

SZCZEGÓLNA TEORIA WZGLĘDNOŚCI: SERIA 5 ZADAŃ

- (Relatywistyczny ruch jednostajnie przyspieszony.) Ciało porusza się ze stałym, mierzonym w swoim układzie własnym, przyspieszeniem chwilowym o wartości a_0 ($a_0 > 0$). Ruch ciała jest obserwowany względem ustalonego inercjalnego układu odniesienia U . Zakładamy, że ruch ciała jest prostoliniowy i odbywa się wzdłuż osi x układu U .
 - Znaleźć związek pomiędzy przyspieszeniem a_0 mierzonym w układzie własnym ciała i przyspieszeniem chwilowym a_x mierzonym w inercjalnym układzie odniesienia U .
 - Niech $x_0 = x(t_0)$ i $v_{0x} = v_x(t_0)$. Znaleźć zależności przyspieszenia chwilowego a_x , prędkości chwilowej v_x oraz położenia x ciała względem układu U od współrzędnej czasowej t związanej z tym układem. Pokazać, że $\lim_{t \rightarrow \infty} v_x(t) = c$.
 - Niech $t_0 = 0$, $x_0 = 0$ i $v_{0x} = 0$. Pokazać, że dla przedziałów czasu $\langle 0; t \rangle$ na tyle krótkich, że $a_0 t \ll c$, zachodzą przybliżone równości: $a_x(t) \cong a_0$, $v_x(t) \cong a_0 t$, $x(t) \cong \frac{1}{2} a_0 t^2$.
 - Niech $t_0 = 0$, $x_0 = 0$ i $v_{0x} = 0$ oraz niech początek liczenia czasu własnego ciała $\tau = 0$ odpowiada chwili $t = 0$. Znaleźć zależność $\tau(t)$ czasu własnego τ od współrzędnej czasowej t , zależność odwrotną $t(\tau)$ oraz zależności przyspieszenia chwilowego a_x , prędkości chwilowej v_x oraz położenia x ciała względem układu U od czasu własnego τ .
 - Niech $t_0 = 0$, $x_0 = 0$ i $v_{0x} = 0$. Naszkicować na diagramie czasoprzestrzennym obserwatora U linię świata ciała poruszającego się ze stałym (mierzonym w swoim układzie własnym) przyspieszeniem. Porównać ją z linią świata ciała poruszającego się ze stałym przyspieszeniem ruchem nierelatywistycznym.
- Rakieta kosmiczna podróżuje z Ziemi do centrum Galaktyki odległego o $\ell = 2 \times 10^{20}$ m (czyli o około 21 000 lat świetlnych). Lot odbywa się w taki sposób, że połowę dystansu rakieta przelatuje ze stałym, mierzonym w swoim układzie własnym, przyspieszeniem $a_0 = 10 \text{ m/s}^2$, drugą zaś połowę z identycznym co do wartości opóźnieniem. Obliczyć czas podróży mierzony względem rakiety i względem Ziemi.

Wskazówki i rozwiązania. Funkcje hiperboliczne rzeczywistego argumentu $x \in \mathbb{R}$: $\sinh x := \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$, $\cosh x := \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, $\operatorname{tgh} x := \sinh x / \cosh x$. Funkcja area odwrotna do sinusa hiperbolicznego: $(-\infty, +\infty) \ni x \mapsto \operatorname{ar} \sinh x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \in (-\infty, +\infty)$; funkcja area odwrotna do cosinusa hiperbolicznego: $\langle 1, +\infty \rangle \ni x \mapsto \operatorname{ar} \cosh x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \in \langle 0, +\infty \rangle$. Dla $x \geq 1$ zachodzi związek $\sinh(\operatorname{ar} \cosh x) = \sqrt{x^2 - 1}$. Mogą się przydać całki nieoznaczone: $\int \frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C$, $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{ar} \sinh x + C$.

- Niech $\gamma_0 := 1/\sqrt{1-v_{0x}^2/c^2}$. (a) $a_x = \left(1 - \frac{v_x^2}{c^2}\right)^{3/2} a_0$. (b) $a_x(t) = a_0 \{1 + [a_0(t-t_0) + \gamma_0 v_{0x}]^2/c^2\}^{-3/2}$,
 $v_x(t) = [a_0(t-t_0) + \gamma_0 v_{0x}]/\sqrt{1 + [a_0(t-t_0) + \gamma_0 v_{0x}]^2/c^2}$, $x(t) = x_0 + (c^2/a_0) \{ \sqrt{1 + [a_0(t-t_0) + \gamma_0 v_{0x}]^2/c^2} - \gamma_0 \}$.
 (d) $\tau(t) = (c/a_0) \operatorname{ar} \sinh(a_0 t/c)$, $t(\tau) = (c/a_0) \sinh(a_0 \tau/c)$, $a_x(\tau) = a_0 / \cosh^3(a_0 \tau/c)$, $v_x(\tau) = c \operatorname{tgh}(a_0 \tau/c)$,
 $x(\tau) = (c^2/a_0) [\cosh(a_0 \tau/c) - 1]$. 2. $\tau = (2c/a_0) \operatorname{ar} \cosh[a_0 \ell / (2c^2) + 1] \cong 19$ lat względem rakiety,
 $\frac{2c}{a_0} \sinh\left(\frac{a_0 \tau}{2c}\right) = \sqrt{\frac{\ell}{a_0} \left(\frac{a_0 \ell}{c^2} + 4\right)} \cong 21\,142$ lata względem Ziemi ($c = 299\,792\,458 \text{ m/s}$; 1 rok = $365,25 \times 24 \times 3600 \text{ s}$).