

SZCZEGÓLNA TEORIA WZGLĘDNOŚCI: SERIA 1 ZADAŃ

1. Na brzegu rzeki leży motorówka. W górze rzeki z mostu na środek rzeki spada koło ratunkowe, które unosi się na wodzie. Jak należy skierować motorówkę, by dopłynęła ona w możliwie najkrótszym czasie do koła?
2. Z motorówki płynącej w dół rzeki wypadło koło ratunkowe. Po $\Delta t_1 = 40$ min motorówka dopłynęła do mostu znajdującego się w odległości $l = 20$ km od punktu na brzegu, naprzeciw którego wypadło koło. Pod mostem motorówka zawróciła i dopłynęła do koła ratunkowego. Następnie znów zawróciła i po $\Delta t_2 = 24$ min od chwili spotkania z kołem znów znalazła się pod mostem. Obliczyć prędkość wody w rzece oraz prędkość motorówki względem wody.
3. Na platformie jadącej ze stałą prędkością o wartości v stoi armata z lufą o długości l wzniesioną do góry pod kątem α względem kierunku, w którym porusza się platforma ($0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$). Pada deszcz i krople deszczu przelatują przez całą długość lufy równolegle do jej osi w czasie Δt . (i) Jakim ruchem poruszają się krople deszczu w powietrzu? (ii) Obliczyć wartość wektora prędkości kropeł względem ziemi oraz określić jego kierunek względem kierunku ruchu platformy. (iii) Przedyskutować otrzymane formuły w przypadku, gdy: (a) $v = 0$, (b) $\alpha = 0^\circ$.
4. Na płaszczyźnie określone są dwa kartezjańskie układy współrzędnych prostokątnych o wspólnym początku O : OXY oraz $OX'Y'$. Osie układu $OX'Y'$ są obrócone (w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara) względem osi układu OXY o kąt α . (i) Dla dowolnego punktu P na płaszczyźnie wyrazić jego współrzędne (x, y) względem układu OXY przez jego współrzędne (x', y') względem układu $OX'Y'$. (ii) Zapisać związek pomiędzy współrzędnymi (x, y) i (x', y') w postaci macierzowej. Pokazać, że występująca w tym związku macierz obrotu płaszczyzny o kąt α jest macierzą *ortogonalną*. (iii) Niech $P_1(x_1, y_1)$ oraz $P_2(x_2, y_2)$ będą dwoma dowolnymi punktami na płaszczyźnie. Wykazać, że wielkość $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ jest *niezmiennikiem transformacji obrotu*.

Wskazówki i rozwiązania. 2. Prędkość wody w rzece: 6 km/h, prędkość motorówki względem wody: 24 km/h. 3. Prędkość $\vec{v}_{k/z}$ kropeł względem ziemi ma wartość $v_{k/z} = \sqrt{v^2 + (l/\Delta t)^2} - 2vl \cos \alpha / \Delta t$; niech β będzie kątem pomiędzy wektorami $\vec{v}_{k/z}$ i $\vec{v}$, wówczas $\sin \beta = l \sin \alpha / (v_{k/z} \Delta t)$, $\cos \beta = v / v_{k/z} - l \cos \alpha / (v_{k/z} \Delta t)$. 4. $x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha$, $y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha$.