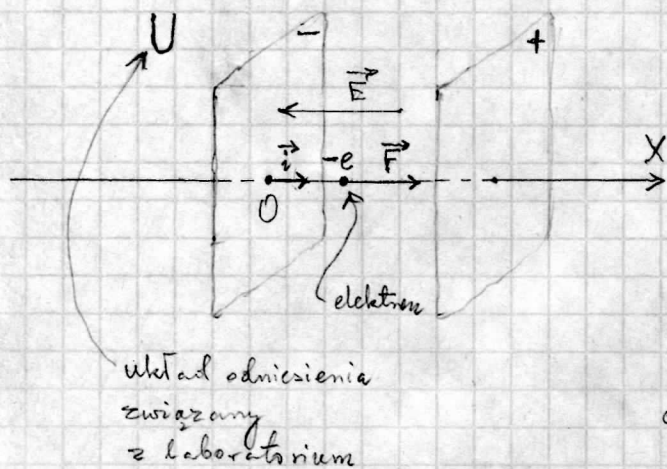


Dynamika relatywistyczna

Ruch cząstki naładowanej (np. elektronu) w jednorodnym i statycznym w czasie polu elektrycznym



Zgodnie z mechaniką newtonowską:

$$m\vec{a} = \vec{F} = q\vec{E} = -e\vec{E},$$

gdzie m jest masą elektronu,
 $q = -e$ ($e > 0$) jego ładunkiem,
 $\vec{E}$ jest wektorem natężenia pola elektrycznego;

$$\vec{a} = a_x \vec{i}, \quad \vec{E} = -E \vec{i} \quad (E = |\vec{E}| > 0),$$

$$m a_x \vec{i} = -e(-E \vec{i}) = +eE \vec{i} \Rightarrow m a_x = eE,$$

czyli $a_x = \frac{eE}{m} = \text{const}$, elektron porusza się ze statycznym przyspieszeniem, zatem

$$v_x(t) = v_{0x} + a_x t,$$

$$x(t) = x_0 + v_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2.$$

Jeśli $t \rightarrow \infty$, to $v_x(t) \rightarrow \infty$, zatem rozwinięcie $\vec{F} = m\vec{a}$ jest sprzeczne ze STW:
konieczne jest relatywistyczne uogólnienie II zasady dynamiki Newtona.

Niech cząstka w chwili t ma względem i.u.o. U chwilową prędkość $v_x(t)$.
Wprowadźmy i.u.o. U' poruszający się względem U z prędkością $v_x(t)$,
niech zdarzeniu (t, x) odpowiadające w układzie U' zdarzenie (t', x') .

Dla niewielkiego przedziału czasu $\Delta t'$ (mierzonego w U' od chwili t') możemy zastosować II zasadę dynamiki Newtona, gdyż w U' cząstka rozpada się od prędkości zerowej w chwili t' do niewielkiej prędkości $\Delta v'_{x'} \ll c$ w chwili $t' + \Delta t'$.
Dlatego

$$\Delta v'_{x'} = a'_{x'} \Delta t' + \underbrace{O((\Delta t')^2)}_{\text{poprawka relatywistyczna kwadratowa w } \Delta t'}, \quad \text{gdzie } a'_{x'} = \frac{eE'}{m}, \quad E' \text{ jest wartością pola elektrycznego w } U'.$$

W ciągu czasu $\Delta t'$ współrzędna x' cząstki zmieni się w U' o wielkość

$$\Delta x' = \frac{1}{2} a'_{x'} (\Delta t')^2 + O((\Delta t')^3).$$

W i.u.o. U przyrost prędkości Δv_x cząstki w czasie Δt (odpowiadającym czasowi $\Delta t'$ w układzie U') obliczymy korzystając z relatywistycznego prawa dodawania prędkości. Prędkość cząstki w chwili $t + \Delta t$ względem układu U :

$$v_x(t + \Delta t) = v_x(t) + \Delta v_x = \frac{v_x(t) + \Delta v'_{x'}}{1 + \frac{v_x(t) \Delta v'_{x'}}{c^2}} \Rightarrow \Delta v_x = \frac{\left[1 - \frac{(v_x(t))^2}{c^2}\right] \Delta v'_{x'}}{1 + \frac{v_x(t) \Delta v'_{x'}}{c^2}}.$$

Rozwijając prawą stronę wzoru na Δv_x względem małej wielkości $\Delta v_{x'}$ dostajemy

$$\Delta v_x = \left[1 - \frac{(v_x(t))^2}{c^2} \right] \Delta v_{x'} + \mathcal{O}((\Delta v_{x'})^2),$$

czyli $\Delta v_x = \left[1 - \frac{(v_x(t))^2}{c^2} \right] \Delta v_{x'} + \mathcal{O}((\Delta t')^2)$, bo $\Delta v_{x'} = \mathcal{O}(\Delta t')$.

Korzystając z transformacji Lorentza znajdujemy związek pomiędzy odstępami czasu Δt i $\Delta t'$:

$$\begin{aligned} \Delta t = t_2 - t_1 &= \gamma \left(t_2' + \frac{u}{c^2} x_2' \right) - \gamma \left(t_1' + \frac{u}{c^2} x_1' \right) \\ &= \gamma \left[(t_2' - t_1') + \frac{u}{c^2} (x_2' - x_1') \right] = \gamma \left(\Delta t' + \frac{u}{c^2} \Delta x' \right), \end{aligned}$$

w naszym przypadku $u = v_x(t)$, zatem

$$\Delta t = \frac{\Delta t' + \frac{v_x(t)}{c^2} \Delta x'}{\sqrt{1 - \frac{(v_x(t))^2}{c^2}}} = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{(v_x(t))^2}{c^2}}} + \mathcal{O}((\Delta t')^2), \text{ ponieważ } \Delta x' = \mathcal{O}((\Delta t')^2).$$

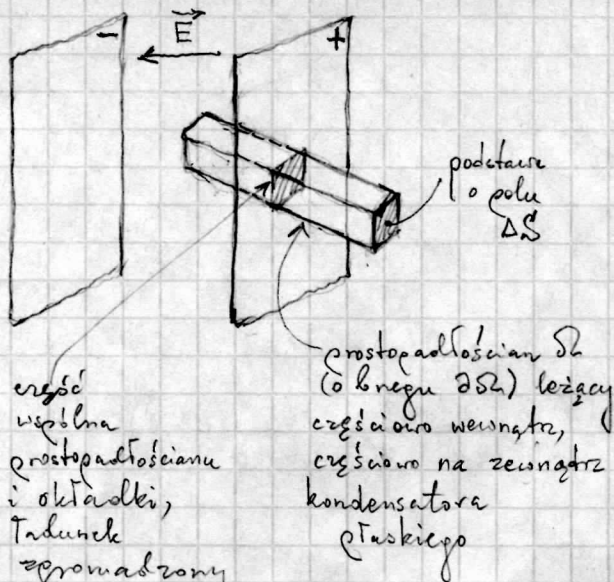
Zauważmy, że jeśli $\Delta t \rightarrow 0$, to również $\Delta t' \rightarrow 0$.

