzystamy z warunków początkowych (11.5b):

$$x(0) = C_2 = 0 \implies x(t) = C_1 \sin \omega t, \quad (11.13a)$$

$$\dot{x}(t) = \omega C_1 \cos \omega t, \quad (11.13b)$$

$$\dot{x}(0) = \omega C_1 = v_{0x} \implies C_1 = v_{0x}/\omega. \quad (11.13c)$$

Ostatecznie:

$$\underline{x(t) = \frac{v_{0x}}{\omega} \sin \omega t.} \quad (11.14)$$

Wyznaczamy teraz $y(t)$. Do (11.11) podstawiamy rozwiązanie (11.14):

$$\dot{y} = -\omega x = -v_{0x} \sin \omega t, \quad (11.15a)$$

$$y(t) = +\frac{v_{0x}}{\omega} \cos \omega t + C_3, \quad (11.15b)$$

$$y(0) = \frac{v_{0x}}{\omega} + C_3 = 0 \implies C_3 = -\frac{v_{0x}}{\omega}. \quad (11.15c)$$

Ostatecznie:

$$\underline{y(t) = \frac{v_{0x}}{\omega} (\cos \omega t - 1).} \quad (11.16)$$

Ogólne rozwiązanie równania ruchu (11.6) spełniające warunki początkowe (11.5) wygląda następująco:

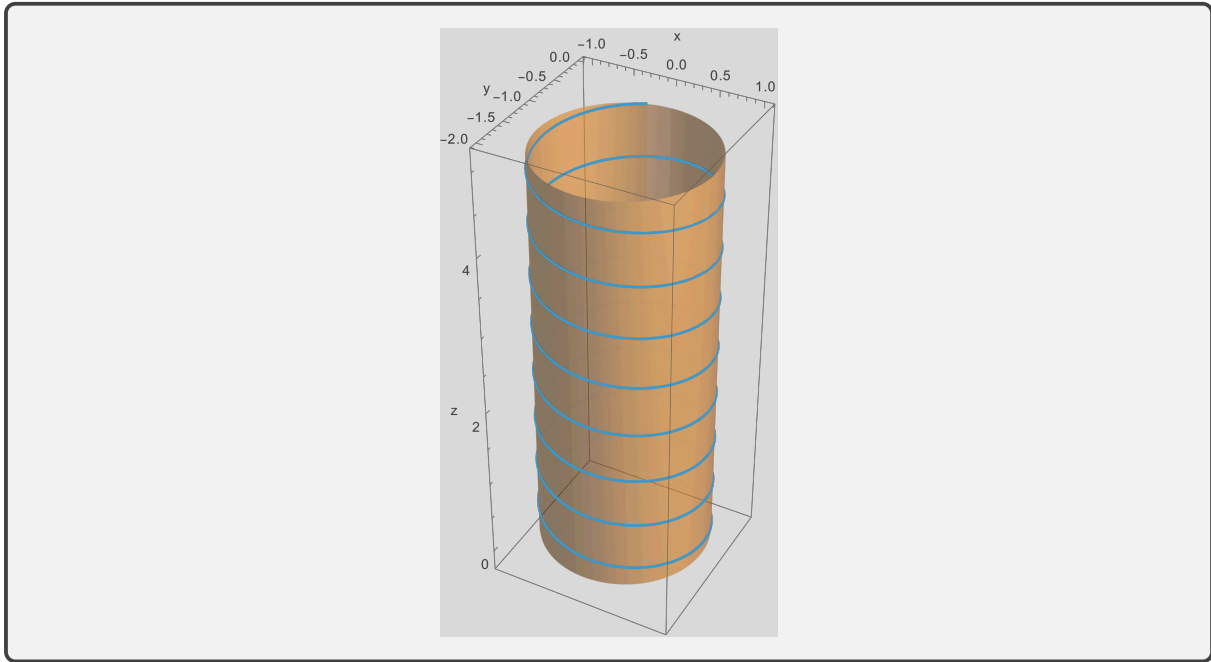
$$x(t) = \frac{v_{0x}}{\omega} \sin \omega t, \quad (11.17a)$$

$$y(t) = \frac{v_{0x}}{\omega} (\cos \omega t - 1), \quad (11.17b)$$

$$z(t) = v_{0z} t. \quad (11.17c)$$

Zależy ono od współrzędnych v_{0x} i v_{0z} wektora prędkości początkowej $\vec{v}_0$, które możemy wyrazić przez długość $v_0 \geq 0$ wektora $\vec{v}_0$ i kąt α , $\alpha \in \langle -\pi/2; \pi/2 \rangle$, który tworzy ten wektor z dodatnią półosią x :

$$v_{0x} = v_0 \cos \alpha, \quad v_{0x} \in \langle 0; v_0 \rangle, \quad (11.18a)$$



$$v_{0z} = v_0 \sin \alpha, \quad v_{0z} \in \langle -v_0; v_0 \rangle. \quad (11.18b)$$

