

SZCZEGÓLNA TEORIA WZGLĘDNOŚCI: SERIA 2 ZADAŃ

Jeżeli inercjalny układ odniesienia U' porusza się ruchem postępowym względem inercjalnego układu odniesienia U ze stałą prędkością $\vec{u} = u\vec{i}$ w kierunku osi $\mathcal{O}X$ układu U (wektor $\vec{i}$ jest wersorem osi $\mathcal{O}X$) oraz w chwili $t = t' = 0$ osie obu układów współrzędnych przestrzennych pokrywają się, to związki pomiędzy współrzędnymi czasoprzestrzennymi dowolnego zdarzenia w obu tych układach (czyli *transformacja Lorentza*) są następujące:

$$t' = \gamma(t - ux/c^2), \quad x' = \gamma(x - ut), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad \text{gdzie } \gamma := 1/\sqrt{1 - u^2/c^2}, \quad -c < u < +c. \quad (1)$$

1. Posługując się transformacją Lorentza (1) znaleźć związki pomiędzy współrzędnymi wektorów prędkości chwilowych $\vec{v}$ i $\vec{v}'$ oraz przyspieszeń chwilowych $\vec{a}$ i $\vec{a}'$ punktu materialnego, mierzonych względem dwóch różnych inercjalnych układów odniesienia; $\vec{v}$ i $\vec{a}$ są mierzone względem układu U , natomiast $\vec{v}'$ i $\vec{a}'$ są mierzone względem układu U' .
2. Posługując się transformacją Lorentza (1) wyprowadzić i skomentować formuły wyrażające dylatację (czyli wydłużenie) czasu i skrócenie (czyli kontrakcję) Lorentza.
3. Korzystając z relatywistycznego prawa dodawania prędkości sprawdzić, że jeśli w pewnym inercjalnym układzie odniesienia obiekt porusza się z prędkością o wartości c , to w każdym innym inercjalnym układzie odniesienia wartość prędkości tego obiektu wynosi również c . Sprawdzić również, że jeśli w pewnym inercjalnym układzie odniesienia obiekt porusza się z prędkością o wartości ostro mniejszej od c , $|\vec{v}| < c$, to w każdym innym inercjalnym układzie odniesienia wartość prędkości tego obiektu będzie także ostro mniejsza od c , $|\vec{v}'| < c$.
4. Wykazać, że interwał czasoprzestrzenny pomiędzy dwoma dowolnymi zdarzeniami jest niezmiennikiem transformacji Lorentza (1).
5. Wykazać, że jeśli w pewnym inercjalnym układzie odniesienia zdarzenie $\mathcal{B}$ jest konsekwencją zdarzenia $\mathcal{A}$, to nie istnieje taki inercjalny układ odniesienia, w którym zdarzenie $\mathcal{B}$ mogłoby zajść wcześniej niż zdarzenie $\mathcal{A}$ lub oba zdarzenia byłyby jednoczesne.
6. Zapisać transformację Lorentza w postaci macierzowej. Pokazać, że macierz otrzymana z macierzy $\Lambda(\vec{u})$ wyjściowej transformacji Lorentza przez podstawienie $\vec{u} \rightarrow -\vec{u}$, jest macierzą odwrotną do macierzy $\Lambda(\vec{u})$: $\Lambda(-\vec{u}) = (\Lambda(\vec{u}))^{-1}$.
7. W inercjalnym układzie odniesienia U' wiązka światła porusza się pod kątem α' względem osi $\mathcal{O}'X'$ tego układu. Znaleźć kąt α , jaki będzie tworzyć ta wiązka z osią $\mathcal{O}X$ układu U . W granicy małych prędkości układu U' względem układu U , $|\vec{u}| \ll c$, znaleźć zależność kąta aberracji $\Delta\alpha := \alpha' - \alpha$ od kąta α' .

Wskazówki i rozwiązania. 1. $v'_{x'} = (v_x - u) \left(1 - \frac{uv_x}{c^2}\right)^{-1}$, $v'_{y'} = v_y \gamma^{-1} \left(1 - \frac{uv_x}{c^2}\right)^{-1}$, $v'_{z'} = v_z \gamma^{-1} \left(1 - \frac{uv_x}{c^2}\right)^{-1}$; $a'_{x'} = a_x \gamma^{-3} \left(1 - \frac{uv_x}{c^2}\right)^{-3}$, $a'_{y'} = \left(a_y + \frac{uv_y}{c^2} \frac{a_x}{1 - \frac{uv_x}{c^2}}\right) \gamma^{-2} \left(1 - \frac{uv_x}{c^2}\right)^{-2}$, $a'_{z'} = \left(a_z + \frac{uv_z}{c^2} \frac{a_x}{1 - \frac{uv_x}{c^2}}\right) \gamma^{-2} \left(1 - \frac{uv_x}{c^2}\right)^{-2}$.

3. Pokazać, że $v'^2 = c^2 \left\{1 - \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \left(1 - \frac{uv_x}{c^2}\right)^{-2}\right\}$. Dla $v < c$ pokazać, że

$0 < \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \left(1 - \frac{uv_x}{c^2}\right)^{-2} \leq 1$. 5. Jeżeli w pewnym inercjalnym układzie odniesienia U obserwuje się, że zdarzenie $\mathcal{B}$ jest konsekwencją zdarzenia $\mathcal{A}$, to $I_{AB} \leq 0$ oraz $t_B - t_A > 0$. Należy wykazać, że wówczas w każdym innym inercjalnym układzie odniesienia U' zachodzi $t'_B - t'_A > 0$. 6. Macierz $\Lambda(\vec{u})$

jest zdefiniowana za pomocą równości $\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \Lambda(\vec{u}) \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, jest ona równa $\Lambda(\vec{u}) = \begin{pmatrix} \gamma & -\frac{u}{c^2}\gamma & 0 & 0 \\ -u\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

7. $\cos \alpha = (\cos \alpha' + u/c) / (1 + (u/c) \cos \alpha')$, $\Delta\alpha = \frac{u}{c} \sin \alpha' + \mathcal{O}((u/c)^2)$.