Przyspieszenie cząstki względem układu U wynosi:

$$\begin{aligned} a_x &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t' \rightarrow 0} \frac{\left[1 - \frac{(v_x(t))^2}{c^2} \right] \Delta v_{x'} + \mathcal{O}((\Delta t')^2)}{\frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{(v_x(t))^2}{c^2}}} + \mathcal{O}((\Delta t')^2)} \\ &= \lim_{\Delta t' \rightarrow 0} \frac{\left[1 - \frac{(v_x(t))^2}{c^2} \right] \frac{\Delta v_{x'}}{\Delta t'} + \mathcal{O}(\Delta t')}{\left[1 - \frac{(v_x(t))^2}{c^2} \right]^{-1/2} + \mathcal{O}(\Delta t')} \\ &= \lim_{\Delta t' \rightarrow 0} \left\{ \left[1 - \frac{(v_x(t))^2}{c^2} \right]^{3/2} \frac{\Delta v_{x'}}{\Delta t'} + \mathcal{O}(\Delta t') \right\} \\ &= \left[1 - \frac{(v_x(t))^2}{c^2} \right]^{3/2} a'_{x'} = \left[1 - \frac{(v_x(t))^2}{c^2} \right]^{3/2} \frac{e}{m} E', \end{aligned}$$

gdzie skorytowaliśmy z tego, że dla małych x ($|x| \ll 1$):

$$\frac{a+x}{b+x} = \frac{a}{b} + \frac{b-a}{b^2} x + \mathcal{O}(x^2).$$



Pokażemy teraz, że $E' = E$.

Z prawa Gaussa w i.u.o. U:

$$\oint_{\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \Delta S = \frac{1}{\epsilon_0} \Delta Q \Rightarrow E = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\Delta Q}{\Delta S}.$$

W i.u.o. U' można też rozważyć prostopadłościan o podstawie ΔS spoczywający w tym układzie. Względem U' okładka kondensatora ma prędkość $-v_x(t)$. W prawie Gaussa nie się jednak nie musi o prędkości ładunków wewnątrz zamkniętej powierzchni ∂S — jest ono słuszne niezależnie od tego, czy ładunki we wnętrzu prostopadłościanu spoczywają, czy są w ruchu.

Zatem z prawa Gaussa zastosowanego w układzie U' wynika, że

$$E' \Delta S = \frac{1}{\epsilon_0} \Delta Q \Rightarrow E' = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\Delta Q}{\Delta S} = E.$$

Ostatecznie przyspieszenie cząstki względem układu U wynosi

$$a_x(t) = \frac{eE}{m} \left(1 - \frac{v_x(t)^2}{c^2} \right)^{3/2}$$

Widać, że dla $v_x(t) \ll c$ przyspieszenie $a_x(t) \approx \frac{eE}{m} = \text{const}$,

natomiast gdy $v_x(t) \rightarrow c$, to $a_x(t) \rightarrow 0$:

powoduje to, że prędkość światła c nie jest przez cząstkę nigdy osiągnięta, nawet w wyniku dowolnie długiego rozpędzania.

Równanie ruchu cząstki można przepisać w postaci:

$$\frac{m a_x(t)}{\left(1 - \frac{v_x(t)^2}{c^2} \right)^{3/2}} = eE. \quad \text{Z pomocą bezpośredniego rachunku można pokazać}$$

$$\text{że } \frac{d}{dt} \frac{m v_x(t)}{\sqrt{1 - \frac{v_x(t)^2}{c^2}}} = \frac{m}{\left(\sqrt{1 - \frac{v_x(t)^2}{c^2}} \right)^3} \frac{dv_x(t)}{dt} = \frac{m a_x(t)}{\left(\sqrt{1 - \frac{v_x(t)^2}{c^2}} \right)^3},$$

Zatem relatywistyczne równanie ruchu w polu elektrycznym (z pominięciem oddziaływań do tego pola) ma postać

$$\frac{d}{dt} \frac{m \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = e\vec{E}. \quad (*)$$

Można pokazać, że w dowolnym polu elektromagnetycznym (o natężeniu pola elektrycznego $\vec{E}$ i indukcji magnetycznej $\vec{B}$) i dla dowolnego kierunku wektora prędkości (względem pól $\vec{E}$ i $\vec{B}$), równanie ruchu cząstki o ładunku elektrycznym q ma postać

$$\frac{d}{dt} \frac{m \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \boxed{q \vec{E} + q \vec{v} \times \vec{B}} \quad \leftarrow \text{sta Lorentza} \quad (**)$$

Na powyższym obnawianiu opiera się działanie akceleratorów cząstek elementarnych, takich jak LHC znajdujący się w ośrodku CERN. Ma on min. przyspieszać protony do prędkości bliskich dla których czynnik Lorentza $\gamma \approx 7.500$ (co odpowiada prędkości $v \approx 0,999999991 c$). ($\gamma^3 \approx 420 \cdot 10^3$)

Zakładając, że $v_x(t=0) = 0$ oraz $x(t=0) = 0$, z równania ruchu (*) otrzymujemy (wykonując kolejne dwa całkowania względem czasu):

$$v_x(t) = \frac{a_0 t}{\sqrt{1 + \frac{a_0^2 t^2}{c^2}}}, \quad \text{gdzie } a_0 := \frac{eE}{m} \text{ jest przyspieszeniem cząstki w układzie współrzędnych się z cząstką;}$$

$$x(t) = \frac{c^2}{a_0} \left(\sqrt{1 + \frac{a_0^2 t^2}{c^2}} - 1 \right).$$

Widać, że

$$v_x(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{a_0 t}{\sqrt{\frac{a_0^2 t^2}{c^2}}} = a_0 t \frac{c}{a_0 t} = c.$$

Natomiast dla chwil t takich, że $a_0 t \ll c$:

$$v_x(t) \approx a_0 t,$$

$$x(t) \approx \frac{c^2}{a_0} \left(1 + \frac{a_0^2 t^2}{2c^2} - 1 \right) = \frac{1}{2} a_0 t^2.$$

Występując po lewej stronie relatywistycznego równania ruchu (xx) wyrażenie $m_0 \vec{v} / \sqrt{1-v^2/c^2}$ zastępuje pęd cząstki $\vec{p}$ w analogicznym równaniu nie-relatywistycznym. Wyrażenie to definiuje pęd cząstki w STW:

$$\vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

Doświadczenia potwierdzają, że tak zdefiniowany pęd jest wielkością zachowaną podczas zderzeń cząstek.

Pojawiający się w definicji pędu γ czynnik Lorentza $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2/c^2}$ jest funkcją modułu prędkości cząstki: $\gamma = \gamma(v)$.

Funkcję $\gamma(v)$ możemy rozwinąć w szereg Taylora wokół $v=0$:

$$\begin{aligned} \gamma(v) &= \gamma(0) + \gamma'(0)v + \frac{1}{2} \gamma''(0)v^2 + \frac{1}{3!} \gamma'''(0)v^3 + \dots \\ &= 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c} \right)^2 + \frac{3}{8} \left(\frac{v}{c} \right)^4 + O(v^6); \end{aligned}$$

dlatego możemy napisać:

$$\vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = m_0 \vec{v} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c} \right)^2 + \frac{3}{8} \left(\frac{v}{c} \right)^4 + O(v^6) \right].$$

pęd newtonowski

1sza poprawka relatywistyczna

poprawka relatywistyczna wyższego rzędu

szereg w rozwinięciu Taylora

Dość często wprowadza się pojęcie relatywistycznej masy cząstki, która zależy od prędkości:

$$m_r = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}},$$

wówczas pęd cząstki można napisać w postaci $\vec{p} = m_r \vec{v}$.