Eliminując z równań (11.17a) i (11.17b) czas, dostajemy równanie

$$x^2 + \left(y + \frac{v_{0x}}{\omega}\right)^2 = \left(\frac{v_{0x}}{\omega}\right)^2, \quad (11.19)$$

które opisuje okrąg w płaszczyźnie (x, y) o środku w punkcie $\left(0, -\frac{v_{0x}}{\omega}\right)$ i promieniu

$$r := \left|\frac{v_{0x}}{\omega}\right| = \frac{m\gamma v_0 \cos \alpha}{|q|B_0}. \quad (11.20)$$

Okrąg jest obiegany z częstością cyklotronową:

$$\omega_c := |\omega| = \frac{|q|B_0}{m\gamma}, \quad (11.21)$$

okres obiegu okręgu wynosi

$$T_c = 2\pi/\omega_c = 2\pi \frac{m\gamma}{|q|B_0}. \quad (11.22)$$

Jeżeli $v_{0z} \neq 0$, to trajektorią rozwiązania (11.17) jest *linia śrubowa*, której skok opisany jest zależnością

$$v_{0z} \cdot T_c = 2\pi \frac{m\gamma v_0 \sin \alpha}{|q|B_0}. \quad (11.23)$$

Jeżeli $v_{0z} = 0$ (czyli $\alpha = 0$), to

$$x(t) = \frac{v_{0x}}{\omega} \sin \omega t, \quad y(t) = \frac{v_{0x}}{\omega} (\cos \omega t - 1), \quad z(t) = 0; \quad (11.24)$$

cząstka porusza się po okręgu w płaszczyźnie (x, y) .

Jeżeli $v_{0x} = 0$ (czyli $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ lub $\alpha = +\frac{\pi}{2}$), to

$$x(t) = y(t) = 0, \quad z(t) = \pm v_0 t; \quad (11.25)$$

cząstka porusza się ruchem jednostajnym wzdłuż osi z .

XII. MASA NIEZMIENNICZA I UKŁAD ŚRODKA MASY

Rozważmy układ n nieoddziałujących cząstek. W i.u.o. U cząstki te mają energie całkowite $E_1, E_2, \dots, E_n$ oraz pędy $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_n$, w innym i.u.o. U' energie tych cząstek wynoszą $E'_1, E'_2, \dots, E'_n$, natomiast ich pędy to $\vec{p}'_1, \vec{p}'_2, \dots, \vec{p}'_n$.

Wprowadźmy indeks a numerujący różne cząstki: energia cząstki o numerze a to E_a , zaś jej pęd to $\vec{p}_a$, gdzie $a = 1, 2, \dots, n$.

Związek pomiędzy $E_a, \vec{p}_a = (p_{ax}, p_{ay}, p_{az})$ oraz $E'_a, \vec{p}'_a = (p'_{ax'}, p'_{ay'}, p'_{az'})$ określa transformacja Lorentza:

$$\begin{cases} E'_a = \gamma(E_a - u p_{ax}), \\ p'_{ax'} = \gamma(p_{ax} - \frac{u}{c^2} E_a), \\ p'_{ay'} = p_{ay}, \quad p'_{az'} = p_{az}, \end{cases} \quad a = 1, \dots, n. \quad (12.1)$$

Zdefiniujmy całkowitą energię E i całkowity pęd $\vec{P}$ układu cząstek:

$$E := \sum_{a=1}^n E_a, \quad \vec{P} := \sum_{a=1}^n \vec{p}_a, \quad \vec{P} = (P_x, P_y, P_z), \quad (12.2)$$

gdzie

$$P_x = \sum_{a=1}^n p_{ax}, \quad P_y = \sum_{a=1}^n p_{ay}, \quad P_z = \sum_{a=1}^n p_{az}. \quad (12.3)$$

Analogiczne wzory obowiązują w i.u.o. U' .

