

SZCZEGÓLNA TEORIA WZGLĘDNOŚCI: SERIA 6 ZADAŃ

1. Sprawdzić za pomocą bezpośredniego rachunku, że zachodzą równości (kropka nad symbolem oznacza różniczkowanie względem czasu):

$$(a) \quad \dot{\gamma} = \gamma^3 \frac{v\dot{v}}{c^2},$$

$$(b) \quad \dot{E} = m\gamma^3 v\dot{v},$$

$$(c) \quad \vec{v} \cdot \dot{\vec{p}} = \dot{E}.$$

Tutaj $v = |\vec{v}|$, $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, $E = m\gamma c^2$, $\vec{p} = m\gamma\vec{v}$.

2. Sprawdzić, korzystając z relatywistycznego prawa dodawania prędkości, że współrzędne czterowektora energii-pędu cząstki przy zmianie inercyjnego układu odniesienia transformują się tak, jak współrzędne czasoprzestrzenne.
3. Wykazać, korzystając z własności transformacyjnych współrzędnych czterowektora energii-pędu cząstki, że wielkość $(E/c)^2 - \vec{p}^2$ jest niezmiennikiem transformacji Lorentza.
4. (Zjawisko Comptona.) Foton o długości fali λ jest rozproszony pod kątem θ na elektronie, który początkowo spoczywa. Pokazać, że długość fali λ' rozproszonego fotonu może być obliczona za pomocą wzoru:
- $$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos \theta),$$
- gdzie h jest stałą Plancka, m oznacza masę spoczynkową elektronu.
5. Dla reakcji cząstek elementarnych zachodzących zgodnie ze schematem $a + b \rightarrow c + d$ definiujemy

$$s := \frac{(E_a + E_b)^2}{c^2} - (\vec{p}_a + \vec{p}_b)^2, \quad t := \frac{(E_a - E_c)^2}{c^2} - (\vec{p}_a - \vec{p}_c)^2, \quad u := \frac{(E_a - E_d)^2}{c^2} - (\vec{p}_a - \vec{p}_d)^2,$$

gdzie np. E_a i $\vec{p}_a$ są odpowiednio energią całkowitą i pędem cząstki a .

(a) Wykazać, że zmienne s, t, u są niezmiennikami transformacji Lorentza.

(b) Pokazać, że $s + t + u = (m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 + m_d^2)c^2$, gdzie np. m_a jest masą spoczynkową cząstki a .

6. Udowodnić, że procesy $\gamma \rightarrow e^- + e^+$ i $e^- + e^+ \rightarrow \gamma$ nie mogą zajść w próżni.

Wskazówki i rozwiązania. • W zadaniach 2, 3 i 5 rozważ dwa inercjalne układy odniesienia U i U' takie, że układ U' porusza się względem układu U ruchem postępowym w kierunku osi x układu U ze stałą prędkością $\vec{u} = u\vec{i}$, gdzie $\vec{i}$ jest wersorem osi x (u jest zatem współrzędną wektora prędkości $\vec{u}$ względem osi x , $-c < u < +c$), w chwili $t = t' = 0$ osie obu układów pokrywają się. Wówczas związek pomiędzy współrzędnymi czasoprzestrzennymi dowolnego zdarzenia w obu tych układach jest następujący: $t' = \gamma(t - ux/c^2)$, $x' = \gamma(x - ut)$, $y' = y$, $z' = z$, gdzie $\gamma := 1/\sqrt{1 - u^2/c^2}$. Jeśli $x^0 := ct$ jest współrzędną czasową o wymiarze długości, to $x'^0 = \gamma(x^0 - ux/c)$.

• Czterowektor energii-pędu cząstki (może nią być foton) ma współrzędne $(E/c, p_x, p_y, p_z)$, gdzie E jest energią całkowitą cząstki, zaś (p_x, p_y, p_z) są współrzędnymi kartezjańskimi wektora pędu $\vec{p}$ cząstki.

2. Można skorzystać ze związku: $1 - \frac{v'^2}{c^2} = \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\left(1 - \frac{uv_x}{c^2}\right)^{-2}$.