Widać, że $m_r = m_0$ dla $v=0$, dlatego m nazywa się masą spoczynkową cząstki.

Często masę spoczynkową oznacza się przez m_0 , zaś masę relatywistyczną przez m_r .

Energia kinetyczna

Energia kinetyczna cząstki definiujemy ządając, by energia kinetyczna cząstki spoczywającej była równa zero, natomiast zmiana energii kinetycznej cząstki w przedziale czasu $\langle t_1; t_2 \rangle$ jest równa pracy wykonanej przez wypadkową siłę działającą na cząstkę w tym przedziale czasu:

$$\Delta E_k = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \vec{v} dt.$$

Zamiast przedziału $\langle t_1; t_2 \rangle$ rozważmy przedział $\langle t; t+\Delta t \rangle$ o bardzo małej długości Δt :

$$\Delta E_k = \int_t^{t+\Delta t} \vec{F} \cdot \vec{v} dt \cong \vec{F} \cdot \vec{v} \Delta t \implies \frac{\Delta E_k}{\Delta t} \cong \vec{F} \cdot \vec{v},$$

wzorem biorąc granicę $\Delta t \rightarrow 0$: $\frac{dE_k}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta E_k}{\Delta t} = \vec{F} \cdot \vec{v}$.

Relatywistyczne równanie ruchu można zapisać w postaci

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}, \text{ gdzie } \vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}},$$

dlatego $\frac{dE_k}{dt} = \vec{v} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{v} \cdot \frac{d}{dt} \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$

Można pokazać, że $\vec{v} \cdot \frac{d}{dt} \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{d}{dt} \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}},$

a zatem $0 = \frac{dE_k}{dt} - \frac{d}{dt} \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{d}{dt} \left(E_k - \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right),$

stąd $E_k = C + \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}},$ gdzie $C = \text{const.}$

Ale $E_k = 0$ dla $v=0$, dlatego $C = -mc^2$ i ostatecznie

$$\underline{E_k = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - mc^2.}$$

Widzimy, że E_k jest funkcją modułu v prędkości $\vec{v}$ cząstki, $E_k = E_k(v)$.

Rozwinijmy funkcję $E_k(v)$ w szereg Taylora wokół $v=0$:

$$\begin{aligned} E_k(v) &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{3}{8}m\frac{v^4}{c^2} + \mathcal{O}(v^6) \\ &= \frac{1}{2}mv^2 \left[1 + \frac{3}{4}\frac{v^2}{c^2} + \mathcal{O}(v^4) \right]. \end{aligned}$$

Zasada zachowania energii

Energia całkowita ciała swobodnego jest sumą jego energii kinetycznej oraz energii wewnętrznej. Postulujemy, że w STW spełniona jest zasada zachowania energii całkowitej.

Rozważmy zderzenie s ciałek, w wyniku którego pojawia się s (być może innych) ciałek, zasada zachowania energii całkowitej pociąga, że

$$\sum_{i=1}^s (E_{k,i} + \tilde{w}_i) = \sum_{j=1}^s (\tilde{E}_{k,j} + \tilde{\tilde{w}}_j).$$

$\nwarrow$ energia kinetyczna i-tych ciałek przed zderzeniem
 $\nwarrow$ energia wewnętrzna i-tych ciałek przed zderzeniem
 $\nwarrow$ energia kinetyczna i energia wewnętrzna j-tych ciałek po zderzeniu

Rozważmy, dla uproszczenia rachunków, sytuację, w której wszystkie ciała przed i po zderzeniu poruszają się wzdłuż osi x pewnego i.u.o. U . Względem innego i.u.o. U' ciała, która w układzie U porusza się z prędkością $\vec{v}_i$, ma prędkość $\vec{v}'_i$,

$$\vec{v}_i = v_{ix} \vec{e}, \quad \vec{v}'_i = v'_{ix} \vec{e}', \quad v_{ix} = \frac{v'_{ix} + u}{1 + \frac{u v'_{ix}}{c^2}}.$$

$\uparrow$ wektor osi x w i.u.o. U
 $\uparrow$ wektor osi x' w i.u.o. U'

Dalej będziemy pisać v_i zamiast v_{ix} oraz v'_i zamiast v'_{ix} ,

czyli $v_i = \frac{v'_i + u}{1 + \frac{u v'_i}{c^2}}$. Wprowadźmy oznaczenie $E_i := \frac{m_i c^2}{\sqrt{1 - v_i^2/c^2}}$,

wówczas $E_{k,i} = \frac{m_i c^2}{\sqrt{1 - v_i^2/c^2}} - m_i c^2 = E_i - m_i c^2$.

Można pokazać, że

$$E_i = \frac{m_i c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_i^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \left(\frac{m_i c^2}{\sqrt{1 - \frac{v'^2_i}{c^2}}} + u \frac{m_i v'_i}{\sqrt{1 - \frac{v'^2_i}{c^2}}} \right) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} (E'_i + u p'_i). \quad (1)$$

$\nwarrow$ składowa p'_i podzieli ciałki wzdłuż osi x' układu U'

Zasady zachowania energii całkowitej można zapisać w układzie U oraz w układzie U' :

w U :
$$\sum_{i=1}^s (E_i + \tilde{w}_i - m_i c^2) = \sum_{j=1}^s (\tilde{E}_j + \tilde{\tilde{w}}_j - \tilde{m}_j c^2), \quad (2)$$

w U' :
$$\sum_{i=1}^s (E'_i + \tilde{w}_i - m_i c^2) = \sum_{j=1}^s (\tilde{E}'_j + \tilde{\tilde{w}}_j - \tilde{m}_j c^2). \quad (3)$$

W równaniu (2), korzystając z (1), wyrażamy E_i oraz $\tilde{E}_j$ przez E'_i, p'_i oraz $\tilde{E}'_j, \tilde{p}'_j$.

Otrzymane równanie upraszczamy ze pomocą (3). Dostajemy

$$\sum_{i=1}^r p_i' - \sum_{j=1}^s \tilde{p}_j' = \frac{\sqrt{1-u^2/c^2}-1}{u/c} \left(\sum_{j=1}^s (\tilde{w}_j - \tilde{m}_j c^2) - \sum_{i=1}^r (w_i - m_i c^2) \right).$$

Równości tej, em ustalonych pędach p_i' oraz $\tilde{p}_j'$, musi być prawdziwa dla dowolnej wartości u , dlatego lewa i prawa strona tej równości muszą z osobna być równe zeru:

$$\sum_{i=1}^r p_i' = \sum_{j=1}^s \tilde{p}_j' \quad \text{— zasada zachowania pędu,}$$

$$\sum_{i=1}^r (w_i - m_i c^2) = \sum_{j=1}^s (\tilde{w}_j - \tilde{m}_j c^2), \quad \text{co podstawiamy do równania (2),}$$

leżąc upraszcza się do

$$\sum_{i=1}^r E_i = \sum_{j=1}^s \tilde{E}_j.$$

Równanie to można zapisać w postaci:

$$\sum_{i=1}^r (E_{k,i} + m_i c^2) = \sum_{j=1}^s (\tilde{E}_{k,j} + \tilde{m}_j c^2),$$

lub jeszcze inaczej:

$$\Delta E_k = -(\Delta m) c^2, \quad \text{gdzie } \Delta E_k = \sum_{j=1}^s \tilde{E}_{k,j} - \sum_{i=1}^r E_{k,i},$$

$$\Delta m = \sum_{j=1}^s \tilde{m}_j - \sum_{i=1}^r m_i.$$

Wzrost (ubytok) energii kinetycznej zderzających się cząstek pochodzi całkowicie od ubytku (lub wzrostu) sumy mas cząstek mnożonej przez c^2 . Oznacza to, że energia wewnętrzna cząstek jest

$$w_i = m_i c^2,$$

natomiast jej energia całkowita to $E_i = \frac{m_i c^2}{\sqrt{1-v_i^2/c^2}};$

czyli $E_i = E_{k,i} + m_i c^2$.