Dodając równania (12.1) stronami dostajemy

$$\begin{cases} E' = \gamma(E - u P_x), \\ P'_{x'} = \gamma(P_x - \frac{u}{c^2} E), \\ P'_{y'} = P_y, \quad P'_{z'} = P_z. \end{cases} \quad (12.4)$$

Z równań (12.4) wynika, że jeżeli w i.u.o. U energia i pęd układu są zachowane ($E = \text{const}$, $\vec{P} = \text{const}$), to są one również zachowane w i.u.o. U' ($E' = \text{const}$, $\vec{P}' = \text{const}$), o ile obie

te zasady obowiązują jednocześnie. Wskazuje to na to, że obie te zasady zachowania nie są od siebie niezależne.

Z równań (12.4) wynika również, że

$$E^2 - c^2 \vec{P}^2 = E'^2 - c^2 \vec{P}'^2 = \text{const}, \quad (12.5)$$

dlatego wprowadzamy *masę niezmienniczą* (inwariantną) $\mathcal{M}$ układu cząstek za pomocą formuły:

$$E^2 - c^2 \vec{P}^2 = \mathcal{M}^2 c^4, \quad (12.6)$$

czyli

$$\mathcal{M} = \frac{1}{c^2} \sqrt{E^2 - c^2 \vec{P}^2} = \frac{1}{c^2} \sqrt{\left(\sum_{a=1}^n E_a \right)^2 - c^2 \left(\sum_{a=1}^n \vec{p}_a \right)^2}. \quad (12.7)$$

Układ środka masy (ś.m.) definiujemy jako taki i.u.o., w którym całkowity pęd układu jest równy zeru. Prędkość układu ś.m. względem dowolnego i.u.o. wyraża się wzorem

$$\vec{V}_{\text{śm}} = \frac{c^2 \vec{P}}{E}. \quad (12.8)$$

DOWÓD. Niech wektor $\vec{P}$ ma kierunek osi x : $\vec{P} = (P, 0, 0)$, gdzie $P = |\vec{P}|$, czyli $P_x = P$, $P_y = P_z = 0$. Niech i.u.o. U' porusza się z prędkością

$$\vec{u} = \vec{V}_{\text{śm}} = \left(\frac{c^2 P}{E}, 0, 0 \right). \quad (12.9)$$

Wówczas całkowity pęd układu cząstek w i.u.o. U' wynosi:

$$P'_{x'} = \gamma \left(P_x - \frac{u}{c^2} E \right) = \gamma \left(P - \frac{E}{c^2} \frac{c^2 P}{E} \right) = 0, \quad P'_{y'} = P_y = 0, \quad P'_{z'} = P_z = 0, \quad (12.10)$$

zatem i.u.o. U' jest układem ś.m.

Położenie środka masy układu nieoddziałujących cząstek określa wzór

$$\vec{R}_{\text{śm}} = \frac{\sum_{a=1}^n E_a \vec{r}_a}{\sum_{a=1}^n E_a}, \quad (12.11)$$

ponieważ

$$\frac{d\vec{R}_{\text{śm}}}{dt} = \frac{1}{E} \sum_{a=1}^n E_a \vec{v}_a = \frac{c^2}{E} \sum_{a=1}^n m_a \gamma_a \vec{v}_a = \frac{c^2}{E} \vec{P} = \vec{V}_{\text{śm}}. \quad (12.12)$$

W przybliżeniu nierelatywistycznym $E_a = m_a c^2 + E_{ak} \cong m_a c^2$ i

$$\vec{R}_{\text{śm}} \cong \frac{\sum_a m_a c^2 \vec{r}_a}{\sum_a m_a c^2} = \frac{\sum_a m_a \vec{r}_a}{\sum_a m_a}. \quad (12.13)$$

W układzie ś.m. masa niezmiennicza układu cząstek to całkowita energia układu podzielona przez c^2 :

$$\mathcal{M} = \frac{E}{c^2} = \frac{1}{c^2} \sum_{a=1}^n E_a. \quad (12.14)$$

XIII. AKCELERATORY CZĄSTEK ELEMENTARNYCH: WIĄZKI PRZECIWBIEŻNE

Rozważmy zderzenie dwóch protonów (np. w akceleratorze LHC):

$$p + p \longrightarrow X + Y + \dots$$

Jaka część energii zderzających się protonów może zostać zużyta na produkcję nowych cząstek $X, Y, \dots$?

