Wstęp do teorii procesów stochastycznych: seria 2 zadań

1. Proces stochastyczny (X_t) z czasem ciągłym zdefiniowany jest następująco:

$$\mathsf{X}_t := \mathsf{A}\cos(\omega_0 t + \Theta), \quad -\infty < t < +\infty,$$

gdzie $\omega_0 > 0$ jest stałą, A jest zmienną losową o rozkładzie Rayleigha (z gęstością prawdopodobieństwa $p(a) = 0$ dla $a < 0$ i $p(a) = a\exp(-a^2/2)$ dla $a \geq 0$), zaś Θ jest zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na odcinku $\langle 0; 2\pi)$, zmienne losowe A i Θ są niezależne. (i) Pokazać, że (X_t) jest procesem o ergodycznej średniej. (ii) Pokazać, że (X_t) nie jest procesem ergodycznym (wskazówka: porównać $\mathsf{E}(\mathsf{X}_t^2)$ z $\langle x^2(t)\rangle$). (iii) Porównać $R_\mathsf{X}(\tau) := \mathsf{E}(\mathsf{X}_t\mathsf{X}_{t-\tau})$ z $\mathcal{R}_x(\tau) := \lim\limits_{T\to\infty}\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\,x(t-\tau)\,\mathrm{d}t$. Funkcja $x = x(t)$ jest dowolną realizacją procesu stochastycznego (X_t).

2. Obliczyć widmową gęstość mocy $S_\mathsf{X}(f)$ procesu stochastycznego drgań harmonicznych

$$\mathsf{X}_t = A\cos(\omega_0 t + \Theta), \quad -\infty < t < +\infty,$$

gdzie A i ω_0 są dodatnimi stałymi, Θ jest zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na odcinku $\langle 0; 2\pi)$. Sprawdzić, że funkcja $S_\mathsf{X} = S_\mathsf{X}(f)$ jest parzysta. Funkcją autokorelacji procesu (X_t) jest $R_\mathsf{X}(\tau) := \mathsf{E}(\mathsf{X}_t\mathsf{X}_{t-\tau}) = \frac{1}{2}A\cos(\omega_0\tau)$.

3. Stacjonarny w szerszym sensie proces stochastyczny (X_t) ma funkcję autokorelacji postaci

$$R_\mathsf{X}(\tau) = R_0 e^{-|\tau|/\tau_0}, \quad -\infty < \tau < +\infty,$$

gdzie $R_0 > 0$ i $\tau_0 > 0$ są stałymi. Obliczyć widmową gęstość mocy $S_\mathsf{X}(f)$ procesu stochastycznego (X_t). Sprawdzić, że znaleziona funkcja $S_\mathsf{X} = S_\mathsf{X}(f)$ jest parzysta. Naszkicować wykresy funkcji R_X i S_X.

4. Znaleźć funkcję autokorelacji $R_\mathsf{Z}(\tau)$ stacjonarnego w szerszym sensie procesu stochastycznego (Z_t), którego widmowa gęstość mocy ma postać

$$S_\mathsf{Z}(f) = \frac{S_0}{4 + (f/f_0)^4}, \quad -\infty < f < +\infty,$$

gdzie $f_0 > 0$ i $S_0 > 0$ są stałymi. Sprawdzić, że znaleziona funkcja $R_\mathsf{Z} = R_\mathsf{Z}(\tau)$ jest parzysta. Naszkicować wykresy funkcji R_Z i S_Z. Obliczyć wartość średniokwadratową procesu (Z_t).

5. Rozważmy stacjonarny układ liniowy o odpowiedzi impulsowej h oraz proces stochastyczny $\mathsf{Y}_t := \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-t')\,\mathsf{X}_{t'}\,\mathrm{d}t'$, gdzie (X_t) jest procesem stacjonarnym w szerszym sensie. Pokazać, że gęstości widmowe S_X i S_Y związane są zależnością $S_\mathsf{Y}(f) = |\tilde{h}(f)|^2 S_\mathsf{X}(f)$. Wskazówka: skorzystać ze związku pomiędzy funkcjami autokorelacji R_X i R_Y, $R_\mathsf{Y}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}u\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}v\, h(u)\,h^*(v)\,R_\mathsf{X}(\tau+v-u)$.

Rozwiązania. 1. (i) $\mathsf{E}(\mathsf{X}_t) = \langle x(t)\rangle = 0$; (ii) $\mathsf{E}(\mathsf{X}_t^2) = 1$, $\langle x^2(t)\rangle = \frac{1}{2}a^2$; (iii) $R_\mathsf{X}(\tau) = \cos(\omega_0\tau)$, $\mathcal{R}_x(\tau) = \frac{1}{2}a^2\cos(\omega_0\tau)$. **2.** $S_\mathsf{X}(f) = \frac{1}{4}A[\delta(f+f_0) + \delta(f-f_0)]$, gdzie $f_0 := \omega_0/(2\pi)$. **3.** $S_\mathsf{X}(f) = 2\tau_0 R_0/\big(1 + (2\pi\tau_0 f)^2\big)$. **4.** $R_\mathsf{Z}(\tau) = \frac{1}{4}\pi f_0 S_0\, e^{-2\pi f_0|\tau|}\big(\cos(2\pi f_0\tau) + \sin(2\pi f_0|\tau|)\big)$.