Energia całkowita pojedynczej cząstki o masie m i prędkości $\vec{v}$ zależy od $w = |\vec{v}|$,

$$E(v) = \frac{m c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}},$$

energia spoczynkowa (czyli wewnętrzna) cząstki jest $E(0) = m c^2$,

zab energię kinetyczną możemy obliczyć tak: $E_k = E(v) - E(0)$.

Wzór $E(0) = m c^2$ nazywa się wzorem Einsteina.

Energia, pęd i masa

Rozważmy cząstkę o masie m , która w pewnym i.u.o. $\mathcal{L}$ ma energię E oraz pęd $\vec{p}$, obliczmy

$$\frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = \frac{m^2 c^2}{1-v^2/c^2} - \frac{m^2 v^2}{1-v^2/c^2} = m^2 c^2.$$

Wrażenie $E^2/c^2 - \vec{p}^2$ zależy tylko od masy m cząstki, nie zależy natomiast od prędkości $\vec{v}$ cząstki, dlatego jest ona niezmiennością: jego wartość jest taka sama we wszystkich i.u.o.

Jeśli w jakimś innym i.u.o. $\mathcal{L}'$ ta sama cząstka ma energię E' i pęd $\vec{p}'$, to

$$\frac{E'^2}{c^2} - \vec{p}'^2 = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = m^2 c^2.$$

Związek pomiędzy energią całkowitą E cząstki, jej pędem $\vec{p}$ i masą m można zapisać też w postaci

$$E^2 = c^2 \vec{p}^2 + (mc^2)^2, \quad \text{gdzie} \quad E = \sqrt{c^2 \vec{p}^2 + (mc^2)^2}.$$

Można pokazać, że pomiędzy wielkościami $E/c, p_x, p_y, p_z$ (gdzie p_x, p_y, p_z są współrzędnymi wektora pędu cząstki) i wielkościami $E'/c, p'_x, p'_y, p'_z$ zachodzą takie same związki, jak pomiędzy współrzędnymi $x^0 = ct, x, y, z$ i współrzędnymi $x'^0 = ct', x', y', z'$:

$$\frac{E'}{c} = \gamma \left(\frac{E}{c} - \frac{u}{c} p_x \right), \quad p'_x = \gamma \left(p_x - \frac{u}{c} \frac{E}{c} \right), \quad p'_y = p_y, \quad p'_z = p_z, \quad (*)$$

gdzie $\gamma = 1/\sqrt{1-u^2/c^2}$. Inaczej mówiąc, wielkości $E/c, p_x, p_y, p_z$ transformują się przy zmianie i.u.o. tak, jak współrzędne czasoprzestrzenne. Każde drugie wielkości o tej własności są współrzędnymi pewnego czterowektora.

$\left(\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z \right)$ są współrzędnymi czterowektora energii-pędu cząstki, natomiast (ct, x, y, z) są współrzędnymi czerwotora położenia cząstki.

Prawa transformacyjne (*) potwierdzają, że wyrażenie $E^2/c^2 - \vec{p}^2$ jest niezmienniczością.

Obliczmy teraz

$$\frac{|\vec{p}|}{E} = \frac{|\vec{v}|}{c}. \quad \text{Jednak teraz ma dobre określone granice, gdy } |\vec{v}| \rightarrow c:$$

$$\frac{|\vec{p}|}{E} \xrightarrow{|\vec{v}| \rightarrow c} \frac{1}{c}, \quad \text{czyli} \quad E \xrightarrow{|\vec{v}| \rightarrow c} |\vec{p}|c.$$

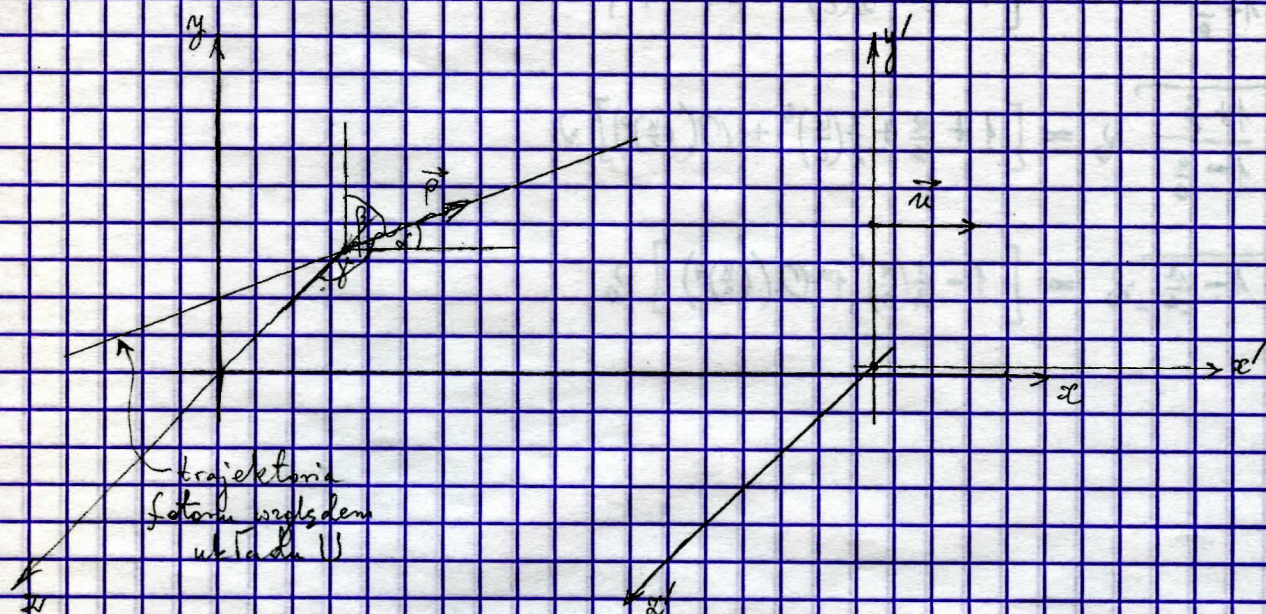
Dlatego przyjmujemy, że dla cząstek poruszających się z prędkością światła (np. fotonów)

$$E = |\vec{p}|c.$$

Wynika stąd, że $m^2 c^2 = E^2/c^2 - \vec{p}^2 = 0$, zatem $m = 0$.

masa spoczynkowa fotonu wynosi zero.