Rozważmy zderzenie w **układzie środka masy**, w którym

$$\underbrace{\vec{p}_1^{\text{śm}} + \vec{p}_2^{\text{śm}}}_{\text{przed zderzeniem}} = \vec{0} = \underbrace{\vec{p}_X^{\text{śm}} + \vec{p}_Y^{\text{śm}} + \dots}_{\text{po zderzeniu}}, \quad (13.1a)$$

$$\underbrace{E_1^{\text{śm}} + E_2^{\text{śm}}}_{\text{przed zderzeniem}} = \underbrace{(m_X + m_Y + \dots)c^2 + (\text{energje kinetyczne})}_{\text{po zderzeniu}}. \quad (13.1b)$$

W układzie środka masy cała energia zderzających się protonów może być zamieniona na energię wewnętrzną cząstek powstałych w wyniku zderzenia, wówczas

$$\Delta E^{\text{śm}} := E_1^{\text{śm}} + E_2^{\text{śm}} = (m_X + m_Y + \dots)c^2 \quad (13.2)$$

i wszystkie cząstki $X, Y, \dots$ spoczywają w układzie ś.m. Energia $\Delta E^{\text{śm}}$ jest zatem energią dostępną w układzie środka masy, czyli energią, która może zostać zużyta na produkcję nowych cząstek.

Rozważmy teraz zderzenie w układzie (nazwiemy go układem laboratorium), w którym jeden z protonów spoczywa. Jaką energię musi mieć, względem laboratorium, drugi proton, aby energia dostępna w układzie środka masy była równa $\Delta E^{\text{śm}}$? Zapiszmy tę wielkość w następującej postaci:

$$\Delta E^{\text{śm}} = E_1^{\text{śm}} + E_2^{\text{śm}} = \sqrt{(E_1^{\text{śm}} + E_2^{\text{śm}})^2 - c^2(\vec{p}_1^{\text{śm}} + \vec{p}_2^{\text{śm}})^2}. \quad (13.3)$$

Ponieważ ostatnie wyrażenie jest niezmiennikiem transformacji Lorentza, możemy je zapisać w układzie laboratorium

$$\Delta E^{\text{śm}} = \sqrt{(E^{\text{lab}} + m_p c^2)^2 - c^2(\vec{p}^{\text{lab}})^2}. \quad (13.4)$$

Korzystając z $(E^{\text{lab}})^2 = c^2(\vec{p}^{\text{lab}})^2 + (m_p c^2)^2$ eliminujemy $(\vec{p}^{\text{lab}})^2$:

$$\Delta E^{\text{śm}} = \sqrt{2m_p c^2(E^{\text{lab}} + m_p c^2)}, \quad (13.5)$$

skąd obliczamy E^{lab} :

$$E^{\text{lab}} = \frac{(\Delta E^{\text{śm}})^2}{2m_p c^2} - m_p c^2. \quad (13.6)$$

W detektorze LHC każdy ze zderzających się protonów ma poruszać się względem laboratorium, które jest jednocześnie układem środka masy zderzających się protonów, z energią $E_1^{\text{śm}} \cong 7 \text{ TeV}$ ($1 \text{ TeV} = 10^{12} \text{ eV} = 1000 \text{ GeV}$, $1 \text{ eV} = 1 \text{ e} \cdot 1 \text{ V} \cong 1,602 \times 10^{-19} \text{ J}$), zatem $\Delta E^{\text{śm}} = 2E_1^{\text{śm}} \cong 14 \text{ TeV}$.

Taką samą dostępną energię można by uzyskać, uderzając w nieruchomy proton protonem o energii

$$\frac{(\Delta E^{\text{śm}})^2}{2m_p c^2} - m_p c^2 \cong \frac{(\Delta E^{\text{śm}})^2}{2m_p c^2} \cong 10^5 \text{ TeV} \quad (13.7)$$

(energia spoczynkowa protonu $m_p c^2 = 938,3 \text{ MeV}$).

XIV. KREACJA PARY CZĄSTKA–ANTYCZĄSTKA

Zasady zachowania energii i pędu rządzą przebiegiem reakcji jądrowych i wszelkich reakcji z udziałem cząstek elementarnych. Rozważmy kreację pary elektron–pozyton przez kwant promieniowania γ :

$$\gamma \longrightarrow e^+ + e^-.$$

Z zasady zachowania energii wynika, że reakcja ta mogłaby zajść, gdyby

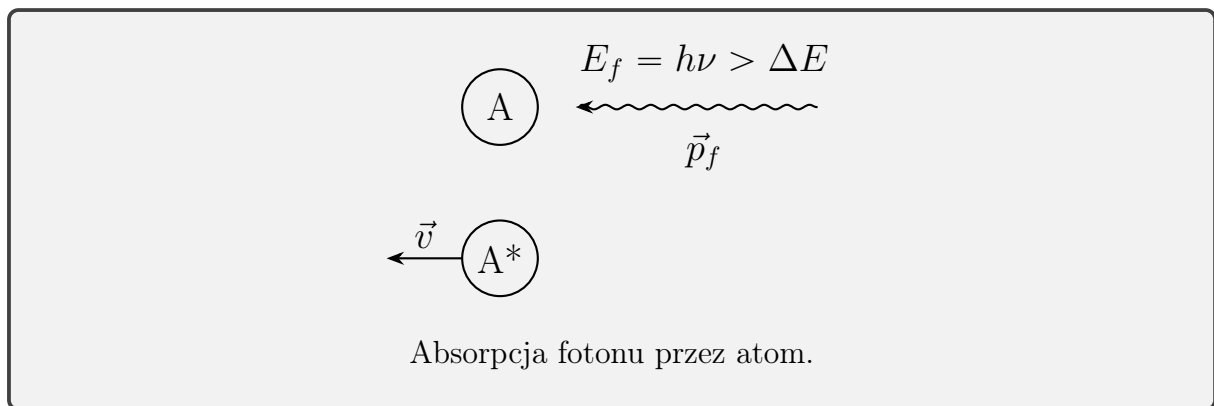
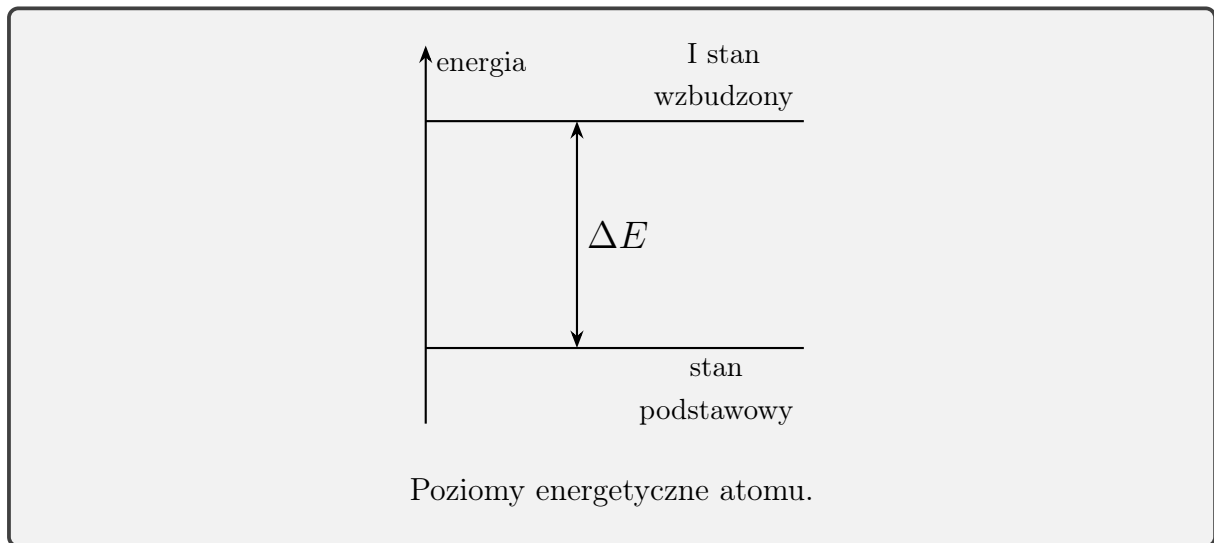
$$E_\gamma \geq 2m_e c^2 \cong 1,02 \text{ MeV}.$$

Taka reakcja nie może jednak zajść w próżni, gdyż pogwałciłaby ona zasadę zachowania pędu: w układzie środka masy pary elektron–pozyton $\vec{p}_{e^-} + \vec{p}_{e^+} = \vec{0}$, natomiast $\vec{p}_\gamma \neq \vec{0}$, bo w żadnym układzie odniesienia pęd fotonu nie może być zerem.