Zjawisko Dopplera



α, β, γ - kąty kierunkowe wektora pędu $\vec{p}$ fotonu:

$$p_x = |\vec{p}| \cos \alpha, \quad p_y = |\vec{p}| \cos \beta, \quad p_z = |\vec{p}| \cos \gamma \quad (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1),$$

energia fotonu względem układu U: $E = |\vec{p}|c$,

względem układu U' energia tego fotonu wynosi E' ,

$$\begin{aligned} \frac{E'}{c} &= \gamma \left(\frac{E}{c} - \frac{u}{c} p_x \right) \\ &= \gamma \left(\frac{E}{c} - \frac{u}{c} |\vec{p}| \cos \alpha \right) \\ &= \gamma \frac{E}{c} \left(1 - \frac{u}{c} \cos \alpha \right), \end{aligned}$$

$$E = h\nu, \quad E' = h\nu', \quad \nu' = \gamma \left(1 - \frac{u}{c} \cos \alpha \right) \nu,$$

$$\nu = \frac{\sqrt{1 - u^2/c^2}}{1 - \frac{u}{c} \cos \alpha} \nu'.$$

Miech źródło promieniowania spoczywa względem układu U', wówczas $\nu' = \nu_0$ jest ustalony się promieniowania w układzie własnym źródła.

(i) Źródło oddala się radialnie z prędkością u ($u > 0$):

$$\alpha = \pi, \quad \nu = \frac{\sqrt{1 - u^2/c^2}}{1 + u/c} \nu_0 = \sqrt{\frac{1 - u/c}{1 + u/c}} \nu_0 < \nu_0 \text{ — przesunięcie ku czerwieni};$$

(ii) Źródło zbliża się radialnie z prędkością u ($u > 0$):

$$u \rightarrow -u, \quad \alpha = \pi, \quad \nu = \frac{\sqrt{1 - u^2/c^2}}{1 - u/c} \nu_0 = \sqrt{\frac{1 + u/c}{1 - u/c}} \nu_0 > \nu_0 \text{ — przesunięcie ku fioletowi};$$

(iii) Źródło porusza się prostopadle względem kierunku, z którego nadlatuje foton (poprzeczne zjawisko Dopplera):

$$\alpha = \frac{\pi}{2}, \quad \nu = \sqrt{1 - u^2/c^2} \nu_0 < \nu_0.$$

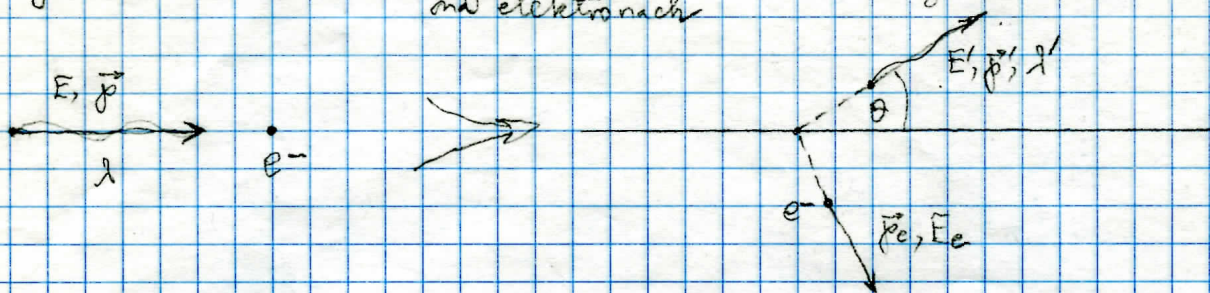
$$(i) \quad v = \sqrt{\frac{1 - \frac{u}{c}}{1 + \frac{u}{c}}} v_0 = \left[1 - \frac{u}{c} + \frac{1}{2} \left(\frac{u}{c} \right)^2 + O \left(\left(\frac{u}{c} \right)^3 \right) \right] v_0$$

$$(ii) \quad v = \sqrt{\frac{1 + \frac{u}{c}}{1 - \frac{u}{c}}} v_0 = \left[1 + \frac{u}{c} + \frac{1}{2} \left(\frac{u}{c} \right)^2 + O \left(\left(\frac{u}{c} \right)^3 \right) \right] v_0$$

$$(iii) \quad v = \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} v_0 = \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{u}{c} \right)^2 + O \left(\left(\frac{u}{c} \right)^4 \right) \right] v_0$$

Przykład zastosowania praw zachowania pędu i energii

Zjawisko Comptona: rozpraszanie promieni rentgenowskich na elektronach



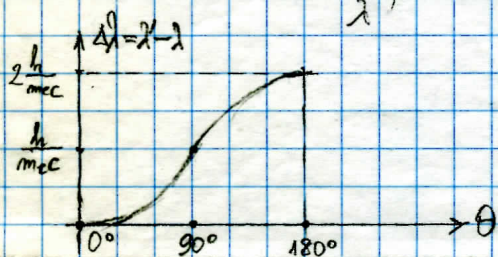
Zasada zachowania energii i pędu:

$$\begin{cases} \vec{p} = \vec{p}' + \vec{p}_e, \\ E + m_e c^2 = E' + E_e, \end{cases}$$

$$E = \hbar \omega / c, \quad E' = \hbar \omega' / c, \quad E_e = \sqrt{|\vec{p}_e|^2 c^2 + m_e^2 c^4}$$

$$\frac{1}{E'} - \frac{1}{E} = \frac{1}{m_e c^2} (1 - \cos \theta),$$

$$E = \frac{\hbar c}{\lambda}, \quad E' = \frac{\hbar c}{\lambda'}, \quad \underline{\underline{\lambda' - \lambda = \frac{\hbar}{m_e c} (1 - \cos \theta) = \lambda_c (1 - \cos \theta)}},$$



gdzie $\lambda_c := \frac{\hbar}{m_e c} = 0,0243 \text{ \AA}$ — komptonowska długość fali elektronu.

Transformacja siły

Niech $\vec{F}$ będzie siłą działającą na cząstkę w i.u.o. U , natomiast $\vec{F}'$ siłą działającą na tę samą cząstkę w innym i.u.o. U' ,

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}, \quad \vec{F}' = F'_x \vec{i}' + F'_y \vec{j}' + F'_z \vec{k}'.$$

Znajdziemy między nimi odpowiednie współrzędne F_x, F_y, F_z i F'_x, F'_y, F'_z .

Rozważmy ruch cząstki na postaci:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \text{ w } U, \quad \vec{F}' = \frac{d\vec{p}'}{dt'} \text{ w } U'.$$

Obliczamy:

$$\begin{aligned} F'_x &= \frac{dp'_x}{dt'} = \frac{d\left[\gamma\left(p_x - \frac{u}{c^2}E\right)\right]}{d\left[\gamma\left(t - \frac{u}{c^2}x\right)\right]} = \frac{dp_x - \frac{u}{c^2}dE}{dt - \frac{u}{c^2}dx} = \frac{\frac{dp_x}{dt} - \frac{u}{c^2} \frac{dE}{dt}}{1 - \frac{u}{c^2} \frac{dx}{dt}} = \\ &= \frac{F_x - \frac{u}{c^2} \frac{dE}{dt}}{1 - \frac{uv_x}{c^2}}, \end{aligned}$$

korzystamy z tego, że $\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \vec{v} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{v} \cdot \vec{F} = v_x F_x + v_y F_y + v_z F_z,$

dotajemy

$$F'_x = F_x - \frac{uv_y}{c^2 - uv_x} F_y - \frac{uv_z}{c^2 - uv_x} F_z.$$

Podobnie obliczamy, że

$$F'_y = \frac{c^2 \sqrt{1-u^2/c^2}}{c^2 - uv_x} F_y, \quad F'_z = \frac{c^2 \sqrt{1-u^2/c^2}}{c^2 - uv_x} F_z.$$