Reakcja kreacji może nastąpić w sąsiedztwie innej cząstki, np. jądra atomu.

XV. WZBUDZANIE ATOMÓW PRZEZ FOTONY

Atom w stanie podstawowym ma masę spoczynkową m_A , energia wzbudzenia atomu do I-go stanu wzbudzonego równa się ΔE . Jaką energię musi mieć co najmniej foton, aby w zderzeniu ze spoczywającym atomem (w stanie podstawowym) spowodować przejście tego atomu do stanu wzbudzonego? Taką energię możemy nazwać *energiją progową* fotonu. Układ odniesienia, w którym atom spoczywa przed zderzeniem z fotonem, nazwijmy układem laboratorium.



Foton o najmniejszej możliwej energii (czyli o energii progowej) po pochłonięciu przez atom spowoduje powstanie atomu wzbudzonego, który będzie spoczywał w układzie środka masy. Masa niezmiennicza w układzie ś.m.:

$$\mathcal{M} = \frac{1}{c^2} \sqrt{(\text{całkowita energia})^2 - c^2(\text{całkowity pęd})^2}$$

$$= \frac{1}{c^2}(\text{całkowita energia}) = \frac{1}{c^2}(m_A c^2 + \Delta E) = m_A + \frac{\Delta E}{c^2}; \quad (15.1)$$

masa niezmiennicza w układzie laboratorium przed zderzeniem:

$$\mathcal{M} = \frac{1}{c^2} \sqrt{(E_f + m_A c^2)^2 - c^2 \vec{p}_f^2} = \frac{1}{c^2} \sqrt{2E_f m_A c^2 + m_A^2 c^4}; \quad (15.2)$$

zatem

$$m_A + \frac{\Delta E}{c^2} = \frac{1}{c^2} \sqrt{2E_f m_A c^2 + m_A^2 c^4}, \quad (15.3)$$

skąd

$$E_f = \Delta E \left(1 + \frac{\Delta E}{2m_A c^2} \right). \quad (15.4)$$

Widzimy zatem, że *energia progowa fotonu jest większa od energii wzbudzenia atomu*.

Masę niezmienniczą

$$\mathcal{M} = m_A + \frac{\Delta E}{c^2} \quad (15.5)$$

możemy interpretować jako *masę spoczynkową atomu w stanie wzbudzenia*. Interpretację taką potwierdza również zastosowanie zasad zachowania energii i pędu w układzie laboratorium (w którym niewzbudzony atom A spoczywa).

Zasada zachowania energii:

$$E_A + E_f = E_{A*}, \quad (15.6)$$

gdzie E_{A*} oznacza energię całkowitą a tomu wzbudzonego A^* ,

$$E_A = m_A c^2, \quad E_{A*} = \sqrt{c^2 \vec{p}_{A*}^2 + m_{A*}^2 c^4}. \quad (15.7)$$

Zasada zachowania pędu:

$$\vec{p}_f = \vec{p}_{A*} \implies p_f = p_{A*} \quad (p_f = |\vec{p}_f|, p_{A*} = |\vec{p}_{A*}|). \quad (15.8)$$

Równość modułów pędu fotonu i atomu po zderzeniu zapisujemy za pomocą energii:

$$\frac{E_f}{c} = \frac{1}{c} \sqrt{E_{A*}^2 - m_{A*}^2 c^4}. \quad (15.9)$$

Do powyższego równania podstawiamy energię E_{A*} obliczoną z równania (15.6):

$$E_f^2 = (E_A + E_f)^2 - m_{A*}^2 c^4, \quad (15.10)$$

skąd obliczamy masę m_{A*} :

$$m_{A*}^2 c^4 = E_A(E_A + 2E_f) \implies m_{A*} = \sqrt{m_A \left(m_A + \frac{2E_f}{c^2} \right)}. \quad (15.11)$$

Podstawiając tutaj równanie (15.4) dostajemy

$$m_{A*} = m_A + \frac{\Delta E}{c^2}. \quad (15.12)$$