Jeżeli układ U' chwilowo współporusza się z cząstką, to $v'_x = v'_y = v'_z = 0$ i z poprzednich wzorów wynika, że

$$F_x = F'_x, \quad F_y = \sqrt{1-u^2/c^2} F'_y, \quad F_z = \sqrt{1-u^2/c^2} F'_z.$$

Relatywistyczne obrotanie ruchu

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\gamma\vec{v}) = m\left(\frac{d\gamma}{dt}\vec{v} + \gamma\frac{d\vec{v}}{dt}\right) = m\left(\frac{d\gamma}{dt}\vec{v} + \gamma\vec{a}\right),$$

$$m\frac{d\gamma}{dt} = \frac{\vec{v}}{c^2} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{F}}{c^2},$$

$$\vec{F} = m\gamma\vec{a} + \frac{\vec{v} \cdot \vec{F}}{c^2}\vec{v},$$

$$\vec{a} = \frac{1}{m\gamma}\left(\vec{F} - \frac{\vec{v} \cdot \vec{F}}{c^2}\vec{v}\right),$$

przyspieszenie $\vec{a}$ cząstki na ogół nie jest równoległe do siły $\vec{F}$ działającej na cząstkę.

Zauważamy, że dla $|\vec{v}| \ll c$, $\vec{a} \approx \vec{F}/m$.

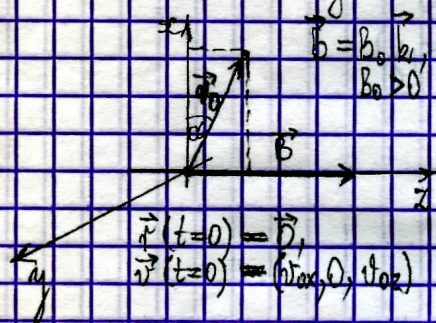
Ruch w polu magnetycznym o indukcji $\vec{B}$; $\vec{v} \cdot \vec{F} = q\vec{v} \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) = 0$, zatem $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m\gamma}$.

(i) Ruch odbywa się ze stałą wartością prędkości (czyli ze stałą energią kinetyczną): $|\vec{v}| = \text{const}$, $E_k = \text{const}$.

$$|\vec{p}| = \sqrt{\vec{p} \cdot \vec{p}}, \quad \frac{d}{dt}|\vec{p}| = \frac{1}{|\vec{p}|} \vec{p} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{1}{|\vec{p}|} (m\gamma\vec{v}) \cdot (q\vec{v} \times \vec{B}) = \frac{q m \gamma}{|\vec{p}|} \vec{v} \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) = 0,$$

czyli $|\vec{p}| = \text{const}$, ponieważ $\vec{v} = (\vec{p}/m)/\sqrt{1 + (\vec{p}/mc)^2}$, zatem również $|\vec{v}| = \text{const}$.

(ii) Ruch w jednorodnym polu magnetycznym $\vec{B} = \text{const}$.



$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q\vec{v} \times \vec{B} = q \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ 0 & 0 & B_0 \end{vmatrix} = q(\dot{y}B_0, -\dot{x}B_0, 0),$$

$$m\gamma\ddot{x} = q\dot{y}B_0, \quad m\gamma\ddot{y} = -q\dot{x}B_0, \quad m\gamma\ddot{z} = 0;$$

$$\ddot{z} = 0 \Rightarrow \underline{z(t) = v_{0z}t}, \quad \omega := qB_0/(m\gamma),$$

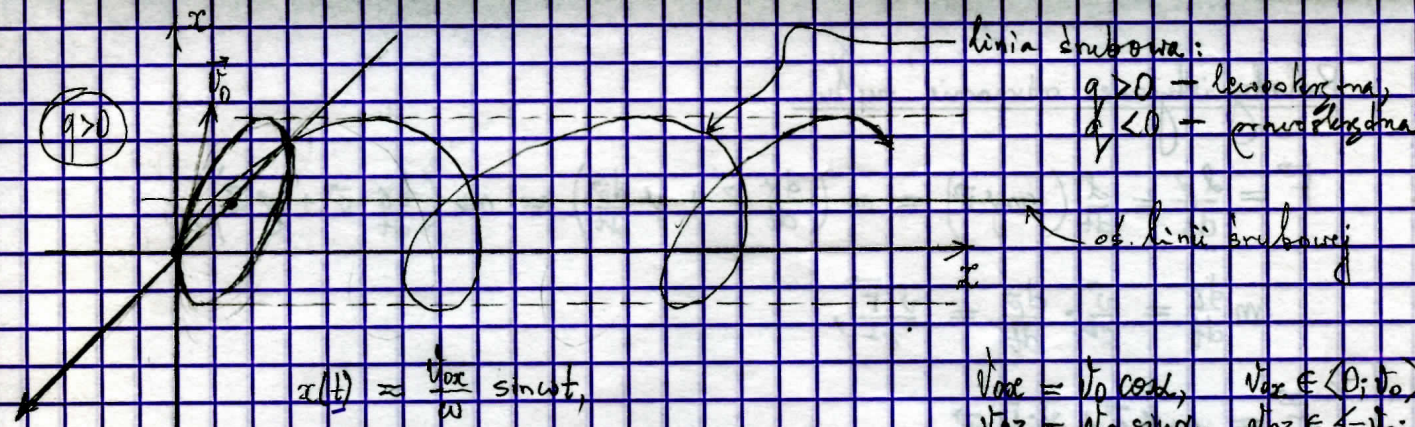
$$\ddot{x} = \omega\dot{y}, \quad \ddot{y} = -\omega\dot{x} \Rightarrow \dot{y} = -\omega x + C, \quad \text{dla } t=0: 0 = C, \quad \dot{y} = -\omega x;$$

$$\ddot{x} = \omega(-\omega x) = -\omega^2 x \Rightarrow x(t) = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t,$$

$$x(0) = C_2 = 0, \quad x(t) = C_1 \sin \omega t, \quad \dot{x}(t) = \omega C_1 \cos \omega t, \quad \dot{x}(0) = \omega C_1 = v_{0x} \Rightarrow C_1 = v_{0x}/\omega,$$

$$\text{ostatecznie } x(t) = \frac{v_{0x}}{\omega} \sin \omega t; \quad \dot{y} = -v_{0x} \sin \omega t, \quad y = +\frac{v_{0x}}{\omega} \cos \omega t + C_3,$$

$$y(0) = \frac{v_{0x}}{\omega} + C_3 = 0 \Rightarrow C_3 = -\frac{v_{0x}}{\omega}, \quad \underline{y(t) = \frac{v_{0x}}{\omega} (\cos \omega t - 1)}.$$



$$\begin{aligned}x(t) &= \frac{v_{0x}}{\omega} \sin \omega t, \\y(t) &= \frac{v_{0x}}{\omega} (\cos \omega t - 1), \\z(t) &= v_{0z} t;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}v_{0x} &= v_0 \cos \alpha, & v_{0x} &\in \langle 0; v_0 \rangle; \\v_{0z} &= v_0 \sin \alpha, & v_{0z} &\in \langle -v_0; v_0 \rangle; \\v_0 &\geq 0, & \alpha &\in \langle -\pi/2; \pi/2 \rangle;\end{aligned}$$

$$x^2 + \left(y + \frac{v_{0x}}{\omega}\right)^2 = \left(\frac{v_{0x}}{\omega}\right)^2 \quad \text{--- środek w płaszczyźnie (x,y) o środku w punkcie} \\(0, -\frac{v_{0x}}{\omega}) \text{ i promieniu } r = \left|\frac{v_{0x}}{\omega}\right|;$$

$$\begin{aligned}r &= \frac{m \gamma v_0 \cos \alpha}{|q| B_0}, & \text{środek jest obiegany z częstotliwością cyklotronową} \\ \omega_c &= |\omega| = \frac{|q| B_0}{m \gamma}, \\ \text{okres obiegu } T_c &= 2\pi / \omega_c = 2\pi \frac{m \gamma}{|q| B_0};\end{aligned}$$

$$\text{skokiem linii śrubowej jest } v_{0z} \cdot T_c = 2\pi \frac{m \gamma v_0 \sin \alpha}{|q| B_0}.$$

Jeżeli $v_{0x} = 0$ (czyli $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ lub $\alpha = +\frac{\pi}{2}$), to $x(t) = y(t) = 0$, $z(t) = \pm v_0 t$:
cząstka porusza się ruchem jednostajnym wzdłuż osi z.

Jeżeli $v_{0z} = 0$ (czyli $\alpha = 0$), to $x(t) = \frac{v_{0x}}{\omega} \sin \omega t$, $y(t) = \frac{v_{0x}}{\omega} (\cos \omega t - 1)$, $z(t) = 0$:
cząstka porusza się po okręgu w płaszczyźnie (x,y).

Masa niezmiennicza i układ środka masy

Rozważmy układ n nie oddziałujących ciał. W i.u.o. U cząstki te mają energie całkowite $E_1, E_2, \dots, E_n$ oraz pędy $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_n$, w innym i.u.o. U' energie tych ciał wynoszą $E'_1, E'_2, \dots, E'_n$, natomiast ich pędy to $\vec{p}'_1, \vec{p}'_2, \dots, \vec{p}'_n$.

Wprowadźmy indeks a numerujący różne cząstki: energia cząstki o numerze a to E_a , zaś jej pęd to $\vec{p}_a$, gdzie $a=1, 2, \dots, n$.

Zwróć uwagę, że $E_a, \vec{p}_a = (p_{ax}, p_{ay}, p_{az})$ oraz $E'_a, \vec{p}'_a = (p'_{ax}, p'_{ay}, p'_{az})$ określają transformacje Lorentza:

$$(*) \quad \begin{cases} E'_a = \gamma (E_a - u p_{ax}), \\ p'_{ax} = \gamma (p_{ax} - \frac{u}{c^2} E_a), \\ p'_{ay} = p_{ay}, \quad p'_{az} = p_{az}, \end{cases} \quad a=1, \dots, n.$$

Definiujemy całkowitą energię E i całkowity pęd $\vec{P}$ układu ciał:

$$E = \sum_{a=1}^n E_a, \quad \vec{P} = \sum_{a=1}^n \vec{p}_a, \quad \vec{P} = (P_x, P_y, P_z), \quad \text{gdzie } P_x = \sum_{a=1}^n p_{ax}, \\ P_y = \sum_{a=1}^n p_{ay}, \quad P_z = \sum_{a=1}^n p_{az}.$$

Analogiczne wzory obowiązują w i.u.o. U' .

Dodając równania $(*)$ stronami dostajemy

$$(**) \quad \begin{cases} E' = \gamma (E - u P_x), \\ P'_x = \gamma (P_x - \frac{u}{c^2} E), \\ P'_y = P_y, \quad P'_z = P_z. \end{cases}$$

Z równań $(**)$ wynika, że jeżeli w i.u.o. U energia i pęd układu są zachowane ($E = \text{const}$, $\vec{P} = \text{const}$), to są one również zachowane w i.u.o. U' ($E' = \text{const}$, $\vec{P}' = \text{const}$), o ile obie te zasady obowiązują jednocześnie. Wskazuje to na to, że obie te zasady zachowania nie są od siebie niezależne.

Z równań $(**)$ wynika również, że $E^2 - c^2 \vec{P}^2 = E'^2 - c^2 \vec{P}'^2 = \text{const}$, dlatego wprowadzamy masę niezmienniczą (invariantną) M układu ciał ze pomocą formuły

$$E^2 - c^2 \vec{P}^2 = M^2 c^4,$$

$$\text{czyli } M = \frac{1}{c^2} \sqrt{E^2 - c^2 \vec{P}^2} = \frac{1}{c^2} \sqrt{\left(\sum_{a=1}^n E_a\right)^2 - c^2 \left(\sum_{a=1}^n \vec{p}_a\right)^2}.$$

Układ środka masy (ś.m.) definiujemy jako taki i.u.o., w którym całkowity pęd układu znika. Prędkość układu (ś.m.) względem dowolnego i.u.o. wyraża się wzorem

$$\vec{V}_{\text{ś.m.}} = \frac{c^2 \vec{P}}{E}.$$

Niech wektor $\vec{P}$ ma kierunek osi x : $\vec{P} = (P, 0, 0)$, gdzie $P = |\vec{P}|$, czyli $P_x = P$, $P_y = P_z = 0$. Niech i.u.o. U' porusza się z prędkością

$$\vec{u} = \vec{V}_{\text{ś.m.}} = \left(\frac{c^2 P}{E}, 0, 0 \right).$$

Wobec całkowitego pędu układu cząstek w i.u.o. U' wynosi:

$$P'_{x'} = \gamma \left(P_x - \frac{u}{c^2} E \right) = \gamma \left(P - \frac{E}{c^2} \frac{c^2 P}{E} \right) = 0, \quad P'_{y'} = P_y = 0, \quad P'_{z'} = P_z = 0,$$

zatem i.u.o. U' jest układem ś.m.

Polożenie środka masy układu nie oddziałujących cząstek dostała wzór

$$\vec{R}_{\text{ś.m.}} = \frac{\sum_{a=1}^n E_a \vec{r}_a}{\sum_{a=1}^n E_a},$$

$$\text{ponieważ } \frac{d\vec{R}_{\text{ś.m.}}}{dt} = \frac{1}{E} \sum_{a=1}^n E_a \vec{v}_a = \frac{c^2}{E} \sum_{a=1}^n m_a \gamma_a \vec{v}_a = \frac{c^2}{E} \vec{P} = \vec{V}_{\text{ś.m.}}$$

W przybliżeniu nierelatywistycznym $E_a = m_a c^2 + E_{\text{kin}} \approx m_a c^2$

$$\text{z } \vec{R}_{\text{ś.m.}} \approx \frac{\sum_a m_a c^2 \vec{r}_a}{\sum_a m_a c^2} = \frac{\sum_a m_a \vec{r}_a}{\sum_a m_a}.$$

W układzie ś.m. masa niezmiennicza układu cząstek to całkowita energia układu podzielona przez c^2 :

$$M = \frac{E}{c^2} = \frac{1}{c^2} \sum_{a=1}^n E_a.$$

Akseleratory cząstek elementarnych: wiązki precyzyjne

Rozważmy zderzenie dwóch protonów (np. w akseleratorze LHC):

$$p + p \rightarrow X + Y + \dots$$

Jaka część energii zderzających się protonów może zostać zużyta na produkcję nowych cząstek $X, Y, \dots$?

Rozważmy zderzenie w układzie środka masy, w którym

$$\vec{p}_1^{cm} + \vec{p}_2^{cm} = \vec{0} = \vec{p}_X^{cm} + \vec{p}_Y^{cm} + \dots$$

przed zderzeniem

po zderzeniu

$$E_1^{cm} + E_2^{cm} = (m_X + m_Y + \dots)c^2 + (\text{energje kinetyczne});$$

przed zderzeniem

po zderzeniu

cała energia zderzających się protonów w układzie środka masy może być zamieniana na energię wewnętrznych cząstek powstałych w wyniku zderzenia, wówczas

$$E_1^{cm} + E_2^{cm} = (m_X + m_Y + \dots)c^2 \quad \text{i uzyskacie cząstki } X, Y, \dots \text{ spoczywające w układzie CM.}$$

Niech ΔE^{cm} będzie energia dostępna w układzie środka masy (czyli energia, która może zostać zużyta na produkcję nowych cząstek).

Rozważmy teraz zderzenie w układzie (nazwiemy go układem laboratorium), w którym jeden z protonów spoczywa.

Jakiś ładunek musi mieć, względem laboratorium, drugi proton, by energia dostępna w układzie środka masy była równa ΔE^{cm} ?

$$\begin{aligned} \Delta E^{cm} = E_1^{cm} + E_2^{cm} &= \sqrt{(E_1^{lab} + E_2^{lab})^2 - c^2(\vec{p}_1^{lab} + \vec{p}_2^{lab})^2} \\ &\quad \text{niezmiennik transformacji Lorentza} \\ &= \sqrt{(E^{lab} + m_p c^2)^2 - c^2(\vec{p}^{lab})^2} \quad \leftarrow (E^{lab})^2 = c^2(\vec{p}^{lab})^2 + (m_p c^2)^2 \\ &= \sqrt{2m_p c^2 (E^{lab} + m_p c^2)}, \quad \text{stad} \quad \underline{\underline{E^{lab} = \frac{(\Delta E^{cm})^2}{2m_p c^2} - m_p c^2}} \end{aligned}$$

W detektorze LHC każdy ze zderzających się protonów ma poruszać się względem laboratorium (które jest równocześnie układem środka masy zderzających się protonów) z energią $E^{lab} \approx 7 \text{ TeV}$ ($1 \text{ TeV} = 10^{12} \text{ eV} \approx 1000 \text{ GeV}$), zatem $\Delta E^{cm} = 2E^{lab} \approx 14 \text{ TeV}$.

Taką samą dostępną energię można by uzyskać, uderzając w nieruchomy proton protonem o energii

$$\frac{(\Delta E^{cm})^2}{2m_p c^2} - m_p c^2 \approx \frac{(\Delta E^{cm})^2}{2m_p c^2} \approx 10^5 \text{ TeV}$$

(energia spoczynkowa protonu $m_p c^2 = 938,3 \text{ MeV}$;

$$1 \text{ eV} = 1 \text{ e} \cdot 1 \text{ V} = 1,602 \times 10^{-19} \text{ J}).$$

Kracja pary cząstka-antycząstka

xviii

Zasady zachowania energii i pędu nagle przebiegiem reakcji jądrowych i wąskich reakcji z udziałem cząstek elementarnych.

Rozważmy krację pary elektron-pozyton przez kwant promieniowania γ :

$$\gamma \rightarrow e^- + e^+.$$

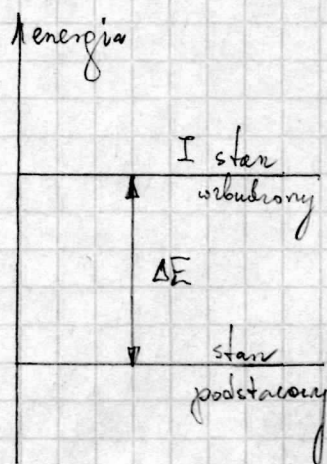
Z zasady zachowania energii wynika, że reakcja ta mogłaby zajść, gdyby $E_\gamma \geq 2m_e c^2 \approx 1,02 \text{ MeV}$. Taka reakcja nie może jednak zajść w próżni, gdyż pogwałciłaby ona zasadę zachowania pędu:

w układzie środka masy pary elektron-pozyton $\vec{p}_e + \vec{p}_{e^+} = \vec{0}$,

natomiast $\vec{p}_\gamma \neq \vec{0}$ — w żadnym układzie odniesienia pęd fotonu nie może być zerem.

Reakcja kracji może nastąpić w sąsiedztwie innej cząstki, np. jądra atomu.

Wzbudzanie atomów przez fotony



(A)

$$E_f = h\nu > \Delta E$$

(A*)

Taką energię możemy nazwać energiją propagującą.

Atom ma masę spoczynkową m (w stanie podstawowym), energia wzbudzenia do I-go stanu wzbudzonego równa się ΔE .

Jaka energia musi mieć co najmniej foton, aby w zderzeniu z atomem (w stanie podstawowym) spowodował przejście tego atomu do stanu wzbudzonego?

Foton o najmniejszej możliwej energii po pochłonięciu przez atom spowoduje powstanie atomu wzbudzonego, który będzie spoczywał w układzie środka masy. Masa niezmiennicza w układzie d.m.:

$$M = \frac{1}{c^2} \sqrt{(\text{całkowita energia})^2 - c^2(\text{całkowity pęd})^2}$$

$$= \frac{1}{c^2} (\text{całkowita energia}) = \frac{1}{c^2} (m_A c^2 + \Delta E) = m_A + \frac{\Delta E}{c^2};$$

masa niezmiennicza w układzie laboratorium przed zderzeniem:

$$M = \frac{1}{c^2} \sqrt{(E_f + m_A c^2)^2 - c^2 \vec{p}_f^2} = \frac{1}{c^2} \sqrt{2E_f m_A c^2 + m_A^2 c^4};$$

zatem $m_A + \frac{\Delta E}{c^2} = \frac{1}{c^2} \sqrt{2E_f m_A c^2 + m_A^2 c^4}$, skąd $E_f = \Delta E \left(1 + \frac{\Delta E}{2m_A c^2}\right)$,

czyli energia propagująca fotonu jest większa od energii wzbudzenia.

Masę niezmienniczą $M = m_A + \frac{\Delta E}{c^2}$ możemy interpretować jako masę spoczynkową atomu w stanie wzbudzenia.

Interpretacja taka wynika również wprost z zastosowania zasad zachowania energii i pędu w układzie, w którym niewzbudzony atom A spoczywa:

$$E_A + E_f = E_{A^*}, \quad E_A = m_A c^2, \quad E_{A^*} = \sqrt{c^2 \vec{p}_{A^*}^2 + m_{A^*}^2 c^4},$$

$$\vec{p}_f = \vec{p}_{A^*} \Rightarrow p_f = p_{A^*} \quad (p_f = |\vec{p}_f|, p_{A^*} = |\vec{p}_{A^*}|),$$

$$E_f/c = \frac{1}{c} \sqrt{E_{A^*}^2 - m_{A^*}^2 c^4},$$

$$E_f^2 = (E_A + E_f)^2 - m_{A^*}^2 c^4 \Rightarrow m_{A^*}^2 c^4 = E_A (E_A + 2E_f),$$

$$m_{A^*}^2 = \sqrt{m_A \left(m_A + \frac{2E_f}{c^2}\right)},$$

podstawiając tutaj $E_f = \Delta E \left(1 + \frac{\Delta E}{2m_A c^2}\right)$ dostajemy

$$m_{A^*}^2 = m_A + \frac{\Delta E}{c^2}.$$